

## 5. Uhrentransport

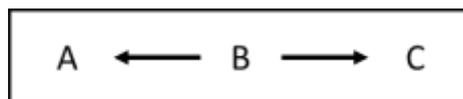
---

Bekanntlich ist gemäß der Speziellen Relativitätstheorie bei einem Signalaustausch in bewegten Systemen nur die gemeinsame Betrachtung von Hin- und Rückweg möglich. Darüber hinaus hat es in der Vergangenheit jedoch viele Überlegungen zur Messung der Einweglichtgeschwindigkeiten innerhalb eines Systems gegeben. Einer der Ansätze zur getrennten Messung war die Untersuchung des Effekts, der sich durch die langsame Bewegung von synchronisierten Uhren ergibt. Hierbei wird ein bewegtes System betrachtet, bei dem sich zwei gemäß Einstein-Konvention synchronisierte Uhren so bewegen, dass eine der anderen folgt. Zur Durchführung des Versuchs werden die Uhren langsam in der Weise bewegt, dass sie nach Abschluss die Plätze getauscht haben. Bei sehr langsamer Durchführung sollte die ursprüngliche Synchronisierung erhalten bleiben und anschließend eine Zeitdifferenz messbar sein.

Es jedoch bereits seit einiger Zeit bekannt, ist der von den Uhren messbare Effekt exakt der Position innerhalb des Systems entspricht (vgl. z. B. [19,40]) und daher zu einem Nullresultat führen muss. Dieser Effekt wird zunächst auf einfache Weise qualitativ dargestellt, anschließend wird er allgemein abgeleitet. Außerdem wird in diesem Kapitel das bekannte Zwillingssparadoxon betrachtet, dass sich als Sonderfall des Uhrentransports darstellen lässt.

### 5.1 Uhrentransport in Bewegungsrichtung

Es sei zunächst angenommen, dass innerhalb eines Labors die 3 Beobachter A, B und C in gleichem Abstand hintereinander positioniert sind.



Zunächst wird der Fall betrachtet, dass sich diese zueinander in Ruhe befinden. Beobachter B sendet nun synchronisierte Uhren an A und C aus. Beim Eintreffen der Uhren bei A und C wird festgestellt, dass diese - abhängig von der Geschwindigkeit - aufgrund der Zeitdilatation einen geringeren Zeitablauf als die in Ruhe befindlichen Uhren anzeigen. Außerdem stellen A und C mit dort vorhandenen vorab synchronisierten Uhren fest, dass die bewegten Beobachter bei ihnen jeweils zur gleichen Zeit eintreffen.

## 5. Uhrentransport

Es sei nun angenommen, dass dieses Labor beschleunigt wird und sich danach mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Dann werden die vorhandenen Uhren synchronisiert. Falls nun ein Uhrentransport einen messbaren Effekt innerhalb dieses bewegten Systems bewirken sollte, so muss sich das auf eine (oder beide) der im Folgenden dargestellten Arten nachweisen lassen:

1. Beobachter A und C stellen zeitliche Unterschiede beim Eintreffen der von B ausgehenden bewegten Beobachter im Vergleich zu einem ruhenden System fest.
2. Die bewegten Beobachter selbst stellen Unterschiede im Zeitablauf beim Eintreffen bei A bzw. C im Vergleich zu einem ruhenden System fest.

Es soll im Folgenden gezeigt werden, dass innerhalb eines ruhenden und eines bewegten Systems die gleichen Ergebnisse erzielt werden. Dieser vereinfachende Ansatz kann erweitert werden auf die Aussage, dass sie beliebige bewegte Systeme und darüber hinaus ebenfalls beliebig relativ hierzu bewegte Systeme betrifft. Dies ist möglich, da es sich hier um unbeeinflusste, nicht beschleunigte Systeme handelt. Damit ist die Aussage allgemeingültig.

### 5.1.1 Qualitative Betrachtung

In Abb. 5.1 ist die Situation dargestellt, dass bei einem ruhenden und einem bewegten Labor zum Zeitpunkt 0 ausgehend von einem Punkt B ein Lichtsignal in beide Richtungen ausgesendet wird.

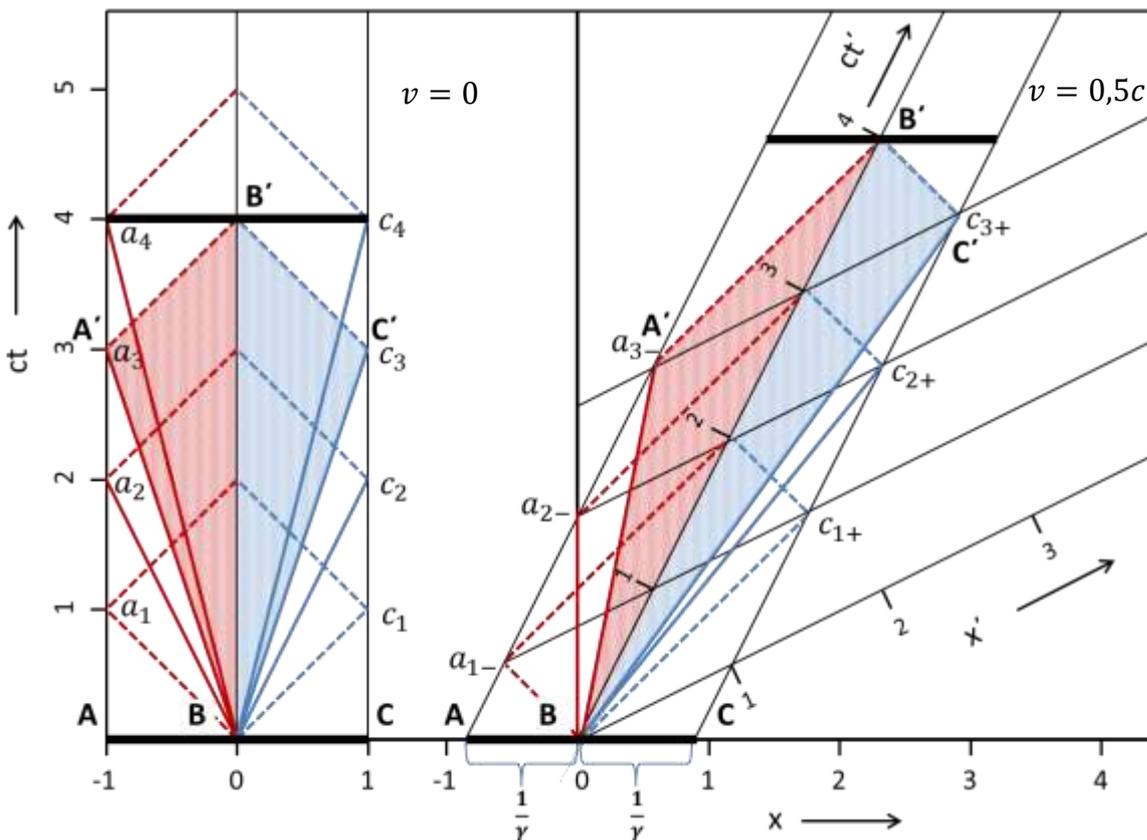


Abb. 5.1: Weg-Zeit-Diagramm für einen Uhrentransport

## 5.1 Uhrentransport in Bewegungsrichtung

Das Signal trifft am Punkt  $c_1$  und  $a_1$  das vordere (C) bzw. hintere Ende (A) des Labors. Dieses Diagramm wird ergänzt durch die Darstellung von bewegten Körpern mit Uhren, die ebenfalls von diesem Punkt ausgesandt werden.

Zunächst sei das ruhende Labor betrachtet (linke Seite des Diagramms). Startet die Uhr zum Zeitpunkt 0 mit einer Geschwindigkeit von  $1/2c$  so trifft sie nach 2 Zeiteinheiten an den Punkten  $c_2$  sowie  $a_2$  ein, bei  $1/4c$  nach 4 Zeiteinheiten an den Punkten  $c_4$  sowie  $a_4$  usw. Auf diese Weise lassen sich abhängig von der Geschwindigkeit alle denkbaren Zeitpunkte einstellen.

Betrachtet man dagegen ein bewegtes System (rechte Seite) so ergeben sich für einen ruhenden Beobachter eine Reihe von Unterschieden, z. B. Abweichungen in den Zeiten zum Erreichen von  $c_n$  und  $a_n$ , die Länge 1 wird zu  $1/\gamma$  usw. Diese sind gemäß der Lorentz-Transformation zu erwarten.

Im Folgenden sei am Beispiel des im Diagramm mit den gefüllten Feldern dargestellten Falls die Situation für die bewegten Beobachter untersucht (blau: in Bewegungsrichtung, rot: in Gegenrichtung). Es gilt hier im Ruhezustand

$$v = \left(0,5 \pm \frac{1}{3}\right) \cdot c \quad (5.01)$$

und damit für die bewegten Beobachter

$$v_{c3+} = \frac{0,5 + 0,3}{1 + 0,5 \cdot 0,3} c = 0,714c \quad (5.02)$$

$$v_{a3-} = \frac{0,5 - 0,3}{1 - 0,5 \cdot 0,3} c = 0,2c \quad (5.03)$$

Zur Vereinfachung der Rechnungen wird folgende Konvention eingeführt: Die Werte für Zeit, Weg und die Lichtgeschwindigkeit  $c$  werden auf 1 normiert, die Werte der Geschwindigkeiten  $v$  ergeben sich damit dimensionslos als Bruchteile von  $c$ .

Es folgt für die Ankunftszeit sowie für die jeweilige Konstante  $\gamma$

$$\begin{aligned} t_{c3+} &= 4,041 & \gamma_{c3+} &= 1,429 \\ t_{a3-} &= 2,887 & \gamma_{a3-} &= 1,021 \end{aligned} \quad (5.04)$$

Für die subjektiv abgelaufene Zeit der Beobachter gilt

$$\text{bewegtes System: } \frac{t_{c3+}}{\gamma_{c3+}} = \frac{t_{a3-}}{\gamma_{a3-}} = 2,828 \quad (5.05)$$

Dieser Wert ist identisch mit den Ergebnissen im nicht bewegten System, da

$$t_{c3} = t_{a3} = 3 \quad \gamma_{c3} = \gamma_{a3} = 1,061 \quad (5.06)$$

gilt und sich somit der gleiche Wert ergibt.

$$\text{nicht bewegtes System: } \frac{t_{c3}}{\gamma_{c3}} = \frac{t_{a3}}{\gamma_{a3}} = 2,828 \quad (5.07)$$

## 5. Uhrentransport

Aus den Ableitungen folgt, dass in diesem Fall die subjektiv gemessene Zeit der bewegten Beobachter in allen Fällen identisch ist. Außerdem ist aus der Diagrammdarstellung abzulesen, dass die von den Beobachtern A und C gemessene Zeit des Eintreffens der bewegten Beobachter in ihren synchronisierten Systemen ebenfalls gleich sein muss. Es ist also nicht möglich, innerhalb eines gleichförmig bewegten Systems durch Bewegung von Beobachtern mit Uhren Rückschlüsse auf die zugrundeliegende Geschwindigkeit zu ziehen oder Abweichungen in der Synchronisation der verwendeten Uhren zu finden.

### 5.1.2 Allgemeine Ableitung

Im Folgenden wird dieser Sachverhalt allgemein bewiesen. Dazu werden zunächst die folgenden Größen definiert:

Ruhendes System	Bewegtes System	
-	$v_0$	Geschwindigkeit des bewegten Systems
$\Delta v$	$v_+, v_-$	Reisegeschwindigkeiten der bewegten Beobachter
-	$\Delta t_A, \Delta t_C$	Synchronisationsdifferenz zum unbewegten System
$t_0$	$t_+, t_-$	Ankunftszeiten der bewegten Beobachter
$t'_0$	$t'_+, t'_-$	Subjektive Reisezeit der bewegten Beobachter
$\gamma_\Delta$	$\gamma_+, \gamma_-$	Lorentz-Faktor für die bewegten Beobachter

Diese sind in einem modifizierten Minkowski-Diagramm dargestellt (vgl. Abb. 5.2). Der Versuchsablauf ist wie folgt:

Vom Mittelpunkt B eines ruhenden Labors werden Signale an die Endpunkte A und C geschickt und erreichen diese zum Zeitpunkt  $t'$  (linke Seite des Diagramms, Punkte gekennzeichnet mit  $A'$  und  $C'$ ). Gleichzeitig starten 2 synchronisierte Uhren von B mit einer beliebigen, aber für beide Versuchsteilnehmer gleichen Geschwindigkeit  $\Delta v$ . Diese erreichen die Endpunkte nach der Zeit  $t''$  (Position  $A''$  und  $C''$ ); daraufhin wird unmittelbar ein Signal an den Punkt B zurückgesandt. Im rechten Teildiagramm ist die Situation für einen bewegten Beobachter dargestellt. Der Verlauf in Bewegungsrichtung und entgegengesetzt dazu unterscheiden sich entsprechend den bekannten Forderungen der Lorentz Transformation.

Es soll im Folgenden gezeigt werden, dass die beteiligten Beobachter keine Unterschiede bezüglich der gemessenen Zeiten feststellen können. Dabei handelt es sich um zwei unterschiedliche Beobachtungen:

1. Die bewegten Beobachter können aufgrund ihrer Messungen nicht unterscheiden, ob das System bewegt ist oder sich in Ruhe befindet.
2. Die ruhenden Beobachter messen ebenfalls – unabhängig von der Systemgeschwindigkeit – die gleichen Zeiten für das Eintreffen der bewegten Versuchsteilnehmer.

## 5.1 Uhrentransport in Bewegungsrichtung

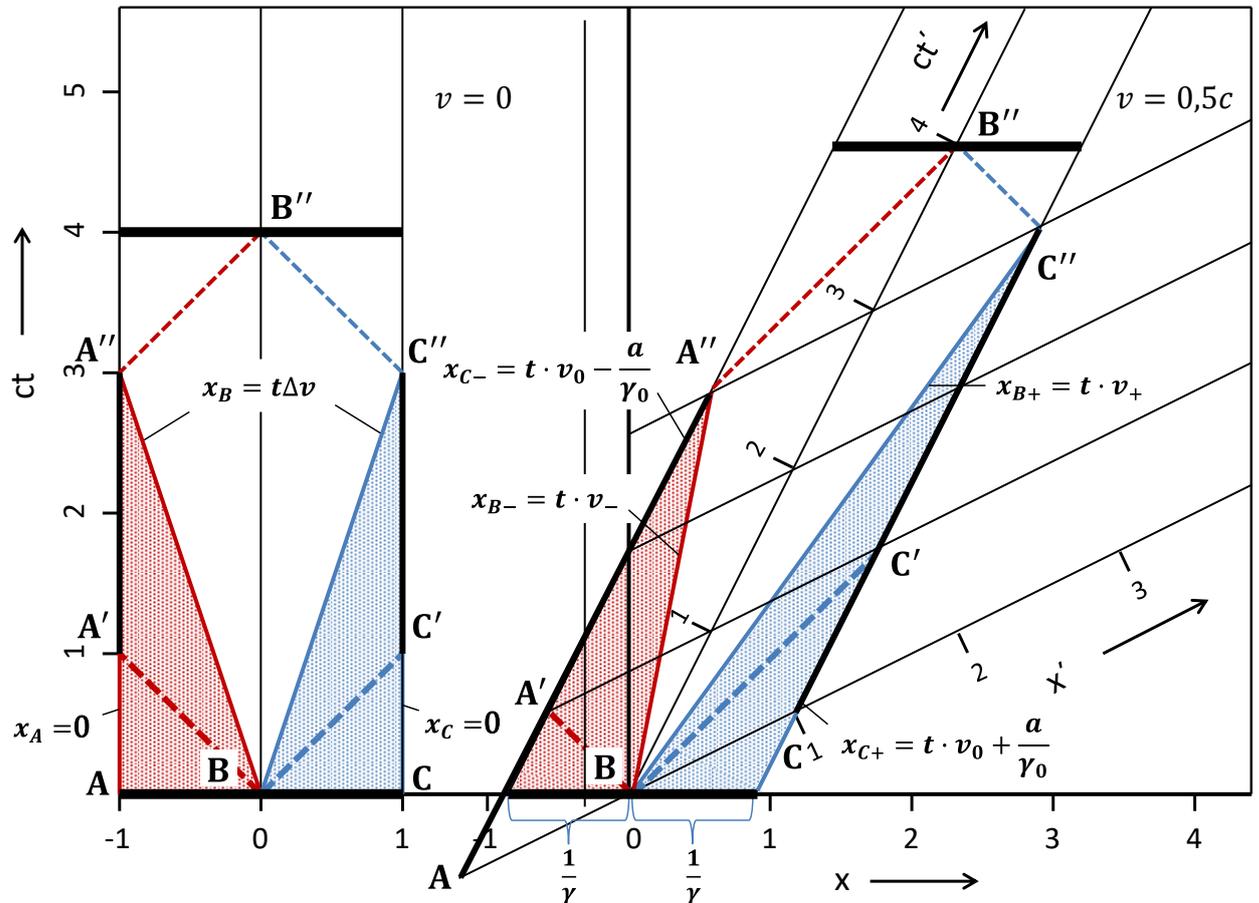


Abb. 5.2: Weg-Zeit-Diagramm für Uhrentransport mit den definierten Größen  
Gestrichelte Linien: Signalaustausch

Es werden nun getrennt die einzelnen Fälle betrachtet.

### 5.1.3 Identische Zeiten beim Eintreffen der bewegten Beobachter

An dieser Stelle soll folgendes untersucht werden:

- Die Synchronisationsdifferenzen im bewegten System  $\Delta t_A$  und  $\Delta t_C$  für die Beobachter A und C gegenüber B
- Die Zeiten  $t_-$  und  $t_+$  die die bewegten Beobachter von B bis zum Erreichen der Punkte A und C benötigen
- Die Differenz zwischen den beiden Werten. Wenn diese (multipliziert mit  $\gamma_0$ ) den Werten des unbewegten Systems entsprechen, so sind die Messergebnisse für die bewegten und unbewegten Beobachter nicht unterscheidbar.

#### a) Synchronisationsdifferenzen

Zur Bestimmung der Synchronisationsdifferenzen wird zunächst die Zeit bestimmt, die ein lichtschnelles Signal von B zum Erreichen der Punkte A' bzw. C' benötigt. Diese ist

$$\Delta t_{B \rightarrow A'} = \frac{a}{c\gamma_0(1 + \frac{v_0}{c})} \quad (5.08)$$

## 5. Uhrentransport

$$\Delta t_{B \rightarrow C'} = \frac{a}{c\gamma_0(1 - \frac{v_0}{c})} \quad (5.09)$$

Davon wird jeweils der Wert abgezogen, der zum Erreichen des Ausgangspunkts erforderlich ist

$$\Delta t_{A' \rightarrow A} = \Delta t_{C' \rightarrow C} = \frac{a}{c}\gamma_0 \quad (5.10)$$

Die Synchronisation der Systeme führt also zu Werten von

$$\Delta t_A = \frac{a}{c\gamma_0(1 + \frac{v_0}{c})} - \frac{a}{c}\gamma_0 = -\frac{\gamma_0 a v}{c^2} \quad (5.11)$$

und

$$\Delta t_C = \frac{a}{c\gamma_0(1 - \frac{v_0}{c})} - \frac{a}{c}\gamma_0 = \frac{\gamma_0 a v}{c^2} \quad (5.12)$$

### b) Zeit für die bewegten Beobachter

Die Zeit, die ein bewegter Beobachter bis zum Erreichen der Punkte A' bzw. C' benötigt, ist im unbewegten System

$$t_0 = \frac{a}{\Delta v} \quad (5.13)$$

Um dies im bewegten System zu bestimmen, werden die Werte von  $x_{B+}$  und  $x_{C+}$  (mit  $t \rightarrow t_+$ ) sowie  $x_{B-}$  und  $x_{C-}$  (mit  $t \rightarrow t_-$ ) gleichgesetzt und es ergibt sich (vgl. Abb. 5.2)

$$t_+ = \frac{a}{\gamma_0(v_+ - v_0)} \quad (5.14)$$

$$t_- = \frac{a}{\gamma_0(v_0 - v_-)} \quad (5.15)$$

### c) Differenzbetrachtung

Im Folgenden wird die Differenz zwischen  $\Delta t_A$  und  $t_-$  bzw.  $\Delta t_C$  und  $t_+$  betrachtet. Im unbewegten System ist dieser Wert

$$\Delta t_{A \rightarrow A''} = \Delta t_{C \rightarrow C''} = \frac{a}{\Delta v} \quad (5.16)$$

Im bewegten System ist dies entsprechend

$$\Delta t_{A \rightarrow A''} = \Delta t_{C \rightarrow C''} = \gamma_0 \frac{a}{\Delta v} \quad (5.17)$$

Wenn also

$$t_- = \Delta t_A + \Delta t_{A \rightarrow A''} \quad (5.18)$$

mit

$$\frac{a}{\gamma_0(v_0 - v_-)} = \frac{a}{c\gamma_0(1 + \frac{v_0}{c})} - \frac{a}{c}\gamma_0 + \gamma_0 \frac{a}{\Delta v} \quad (5.19)$$

sowie

$$t_+ = \Delta t_C + \Delta t_{C \rightarrow C''} \quad (5.20)$$

mit

### 5.1 Uhrentransport in Bewegungsrichtung

$$\frac{a}{\gamma_0(v_+ - v_0)} = \frac{a}{c\gamma_0(1 - \frac{v_0}{c})} - \frac{a}{c}\gamma_0 + \gamma_0 \frac{a}{\Delta v} \quad (5.21)$$

gelten, sind keine Unterschiede im System feststellbar.

Zur Vereinfachung der Rechnung werden die Gleichungen mit  $c/a$  multipliziert und die absoluten Werte der Geschwindigkeiten werden durch ihr Verhältnis zu  $c$  ersetzt, d. h.

$$v'_+ = \frac{v_+}{c} \quad v'_- = \frac{v_-}{c} \quad v'_0 = \frac{v_0}{c} \quad \Delta v' = \frac{\Delta v}{c} \quad (5.22)$$

Somit erhält die Gleichung 5.19 die Form

$$\frac{1}{\gamma_0(v'_0 - v'_-)} = \frac{1}{\gamma_0(1 + v'_0)} - \gamma_0 + \frac{\gamma_0}{\Delta v'} \quad (5.23)$$

und aus Gl. 5.21 wird

$$\frac{1}{\gamma_0(v'_+ - v'_0)} = \frac{1}{\gamma_0(1 - v'_0)} - \gamma_0 + \frac{\gamma_0}{\Delta v'} \quad (5.24)$$

Werden die Werte für

$$\gamma_0^2 = \frac{1}{1 - v_0'^2} \quad (5.25)$$

eingesetzt so entsteht nach einfacher Umformung aus Gl. 5.23

$$(1 + v'_-)(1 - v'_0) = -v'_0 + \frac{v'_0}{\Delta v'} + v'_- - \frac{v'_-}{\Delta v'} \quad (5.26)$$

und

$$v'_- = \frac{v'_0 - \Delta v'}{1 - v'_0 \cdot \Delta v'} \quad (5.27)$$

sowie aus Gl. 5.24

$$(1 - v'_+)(1 + v'_0) = -v'_+ + \frac{v'_+}{\Delta v'} + v'_0 - \frac{v'_0}{\Delta v'} \quad (5.28)$$

und

$$v'_+ = \frac{v'_0 + \Delta v'}{1 + v'_0 \cdot \Delta v'} \quad (5.29)$$

Diese Darstellungen entsprechen exakt der Definition von  $v'_-$  und  $v'_+$ . Damit ist gezeigt, dass innerhalb der Systeme die Beobachter A und C keine Unterschiede für das Eintreffen eines bewegten Beobachters feststellen können. Die subjektiven Zeiten sind also unabhängig davon, ob sich das System in Ruhe befindet oder sich bewegt.

#### 5.1.4 Identischer Zeitverlauf beim Eintreffen der bewegten Beobachter

Die Zeit, die ein bewegter Beobachter bis zum Erreichen der Punkte A bzw. C benötigt, ist im unbewegten System

$$t_0 = \frac{a}{\Delta v} \quad (5.30)$$

und im bewegten System

$$t_+ = \frac{a}{\gamma_0(v_+ - v_0)} \quad (5.31)$$

## 5. Uhrentransport

$$t_- = \frac{a}{\gamma_0(v_0 - v_-)} \quad (5.32)$$

Die vom bewegten Beobachter subjektiv gemessene Zeit ist dann

$$t'_0 = \frac{a}{\gamma_\Delta \Delta v} \quad (5.33)$$

$$t'_+ = \frac{a}{\gamma_+ \gamma_0 (v_+ - v_0)} \quad (5.34)$$

$$t'_- = \frac{a}{\gamma_- \gamma_0 (v_0 - v_-)} \quad (5.35)$$

Sind die subjektiv gemessenen Zeiten identisch so muss gelten

$$t'_0 = t'_+ = t'_- \quad (5.36)$$

Zunächst wird dies für den Fall  $t'_0 = t'_+$  gezeigt. Es soll also gelten

$$\frac{a}{\gamma_+ \gamma_0 (v_+ - v_0)} = \frac{a}{\gamma_\Delta \Delta v} \quad (5.37)$$

Dies führt zu

$$\frac{\gamma_\Delta}{\gamma_+ \gamma_0} = \frac{(v_+ - v_0)}{\Delta v} \quad (5.38)$$

Zur Vereinfachung der Rechnung werden an dieser Stelle wieder die absoluten Werte der Geschwindigkeiten durch ihr Verhältnis zu  $c$  ersetzt, d. h.

$$v'_+ = \frac{v_+}{c} \quad v'_- = \frac{v_-}{c} \quad v'_0 = \frac{v_0}{c} \quad \Delta v' = \frac{\Delta v}{c} \quad (5.39)$$

Werden nun die jeweiligen Beziehungen der Werte für  $\gamma$  eingesetzt, so folgt

$$\frac{(1 - v'^2_+)(1 - v'^2_0)}{1 - \Delta v'^2} = \frac{(v'_+ - v'_0)^2}{\Delta v'^2} \quad (5.40)$$

mit

$$(1 - v'_+ v'_0)^2 \Delta v'^2 = (v'_+ - v'_0)^2 \quad (5.41)$$

Wird für  $v_+$  die Beziehung

$$v'_+ = \frac{v'_0 + \Delta v'}{1 + v'_0 \cdot \Delta v'} \quad (5.42)$$

eingesetzt, so folgt

$$\left(1 - \frac{v'_0 + \Delta v'}{1 + v'_0 \cdot \Delta v'} v'_0\right)^2 \Delta v'^2 = \left(\frac{v'_0 + \Delta v'}{1 + v'_0 \cdot \Delta v'} - v'_0\right)^2 \quad (5.43)$$

Wird diese Gleichung vollständig ausmultipliziert so ergeben sich insgesamt 20 Terme, die sich gegenseitig aufheben. Dasselbe Schema kann auch analog auf  $t'_0 = t'_-$  angewendet werden. Mit

$$\frac{\gamma_\Delta}{\gamma_- \gamma_0} = \frac{(v'_0 - v'_-)}{\Delta v'} \quad (5.44)$$

und

$$v_- = \frac{v'_0 - \Delta v'}{1 - v'_0 \cdot \Delta v'} \quad (5.45)$$

## 5.2 Zwillingsparadoxon

ergibt sich das gleiche Ergebnis. Damit ist gezeigt, dass die subjektiv gemessenen Zeiten der bewegten Beobachter sich nicht unterscheiden.

Insgesamt ist damit allgemein bewiesen, dass es innerhalb eines bewegten Systems keine Möglichkeit gibt, über einen „langsamen Uhrentransport“ Abweichungen an synchronisierten Uhren gegenüber einem ruhenden Referenzsystem festzustellen.

### 5.2 Zwillingsparadoxon

Eines der bekanntesten Beispiele innerhalb der speziellen Relativitätstheorie ist das Zwillingsparadoxon. Dieses Thema hat in der Literatur eine lange Historie (vgl. z. B. Darstellung in [41]). Hierbei wird ein Zwillingpaar betrachtet, bei dem sich eine Person in Ruhe befindet (in dem sie auf der Erde verbleibt), die andere aber mit einem schnellen Raumschiff davon wegbewegt und dann wieder zurückkehrt. Dieser Zwilling ist dann weniger gealtert als der auf der Erde verbliebene. Das Paradoxon ergibt sich deswegen, weil gemäß der Relativitätstheorie beide als gleichwertig betrachtet werden müssten und hierdurch der reisende Zwilling den auf der Erde ruhenden als weniger gealtert auffinden müsste.

Eine Auflösung der Widersprüche ergibt sich deshalb, weil der Zwilling im Raumschiff auf seiner Reise das Inertialsystem wechselt.

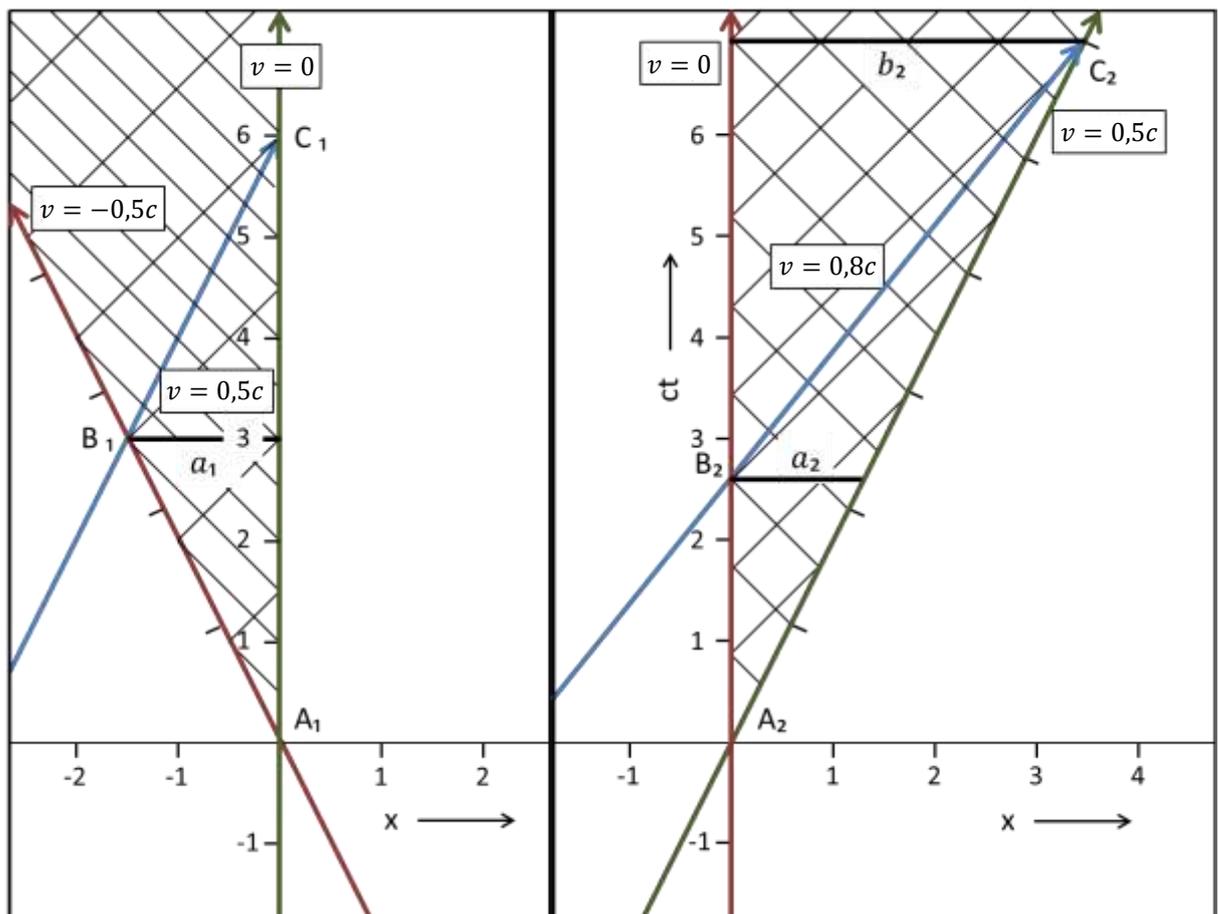


Abb. 5.3: Darstellung des Zwillingsparadoxons  
 Links: Beobachter A ruhend, B bewegt  
 Rechts: Beobachter A bewegt, B (zunächst) ruhend

## 5. Uhrentransport

In Abb. 5.3 ist dieser Fall auf der linken Seite dargestellt. Auf der rechten Seite wird der Fall betrachtet, dass die Beobachter die Perspektive tauschen und der zunächst ruhende als bewegt und der bewegte als ruhend betrachtet wird. Hierbei wird, um Einflüsse durch das Umsteigen zu vermeiden, der Versuchsaufbau so gewählt, dass es drei Versuchsteilnehmer (in der Abb. 5.3 mit den Farben grün, rot und blau gekennzeichnet) mit jeweils einer gleichwertigen Uhr gibt [41]. An den Punkten  $A_1$  und  $B_1$  sowie  $A_2$  und  $B_2$  werden dann die Uhren synchronisiert und am Ende die Ergebnisse abgelesen. In dieser Darstellung erhält das Problem den gleichen Status wie das bereits diskutierte Thema zum langsamen Uhrentransport.

Wenn die Zustände als gleichwertig zu betrachten sind, müssen die Messergebnisse in beiden Systemen für alle Beobachter subjektiv identisch sein. Dies soll im Folgenden gezeigt werden. Dabei handelt es sich um die Gesamtzeit vom Start bis zur Rückkehr sowie um die Zeiten für die bewegten Beobachter, die jeweils bis zu den Umkehrpunkten und von da bis zum Endpunkt gleich sein müssen. Dabei wird die Gesamtzeit für den ruhenden Beobachter im linken Bild als  $t_0$  festgelegt. Die Definition der anderen Größen ist in nachfolgender Tabelle aufgeführt.

Ruhendes System	Bewegtes System	
$t_T$	$t'_T$	Gesamtzeit von Start (A) bis Rückkehr (C)
$t_1$	$t'_1$	Zeit für ersten Reiseabschnitt (A→B)
$t_2$	$t'_2$	Zeit für zweiten Reiseabschnitt (B→C)
-	$v'_1$	Geschwindigkeit für $A_1 \rightarrow B_1$ , $B_1 \rightarrow C_1$ , $A_2 \rightarrow C_2$
-	$v'_2$	Geschwindigkeit für $B_2 \rightarrow C_2$
-	$\gamma_1$	Lorentzfaktor für $v'_1$
-	$\gamma_2$	Lorentzfaktor für $v'_2$

Anmerkung: Die Geschwindigkeiten werden hier grundsätzlich in ihrem Verhältnis zur Lichtgeschwindigkeit angegeben, d. h.

$$v'_1 = \frac{v_1}{c} \quad v'_2 = \frac{v_2}{c} \quad (5.50)$$

### a) Gesamtzeiten

links: Die Gesamtzeit  $t_T$  ist definitionsgemäß

$$t_T = t_0 \quad (5.51)$$

und für  $t'_T$  ergibt sich

$$t'_T = t_1 + t_2 = \frac{t_0}{\gamma_1} \quad (5.52)$$

## 5.2 Zwillingsparadoxon

wobei in diesem Fall aus Symmetriegründen offensichtlich gilt

$$t'_1 = t'_2 = \frac{t'_T}{2} = \frac{t_0}{2\gamma_1} \quad (5.53)$$

rechts: Da die subjektiven Zeiten für  $t_1$  in beiden Fällen gleich sein müssen gilt hier

$$t_1 = \frac{t_0}{2\gamma_1} \quad (5.54)$$

Die Zeit  $t_2$  lässt sich über Beziehungen zu  $b_2$  bestimmen (vgl. Abb. 5.3, rechts), da für  $v'_1$  und  $v'_2$  gilt

$$v'_1(t_1 + t_2) = v'_2 t_2 \quad (5.55)$$

mit

$$t_2 = \frac{v'_1 t_1}{v'_2 - v'_1} \quad (5.56)$$

Außerdem gilt für  $v'_2$  wegen der gleichen Geschwindigkeit auf Hin- und Rückweg im linken Teilbild gemäß Gl. (4.21) für die Geschwindigkeitsaddition

$$v'_2 = \frac{2v'_1}{1 + v'^2_1} \quad (5.57)$$

Hieraus folgt dann

$$t_T = t_1 + t_2 = \frac{t_0}{2\gamma_1} + \frac{v'_1 t_0}{2\gamma_1(v'_2 - v'_1)} = \frac{t_0}{2\gamma_1} \left( 1 + \frac{v'_1}{v'_2 - v'_1} \right) \quad (5.58)$$

Nach Einsetzen von Gl. (5.57) in Gl. (5.58) ergibt sich mit

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{1}{1 - v'^2_1}} \quad (5.59)$$

über

$$t_T = \frac{t_0}{2} \gamma_1 (1 - v'^2_1) \left( 1 + \frac{v'_1}{\frac{2v'_1}{1 + v'^2_1} - v'_1} \right) \quad (5.60)$$

$$t_T = \frac{t_0}{2} \gamma_1 (1 - v'^2_1) \left( 1 + \frac{v'_1(1 + v'^2_1)}{v'_1 - v'^3_1} \right) \quad (5.61)$$

$$t_T = \gamma_1 t_0 \quad (5.62)$$

Wegen

$$t'_T = \frac{t_T}{\gamma_1} \quad (5.63)$$

folgt sofort

$$t'_T = t_0 \quad (5.64)$$

Die subjektiv gemessenen Gesamtzeiten sind also gleich.

## 5. Uhrentransport

### b) Einzelzeiten

Hierzu ist ergänzend die Zeit  $t_2$  zu bestimmen, die für den bewegten Beobachter subjektiv zwischen  $B_2$  und  $C_2$  verstreicht.

Nach Gl. (5.56) und (5.54) gilt in diesem Abschnitt für einen ruhenden Beobachter

$$t_2 = \frac{v'_1 t_0}{2\gamma_1(v'_2 - v'_1)} \quad (5.65)$$

Daraus folgt sofort

$$t'_2 = \frac{v'_1 t_0}{2\gamma_2\gamma_1(v'_2 - v'_1)} \quad (5.66)$$

Sollen die subjektiven Zeiten für linkes und rechtes Schaubild gleich sein so muss also gelten

$$\frac{t_0}{2\gamma_1} = \frac{v'_1 t_0}{2\gamma_2\gamma_1(v'_2 - v'_1)} \quad (5.67)$$

Dies lässt sich leicht zeigen. Zunächst ergibt sich

$$\gamma_2 = \frac{v'_1}{v'_2 - v'_1} \quad (5.68)$$

und unter Verwendung von Gl. (5.57) folgt zunächst

$$\gamma_2 = \frac{1 + v_1'^2}{1 - v_1'^2} \quad (5.69)$$

Wegen

$$\gamma_2 = \sqrt{\frac{1}{1 - v_2'^2}} \quad (5.70)$$

erhält man

$$\frac{1 - v_1'^2}{1 + v_1'^2} = \sqrt{1 - \frac{4v_1'^2}{(1 + v_1'^2)^2}} \quad (5.71)$$

Über

$$1 - v_1'^2 = \sqrt{(1 + v_1'^2)^2 - 4v_1'^2} \quad (5.72)$$

folgt

$$1 - v_1'^2 = \sqrt{1 - 2v_1'^2 + v_1'^4} \quad (5.73)$$

was offensichtlich identisch ist. Hiermit ist also gezeigt, dass die subjektiven Zeiten sowohl für die Gesamtentfernung als auch für Teilbereiche gleich sind. Das „Paradoxon“ führt demnach nicht zu Widersprüchen.

### 5.3 Uhrentransport in beliebigen Raumrichtungen

Betrachtet man den Uhrentransport in beliebigen Raumrichtungen so ist für die Geschwindigkeitsaddition die Beziehung aus Gl. (4.20) zu verwenden.

### 5.3 Uhrentransport in beliebigen Raumrichtungen

$$v_T = \frac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2\cos\alpha - \left(\frac{v_1v_2\sin\alpha}{c}\right)^2}}{1 + \frac{v_1v_2\cos\alpha}{c^2}} \quad (4.20)$$

In einem einfachen Beispiel mit  $\alpha = 90^\circ$  ergibt sich

$$v'_T = \sqrt{v_1'^2 + v_2'^2 - v_1'^2v_2'^2} \quad (5.80)$$

Diese Beziehung lässt sich interpretieren als Variante der Darstellung in Abb. 5.3, nur dass sich hier im linken Schaubild alle Beobachter noch zusätzlich mit einer Geschwindigkeit  $v_2$  bewegen. In diesem Fall muss dann die Zeitverzögerung für den Weg von  $A_1 \rightarrow B_1$  für einen nicht bewegten Beobachter von  $\gamma_1$  auf  $\gamma_1 \cdot \gamma_2$  ansteigen. Daraus lässt sich folgern, dass in diesem Fall die Beziehung

$$\gamma_T = \gamma_1\gamma_2' \quad (5.81)$$

gelten muss. Es ergibt sich sofort

$$\gamma_T = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{ges}^2}} \quad (5.82)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - (v_1'^2 + v_2'^2 - v_1'^2v_2'^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - v_1'^2)(1 - v_2'^2)}} \quad (5.83)$$

was offensichtlich mit Gl. (5.81) identisch ist. Damit ist auch für diesen Fall gezeigt, dass es bei linearen Kombinationen von verschiedenen Bewegungszuständen keine messbaren Unterschiede gibt.

Zusammenfassend wurde gezeigt, dass es generell keine Möglichkeit gibt, innerhalb eines gleichförmig bewegten Systems durch Messungen auf den Bewegungszustand zu schließen. Alle Varianten des Signalaustauschs und des „langsamen Uhrentransports“ führen stets zu einem Nullresultat. Dies kann natürlich keine Überraschung sein, da dies durch die Relativitätstheorie gefordert wird.