

## 4. Weiterführende Betrachtungen für bewegte Beobachter

---

Die bisher diskutierten Zusammenhänge lassen sich von zwei auf mehrere Beobachter erweitern. Hierbei ist zunächst die Geschwindigkeitsaddition zu betrachten, die im relativistischen Fall nicht der einfachen Aufsummierung gemäß der Galilei-Transformation folgt. Außerdem gibt es besondere Zusammenhänge für Ausbreitungsarten unterhalb der Lichtgeschwindigkeit, wie sie z. B. in transparenten Medien und bei der Schallübertragung auftreten. Allgemein gilt dies auch bei der Beschleunigung von Körpern, da diese nicht als absolut starr angesehen werden dürfen.

Des Weiteren wird noch der Fall diskutiert, wenn eine Signalübertragung innerhalb eines bewegten Körpers nicht nur in Längsrichtung, sondern zusätzlich auch quer dazu erfolgt.

### 4.1 Relativistische Geschwindigkeitsaddition

Das Additionstheorem von Geschwindigkeiten im relativistischen Fall wurde bereits im Jahre 1905 von A. Einstein abgeleitet [12]. Hierbei wird die Annahme gemacht, dass sich in einem System  $S'$ , das mit der Geschwindigkeit  $v$  entlang der  $x$ -Achse gegenüber einem Referenzsystem  $S$  ein Körper gemäß den Gleichungen

$$x' = w'_x t' \quad (4.01)$$

$$y' = w'_y t' \quad (4.02)$$

$$z' = 0 \quad (4.03)$$

bewegt, wobei  $w'_x$  und  $w'_y$  die Geschwindigkeitskomponenten in  $x'$  bzw.  $y'$ -Richtung sind. Gesucht wird nun die Bewegung zum Ursprungs-Referenzsystem  $S$ . Das Koordinatensystem wird dabei so gewählt, dass alle Punkte auf der  $x - y$  Ebene liegen und die Koordinate  $z'$  unberücksichtigt bleiben kann.

Die Lorentz-Gleichungen lauten demnach

$$x' = \gamma(x - vt) \quad (4.04)$$

#### 4. Weiterführende Betrachtungen für bewegte Beobachter

$$y' = y \quad (4.05)$$

$$t' = \gamma \left( t - \frac{v}{c^2} x \right) \quad (4.06)$$

##### Verhalten in x-Richtung

Werden Gl. (4.04) und Gl. (4.06) in Gl. (4.01) eingesetzt folgt sofort

$$\gamma(x - vt) = w'_x \cdot \gamma \left( t - \frac{v}{c^2} x \right) \quad (4.07)$$

mit

$$x = \frac{w'_x + v}{1 + \frac{vw'_x}{c^2}} \cdot t \quad (4.08)$$

##### Verhalten in y-Richtung

Zur Ermittlung werden nacheinander die Gleichungen (4.02), (4.06) und (4.08) in Gl. (4.05) eingesetzt

$$y = y' = w'_y \gamma \left( t - \frac{v}{c^2} x \right) \quad (4.09)$$

$$y = w'_y \gamma \left( t - \frac{v}{c^2} \cdot \frac{w'_x + v}{1 + \frac{vw'_x}{c^2}} \cdot t \right) \quad (4.10)$$

und daraus ergibt sich

$$y = w'_y \gamma \frac{1 + \frac{vw'_x}{c^2} - \frac{vw'_x}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}}{1 + \frac{vw'_x}{c^2}} \cdot t \quad (4.11)$$

$$y = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{vw'_x}{c^2}} w'_y t \quad (4.12)$$

Wegen der Linearität der Beziehungen folgt auf einfache Weise aus den Gleichungen (4.08) und (4.12) die Abhängigkeit für die Geschwindigkeiten

$$\frac{dx}{dt} = w_x = \frac{w'_x + v}{1 + \frac{vw'_x}{c^2}} \quad (4.13)$$

$$\frac{dy}{dt} = w_y = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{vw'_x}{c^2}} w'_y \quad (4.14)$$

In einem abschließenden Schritt werden die Winkel der Komponenten in Bezug auf die x-Achse eingesetzt:

#### 4.1 Relativistische Geschwindigkeitsaddition

$$w'_x = w \cdot \cos \alpha \quad (4.15)$$

$$w'_y = w \cdot \sin \alpha \quad (4.16)$$

und über die Beziehung

$$v_T = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} \quad (4.17)$$

vektoriell addiert. Es ergibt sich

$$v_T = \sqrt{\left( \frac{w \cos \alpha + v}{1 + \frac{v w \cos \alpha}{c^2}} \right)^2 + \left( \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} w \sin \alpha}{1 + \frac{v w \cos \alpha}{c^2}} \right)^2} \quad (4.18)$$

für die Gesamtgeschwindigkeit  $v_T$  im System  $S$  und nach Umformung unter Nutzung der Beziehung

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \quad (4.19)$$

folgt das Endergebnis

$$v_T = \frac{\sqrt{v^2 + w^2 + 2 v w \cos \alpha - \left( \frac{v w \sin \alpha}{c} \right)^2}}{1 + \frac{v w \cos \alpha}{c^2}} \quad (4.20)$$

Liegen die Geschwindigkeiten  $v$  und  $w$  in einer Richtung, d. h. Winkel  $\alpha = 0$ , dann vereinfacht sich Gl. (4.20) zu

$$v_T = \frac{v + w}{1 + \frac{v w}{c^2}} \quad (4.21)$$

Wird diese Situation mit ausgesendeten Signalen und deren Empfang grafisch in einem Weg-Zeit-Diagramm dargestellt, so ergibt sich die in Abb. 4.1 abgebildete Situation. Dabei ist auf der linken Seite der Fall wiedergegeben, bei dem sich der Sender in Ruhe befindet. Die Empfänger, die außerdem die Signale unmittelbar reflektieren, bewegen sich jeweils mit gleicher Geschwindigkeit (hier:  $v = w = 0,5c$ ) von diesem fort. Auf der rechten Seite wird dargestellt, wie sich dieser Sachverhalt aus der Sicht eines der zuvor als bewegt angenommenen Versuchsteilnehmers darstellt (hier B). Der Sender entfernt sich in diesem Fall mit gleicher Geschwindigkeit, der dritte Versuchsteilnehmer hat eine Geschwindigkeit gemäß der Gleichung (4.21) von  $v_T = 0,8c$ . Eine vergleichbare Situation ergibt sich, wenn Beobachter C als ruhend angenommen wird.

Zur Verdeutlichung des Sachverhaltes sind für die Zeiten  $t = 1 \text{ ZE}$  und  $t = 2 \text{ ZE}$  die sich ergebenden Verläufe im Weg-Zeit-Diagramm (Abb. 4.1) durch Schattierung gekennzeichnet. In dieser Darstellung ist klar erkennbar, dass aus Sicht des Senders, unabhängig von der Geschwindigkeit eines Beobachters stets die gleichen Messergebnisse ermittelt werden.

#### 4. Weiterführende Betrachtungen für bewegte Beobachter

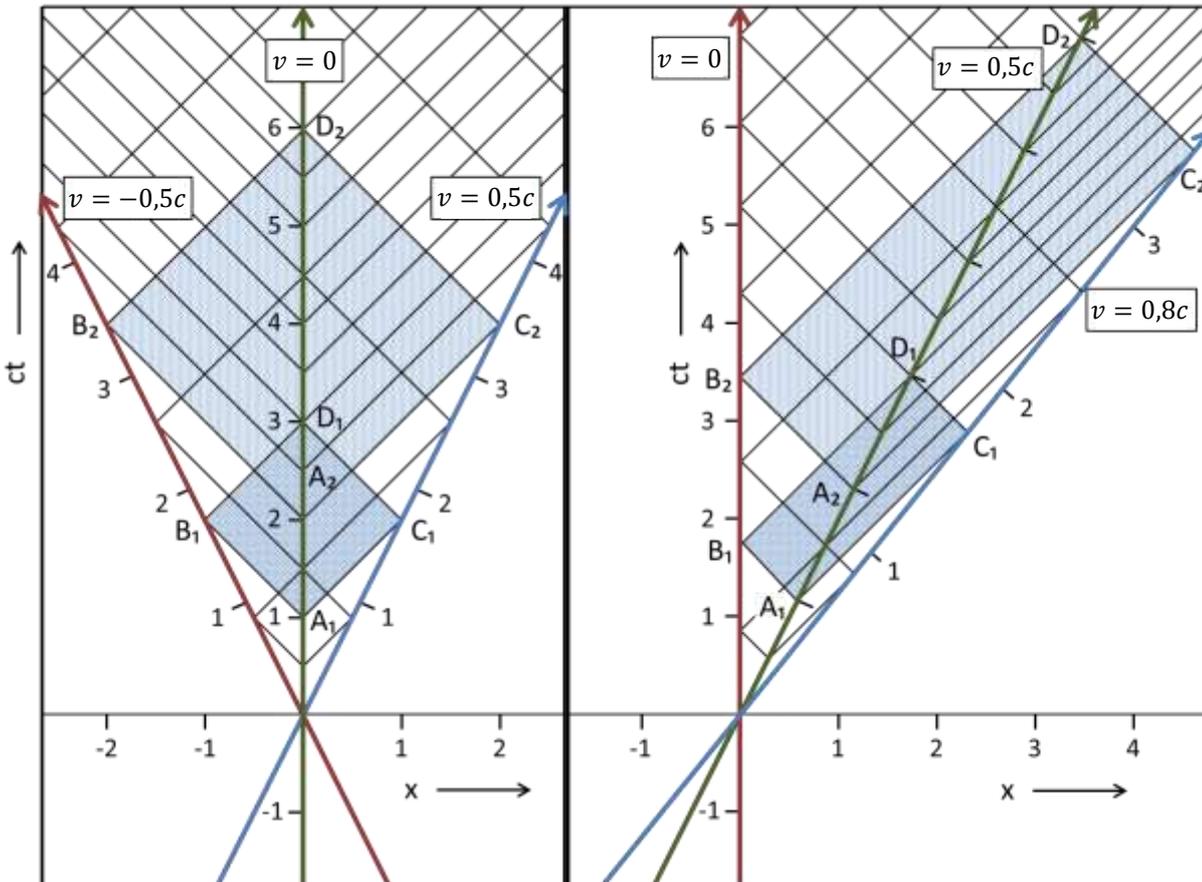


Abb. 4.1: Weg-Zeit-Diagramm für ruhende und bewegte Beobachter

#### 4.2 Experimente mit Licht in transparenten bewegten Medien

Im Folgenden wird zunächst eine weitere Variante des Falls in Kapitel 2.2.2 diskutiert. Hierbei wird statt eines Lichtimpulses ein Körper in und entgegengesetzt zur ursprünglichen Bewegungsrichtung bewegt. Zusammen mit einem Lichtimpuls ergeben sich folgende mögliche Kombinationen:

- A: Lichtimpuls hin und zurück,
- B: Körper bewegt sich hin, Lichtimpuls zurück,
- C: Lichtimpuls hin, Körper bewegt sich zurück,
- D: Körper bewegt sich hin und zurück.

In der Abb. 4.2 sind die sich ergebenden Zusammenhänge für den Fall  $v = 0,5 c$  dargestellt. Wie bereits gezeigt wurde werden Geschwindigkeiten im relativistischen Bereich gemäß Gleichung (4.21) addiert. Für die gewählte Systemgeschwindigkeit von  $v_1 = 0,5 c$  und einer zusätzlichen Geschwindigkeit des Körpers von  $v_2 = 0,5 c$  ergibt sich somit  $v_T = 0,8 c$ .

Es ist bereits an diesem Schaubild qualitativ zu erkennen, dass die Fälle B und C, d. h. die Kombinationen von bewegtem Körper und Lichtimpuls zum gleichen Zeitpunkt enden. Die weiterführenden Auswertungen zeigen, dass dies auch quantitativ gezeigt werden kann.

## 4.2 Experimente mit Licht in transparenten bewegten Medien

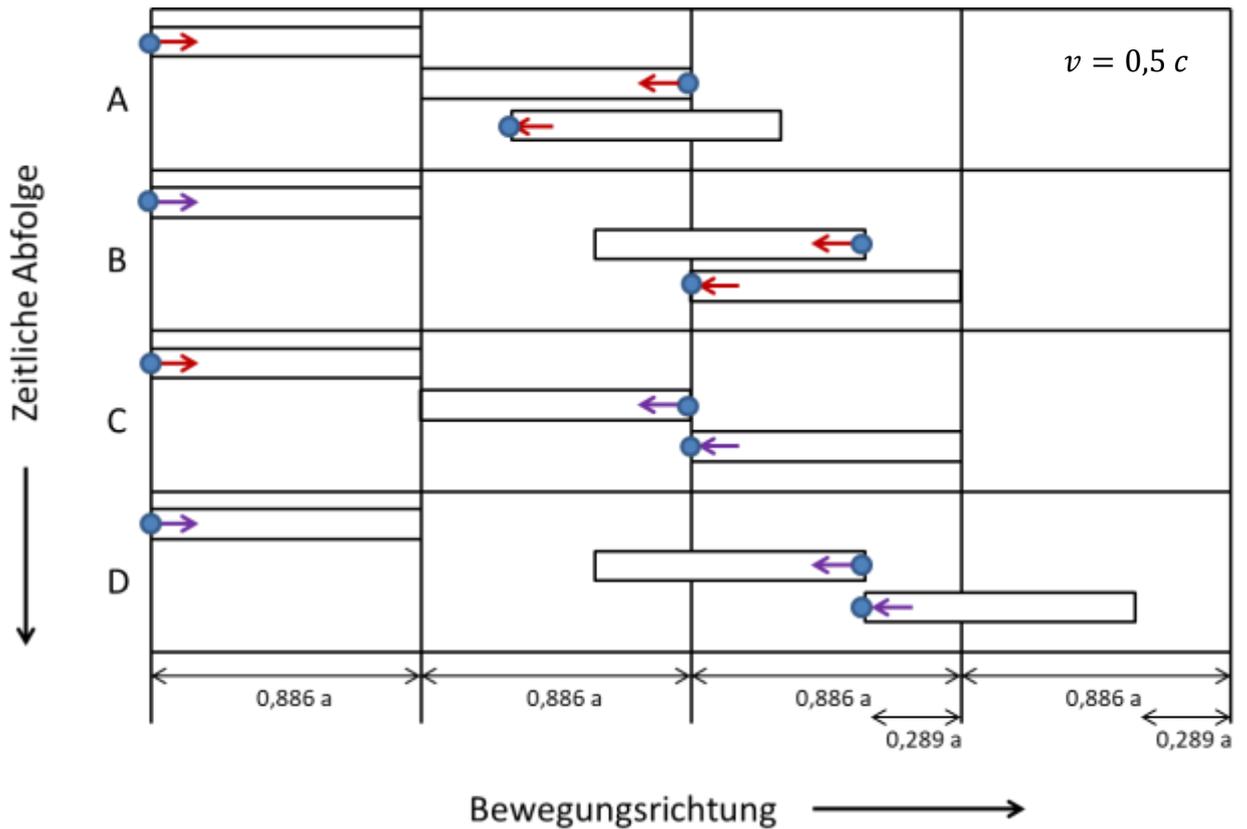


Abb. 4.2: Signalaustausch sowie Körperbewegungen in bewegtem System  
 A: Lichtimpuls hin und zurück,  
 B: Körper bewegt sich hin, Lichtimpuls zurück,  
 C: Lichtimpuls hin, Körper bewegt sich zurück,  
 D: Körper bewegt sich hin und zurück.

Eine Versuchsdurchführung mit bewegten Körpern in Kombination mit dem Austausch von Lichtimpulsen wäre aufgrund der erforderlichen hohen Geschwindigkeiten kaum realisierbar. Eine experimentelle Überprüfung kann jedoch mit optischen Hilfsmitteln durchgeführt werden. Die Lichtgeschwindigkeit in Medien  $c_n$  ist gegeben durch

$$c_n = \frac{c}{n} \quad (4.30)$$

mit  $n$  als Brechungsindex. Von Augustin Jean Fresnel wurde bereits im Jahr 1812 die Hypothese aufgestellt, dass die Lichtgeschwindigkeit in einem bewegten Medium sich gemäß dem später nach ihm benannten Mitführungskoeffizienten verhält. In einem bewegten Lichtleiter beträgt demnach die Lichtgeschwindigkeit gegenüber einem ruhenden Beobachter

$$c_T = \frac{c}{n} + v \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) \quad (4.31)$$

Dieser Sachverhalt wurde dann im Jahr 1851 von H. Fizeau (1819-1896) experimentell bestätigt. Nach der Entwicklung der Lorentz-Transformation konnte gezeigt werden, dass sich die Addition der Geschwindigkeiten eines bewegten Mediums und die darin erfolgende Lichtausbreitung  $c_n$  wie die Addition relativistischer Geschwindigkeiten verhält [36].

#### 4. Weiterführende Betrachtungen für bewegte Beobachter

Diese berechnet sich gemäß Gl. (4.21)

$$v_T = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \quad (4.32)$$

Mit  $v_1 = c_n$  ergibt sich

$$v_T = \frac{\frac{c}{n} + v_2}{1 + \frac{v_2}{nc}} = \frac{c^2 + nc v_2}{nc + v_2} \quad (4.33)$$

Eine Taylorentwicklung nach  $v_2$  ergibt

$$v_T = \frac{c}{n} + v_2 \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) - \frac{v_2^2}{nc} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + \frac{v_2^3}{n^2 c^2} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) - + \dots \quad (4.34)$$

Für Größen erster Ordnung ist diese Gleichung identisch mit der in Gl. (4.31) angegebenen Beziehung.

Eine Berechnung mit den Lorentz-Transformationsgleichungen gemäß der Situation in Abb. 4.2 führt zu dem in Tab. 4.1 dargestellten Ergebnis. In Abb. 4.3 sind diese Daten grafisch zusammengestellt. Wie zu erwarten, liegen alle Werte nach Abschluss der Aktion auf der  $ct'$ -Linie. Es ist darüber hinaus zu erkennen, dass die Transformationsgleichungen die erwarteten Zusammenhänge exakt beschreiben und es zu keinem Widerspruch kommt.

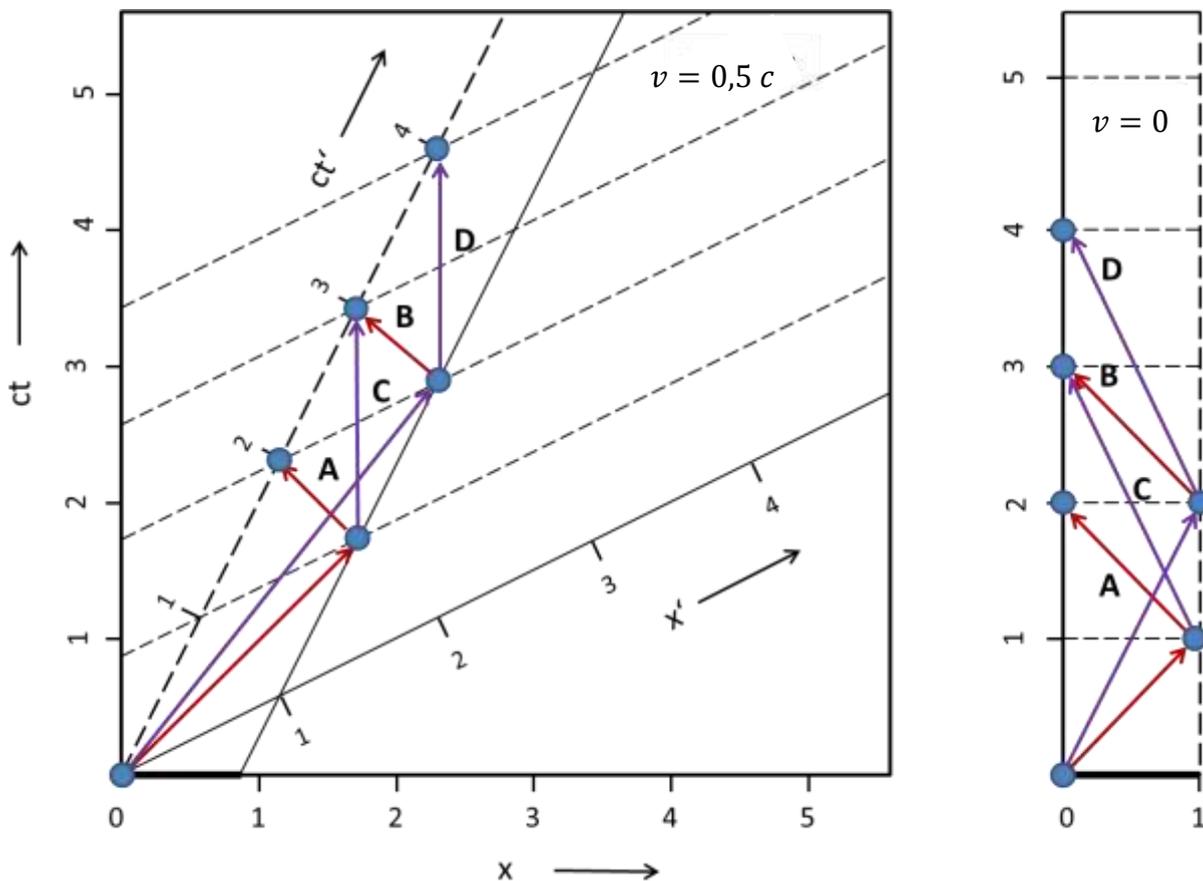


Abb. 4.3: Minkowski-Diagramm für Fälle A, B, C und D gemäß Abb. 4.2. Links: bewegt ( $v = 0,5 c$ ), rechts: unbewegt ( $v = 0$ )

### 4.3 Ansteuerung von Aggregaten nach Synchronisation

Fall	$E_0$	$E'_0$	$E_1$	$E'_1$	$E_2$	$E'_2$
A	[0; 0]	[0; 0]	[1,73; 1,73]	[1; 1]	[1,15; 2,31]	[0; 2]
B	[0; 0]	[0; 0]	[2,31; 2,89]	[1; 2]	[1,73; 3,46]	[0; 3]
C	[0; 0]	[0; 0]	[1,73; 1,73]	[1; 1]	[1,73; 3,46]	[0; 3]
D	[0; 0]	[0; 0]	[2,31; 2,89]	[1; 2]	[2,31; 4,62]	[0; 4]

Tab. 4.1 Berechnete Werte für den in Abb. 4.2 dargestellten Signalaustausch

Die Gültigkeit der Gleichungen Gl. (4.34) bzw. Gl. (4.31) wurde vielfach experimentell überprüft, zunächst von H. Fizeau mit strömendem Wasser und später u. a. von R. V. Jones an rotierenden transparenten Scheiben [37,38]. Der hier dargestellte Effekt gehört heute zu den wichtigen Grundlagen der Optik und auch der Relativitätstheorie.

### 4.3 Ansteuerung von Aggregaten nach Synchronisation

Wie bereits ausführlich dargestellt und mit verschiedenen Beispielen belegt wurde, sind bei rein kinematischer Betrachtung innerhalb eines Systems nach einer „Einstein-Synchronisation“ keine Widersprüche festzustellen. Ähnlich sieht dies aus, wenn die verwendeten Signale nicht nur zum Synchronisieren von Uhren, sondern auch zum Ansteuern von Aggregaten genutzt werden, die auf die Bewegung des Labors Einfluss haben. Hierzu sei die folgende Situation gewählt:

1. Von der Mitte eines Labors werden gleichzeitig Signale in beide Richtungen (A und B) ausgesendet.
2. Bei Empfang des Signals wird über ein Triebwerk unmittelbar eine Beschleunigung quer zur Signalrichtung ausgelöst. Die Beschleunigungsrichtung für A und B liegt in der gleichen Ebene.
3. Die Versuche werden im ruhenden und im bewegten Zustand durchgeführt.

Zunächst ist klar ersichtlich, dass A und B im Ruhezustand (Abb. 4.4, rechtes Bild) gleichzeitig die Triebwerke starten werden. Dies ist für das bewegte System jedoch nicht der Fall. Während der bewegte Beobachter nach einer zuvor durchgeführten Synchronisierung von einer gleichen Startzeit ausgehen muss, wird aus Sicht des ruhenden Beobachters aufgrund der längeren Laufzeit zum Punkt A' als zum Punkt B' das Triebwerk bei B' zuerst starten. Durch die gewählte Beschleunigung quer zur Bewegungsrichtung wird nach dieser Betrachtung ein Moment erzeugt und das Labor müsste sich drehen.

In der Literatur sind derartige Fälle schön häufiger diskutiert worden. Von M. Born wurde als erster hierzu ein ähnlicher Ansatz gemacht und im Rahmen von Überlegungen zur Elektrodynamik angenommen, dass ein zu betrachtender Körper (hier das Labor) unendlich starr sein müsste und es so zu Konflikten kommt [39]. Diese auch als „Born'sche Starrheit“ bezeichnete Voraussetzung kann jedoch nicht als gegeben angesehen werden, da z. B. alle realen Körper endliche Schallgeschwindigkeiten aufweisen. Von A. Sommerfeld wurde dies ausführlich dargestellt [15d].

#### 4. Weiterführende Betrachtungen für bewegte Beobachter

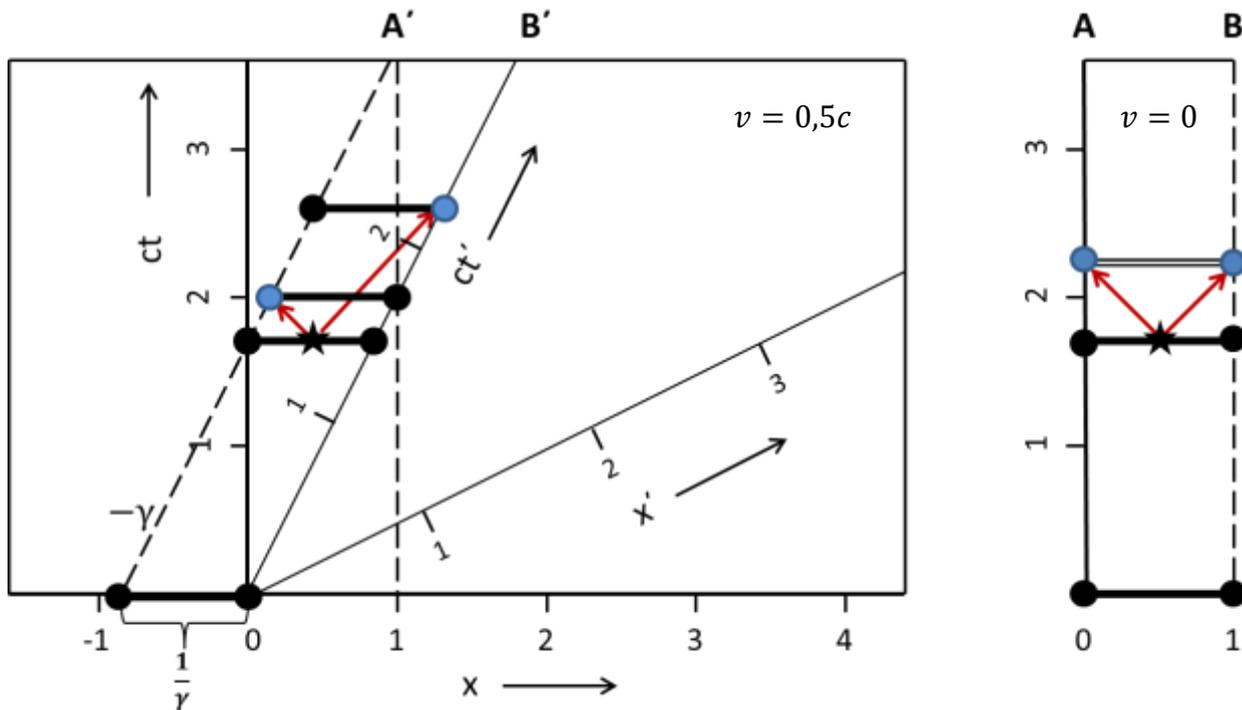


Abb.: 4.4: Signalverlauf zur Ansteuerung eines Triebwerks quer zum eingehenden Signal (hier:  $v = 0,5c$ ). Links bewegtes System, rechts unbewegt

Betrachtet man daher die Ausbreitung der Bewegung in der Form, dass sie mit Schallgeschwindigkeit (oder auch mit einer beliebigen anderen Geschwindigkeit bis hin zu  $c$ ) erfolgt, so ergibt sich durch die Geschwindigkeitsaddition ein vergleichbarer Fall, wie er auch in Kap. 4.2 betrachtet wird. Die quer zur Bewegungsrichtung erfolgenden Bewegungsänderungen kommen gleichzeitig in der Mitte an und es wird daher kein Drehmoment auftreten.

#### 4.4 Signalaustausch zwischen räumlich ausgedehnten Körpern

Bisher wurde der Signalaustausch zwischen Körpern betrachtet, die nur eine Ausdehnung in Bewegungsrichtung aufwiesen. Ein neuer Versuchsaufbau erfolgt vergleichbar zu den in Kap. 2.2.2 dargestellten Bedingungen. Allerdings haben hier die beteiligten Labore keine lineare Ausdehnung, sondern die Form von gleichseitigen Dreiecken.

Die Signale werden somit nicht in Längsrichtung, sondern in einem Winkel von  $60^\circ$  dazu ausgesandt (vgl. Abb. 4.5). Sobald sich die Beobachter der beiden Systeme bei A, B, bzw. A' und B' begegnen, werden von hier Signale an C bzw. C' abgeschickt. C bzw. C' reflektieren die Signale an den jeweiligen Absender und alle Zeiten werden aufgezeichnet. Für einen ruhenden Beobachter ist die Situation des bewegten Systems nach den in Abb. 4.6 gegebenen Zusammenhängen bestimmt. Zunächst ist bedeutsam, dass die Grundlinie des gleichseitigen Dreiecks mit der Länge  $a$  sich durch die Bewegung um den Faktor  $\gamma$  verkürzt, was zu dem Effekt führt, dass es 4 Kontakte zwischen den Ecken der Dreiecke gibt (Abb. 4.6, links). Dabei stellen die gestrichelten Linien die Sichtweise des bewegten Beobachters dar, während der ruhende Beobachter den Signalverlauf entsprechend der Länge  $d$  wahrnimmt (Abb. 4.6, rechts).

#### 4.4 Signalaustausch zwischen räumlich ausgedehnten Körpern

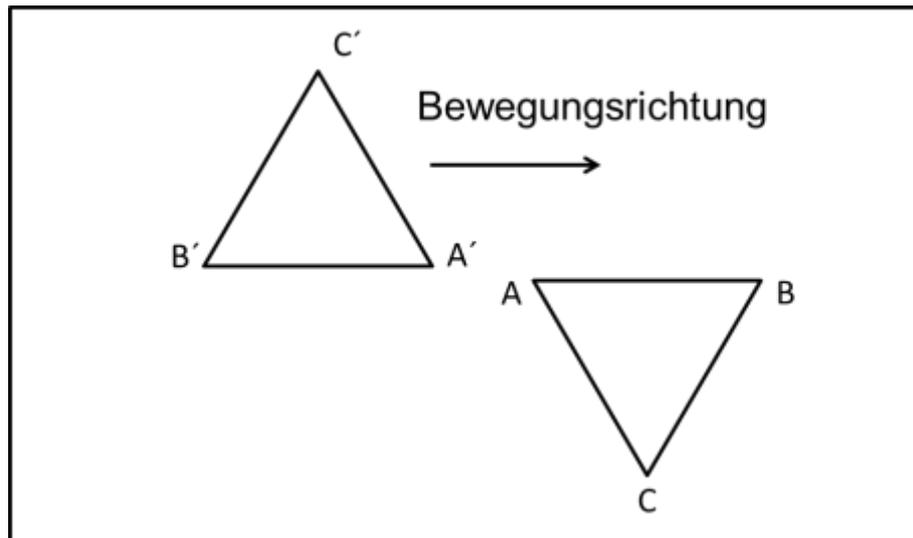


Abb. 4.5: Aufbau für Versuche mit räumlich ausgedehnten Körpern

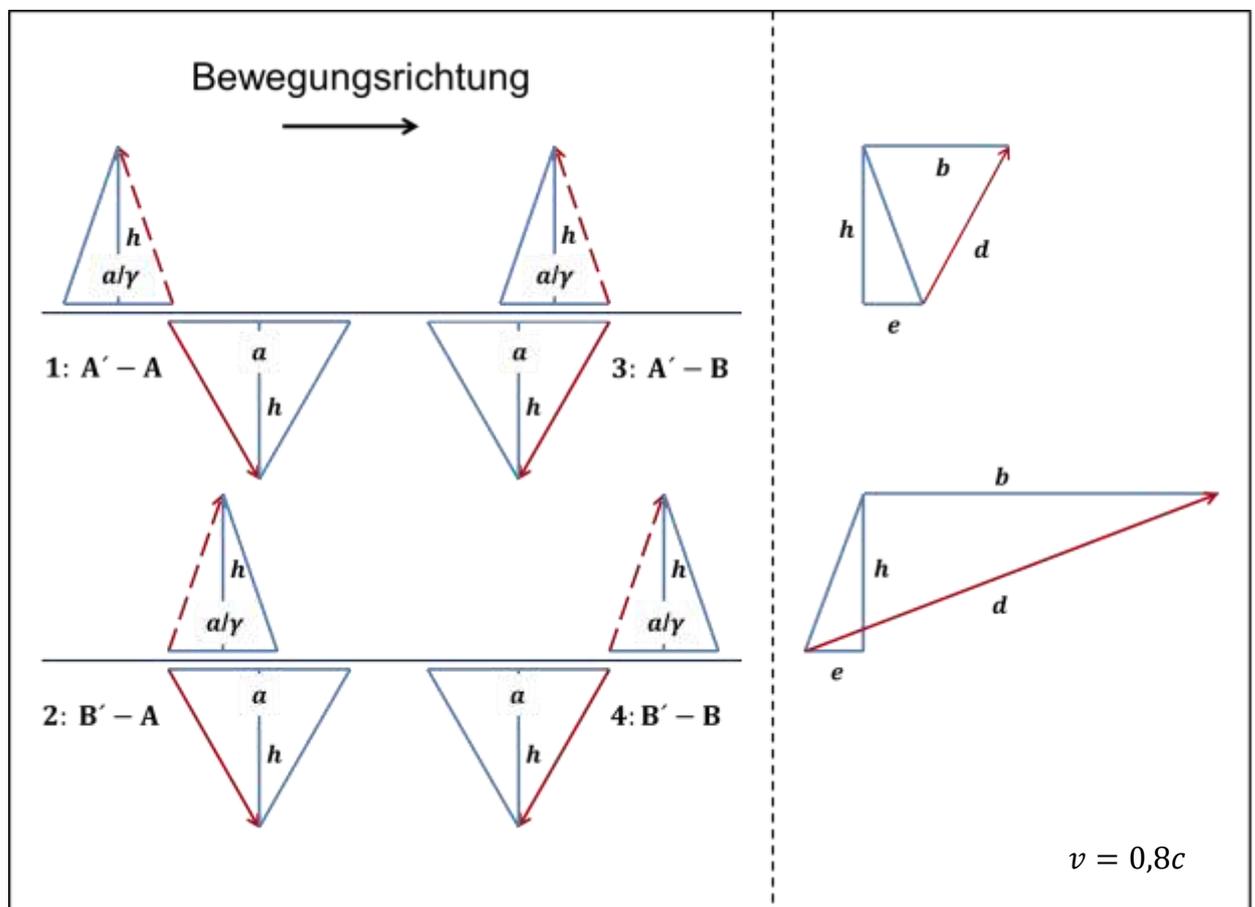


Abb. 4.6: Kontaktsituationen und daraus folgende geometrische Abhängigkeiten.

Zur Berechnung des Wegs  $d$  für die Abstrahlung von  $A'$  nach  $C'$  (Fälle 1 und 3) wird der Satz des Pythagoras verwendet

$$(b - e)^2 + h^2 = d^2 \quad (4.40)$$

und es gilt die zusätzliche Beziehung

#### 4. Weiterführende Betrachtungen für bewegte Beobachter

$$\frac{b}{d} = \frac{v}{c} \quad (4.41)$$

Daraus folgt

$$\left(d \frac{v}{c} - \frac{a}{2\gamma}\right)^2 + \frac{3}{4}a^2 = d^2 \quad (4.42)$$

und nach Umformung

$$d_{1/2} = -a\gamma \left(\frac{v}{2c} \pm 1\right) \quad (4.43)$$

Für den Fall, dass das Signal von B' nach C' abgestrahlt wird (Fälle 2 und 4) ergibt sich

$$(b + e)^2 + h^2 = d^2 \quad (4.44)$$

und

$$d_{1/2} = a\gamma \left(\frac{v}{2c} \pm 1\right) \quad (4.45)$$

Es werden nur Ergebnisse mit positivem Vorzeichen berücksichtigt, daher gilt

$$A' \rightarrow C': \quad \frac{d}{a} = \gamma \left(1 - \frac{v}{2c}\right) \quad (4.46)$$

$$B' \rightarrow C': \quad \frac{d}{a} = \gamma \left(1 + \frac{v}{2c}\right) \quad (4.47)$$

Wir die Zeit auf 1 normiert, so ergeben sich die Zeiten

$$t_{A' \rightarrow C'} = \gamma \left(1 - \frac{v}{2c}\right) \quad (4.48)$$

$$t_{B' \rightarrow C'} = \gamma \left(1 + \frac{v}{2c}\right) \quad (4.49)$$

Für die Berechnung von zurückgesendeten Signalen folgt sofort aus Symmetriegründen

$$t_{C' \rightarrow B'} = t_{A' \rightarrow C'} = \gamma \left(1 - \frac{v}{2c}\right) \quad (4.50)$$

$$t_{C' \rightarrow A'} = t_{B' \rightarrow C'} = \gamma \left(1 + \frac{v}{2c}\right) \quad (4.51)$$

Zur Durchführung einer vollständigen Berechnung müssen zusätzlich noch die Zeiten zwischen den Kontakten berechnet werden. Wird die Zeit beim ersten Kontakt A – A' zu Null gesetzt so ergibt sich für die weiteren Zeitabstände

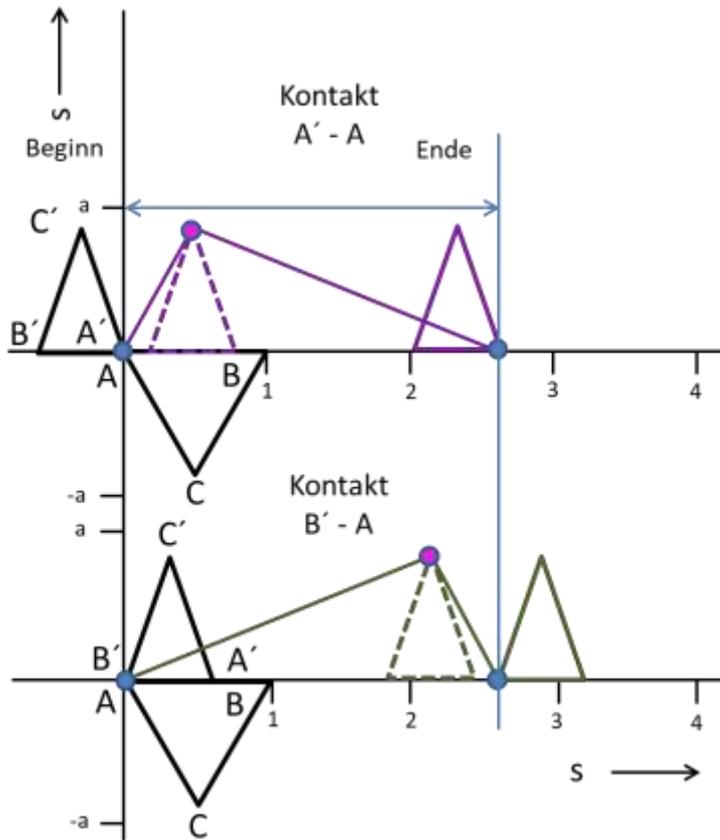
$$\text{Fall1} \rightarrow \text{Fall2}: \quad t_{1 \rightarrow 2} = \frac{c}{\gamma v} \quad (4.52)$$

$$\text{Fall1} \rightarrow \text{Fall3}: \quad t_{1 \rightarrow 3} = \frac{c}{v} \quad (4.53)$$

$$\text{Fall1} \rightarrow \text{Fall4}: \quad t_{1 \rightarrow 4} = \frac{c}{\gamma v} + \frac{c}{v} \quad (4.54)$$

Mit einer geeigneten Kombination aus den hier abgeleiteten Beziehungen lassen sich alle möglichen Versuchskonstellationen berechnen.

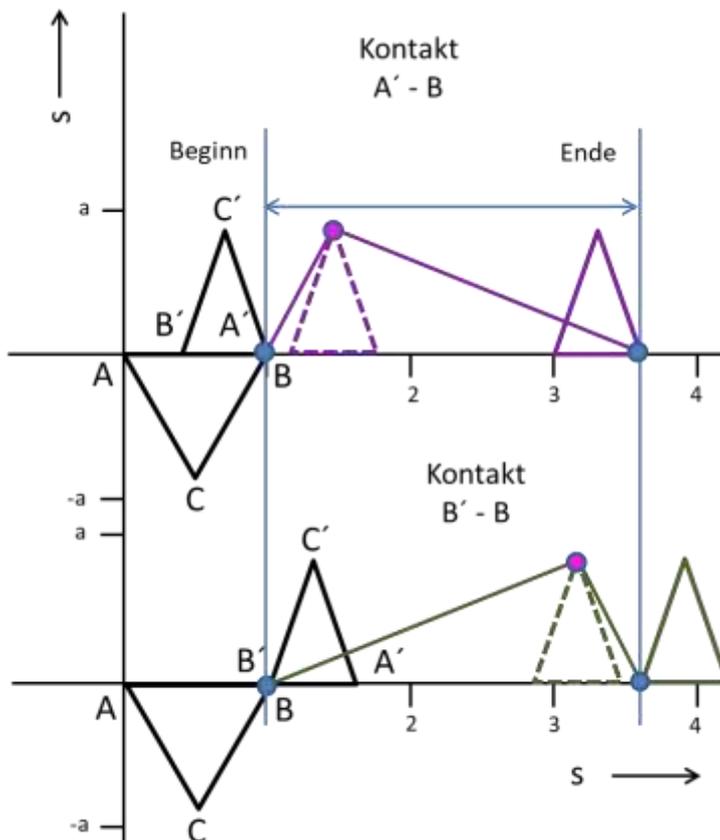
#### 4.4 Signalaustausch zwischen räumlich ausgedehnten Körpern



$$v = 0,8c$$

A' - A	System	System'
$t_0$	0	0
$t_1$	1	1
$t_2$	2	3,33

B' - A	System	System'
$t_0$	0,75	0,75
$t_1$	1,75	3,08
$t_2$	2,75	4,08



A' - B	System	System'
$t_0$	1,25	1,25
$t_1$	2,25	2,25
$t_2$	3,25	4,58

B' - B	System	System'
$t_0$	2	2
$t_1$	3	4,33
$t_2$	4	5,33

Abb. 4.7: Signalfolge für die 4 möglichen Kontakte des Systems.

#### 4. Weiterführende Betrachtungen für bewegte Beobachter

In Abb. 4.7 ist die grafische Darstellung für die Versuchssituation mit einer Geschwindigkeit von  $v = 0,8 c$  wiedergegeben. Diese hohe Geschwindigkeit wurde gewählt, damit sich die Situation gut visualisieren lässt, sie stellt aber keine Beschränkung der Allgemeinheit dar.

Für die 4 verschiedenen Kontakte sind die Zeiten eingetragen, bei denen aus Sicht C die Signale von A' bzw. B' bei C' und nach Reflexion beim jeweiligen Ausgangspunkt eintreffen. Außerdem sind die entsprechenden Messungen für das System A, B, C wiedergegeben. Zur Vereinfachung der Betrachtung wird die Zeit so normiert, dass der Durchlauf der Strecke  $a = 1$  gesetzt wird. Damit die Messungen miteinander verglichen werden können, wurden zu den jeweiligen Laufzeiten zwischen den Punkten die Zeiten bis zum Aussenden des ersten Signals entsprechend der Gleichungen Gl. (4.52) – (4.54) hinzuaddiert. Das erste Signal beim Kontakt von A'/A bildet hierbei den Nullpunkt, gefolgt von B'/A, dann A'/B und zum Schluss B'/B als letzte mit dem Abstand  $t = 2$ .

Gemäß den Aussagen der speziellen Relativitätstheorie müssen hier das „Identitätsprinzip“ und nach Nutzung der Transformationsgleichungen das „Äquivalenzprinzip“ gelten. Zunächst ist festzustellen, dass die Zeit für einen Durchlauf  $A \rightarrow C \rightarrow A$  und  $B \rightarrow C \rightarrow B$  jeweils in der Zeit  $t = 2$  abläuft, während für die Strecken  $A' \rightarrow C' \rightarrow A'$  und  $B' \rightarrow C' \rightarrow B'$  jeweils  $t = 2,333 = 2\gamma$  benötigt werden. Dies entspricht genau den Erwartungen bezüglich der subjektiv langsamer ablaufenden Zeit im bewegten System.

Betrachtet man die Zeiten, die bei C und C' zwischen den einzelnen Signalen gemessen werden, so tritt der gleiche Effekt auf wie auch bereits in Kap. 2.2.2 diskutiert. Es sind für C und C' die festgestellten Werte von A/B' und B'/A vertauscht. Dies ist auch aufgrund der Relativitätsbetrachtung zwingend erforderlich, da der Beobachter C bzw. C' zuerst die Signale des in seinem System befindlichen Beobachters A bzw. A' empfangen muss, damit jeweils die gleiche Abfolge eingehalten wird.

Es ist demnach auch in diesem Fall bei einer Kombination von Signalen in Längs- und Querrichtung das Relativitätsprinzip gewahrt.

#### 4.5 Signalaustausch bei Rotation (Sagnac-Effekt)

Im Gegensatz zu translatorischen Bewegungen treten bei rotierenden Systemen messbare Effekte zwischen Hin- und Rückweg auf. Dies steht nicht im Widerspruch zum Relativitätsprinzip, da es sich hier definitionsgemäß nicht um Inertialsysteme handelt. Die ersten erfolgreichen Versuche hierzu wurden von Georges Sagnac (1860-1926) im Jahr 1913 durchgeführt [100]. Der schematische Versuchsaufbau ist in Abb. 4.8 wiedergegeben. Im Teil a) ist dargestellt, dass von einer Lichtquelle monochromatisches Licht ausgesendet wird, das an einem halbdurchlässigen Spiegel teilweise reflektiert und in 2 gegenläufige Richtungen aufgeteilt wird. Nach vollständigem Umlauf und Austritt wird ein Interferometer genutzt, um kleine Laufzeitunterschiede zwischen den Lichtstrahlen zu detektieren. Zunächst wird die Apparatur im Ruhezustand kalibriert, anschließend erfolgen Messungen während der Drehung des Systems. Hierbei werden alle Elemente des Versuchsaufbaus, d. h. Lichtquelle, Spiegel und Detektor mitgedreht. Wie in Abb. 4.8 b) dargestellt, legen die in Drehrichtung ausgesendeten Lichtstrahlen einen längeren Weg zurück als die im gegenläufigen Sinn bewegten und dieser Unterschied lässt sich messen.

### Signalaustausch bei Rotation (Sagnac-Effekt)

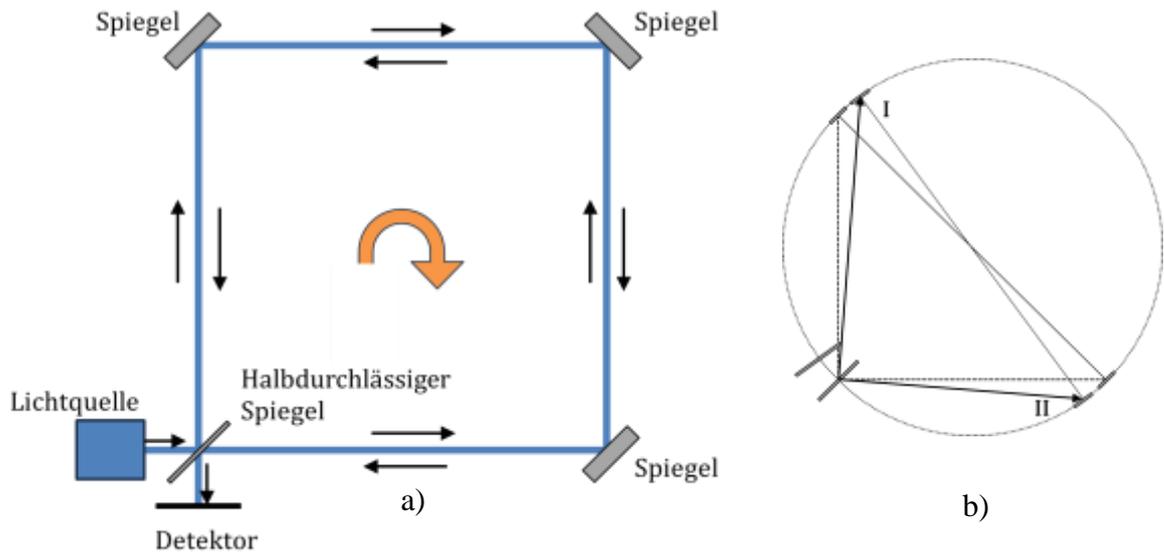


Abb. 4.8: Aufbau eines Sagnac-Interferometers. a) Drehbare Versuchsanordnung b) Veränderung des Signalverlaufs des ersten Segments durch Drehung Typ I (in Drehrichtung): Verlängerung; Typ II (gegenläufig): Verkürzung

Zur Berechnung der Werte können die in Abb. 4.9 dargestellten Bezeichnungen benutzt werden. Für die Länge des Kreisbogensegments  $s$  von A nach B gilt die Beziehung

$$s = r \cdot \omega \cdot (t_0 + \Delta t_0) \quad (4.60)$$

wobei  $r$  der Radius und  $\omega$  die Kreisfrequenz ist. Außerdem ist  $t_0$  die Zeit, die der Lichtstrahl im unbewegten System zwischen 2 Spiegeln benötigt und  $\Delta t_0$  die zusätzlich erforderliche Zeit bei einer Drehbewegung. Darüber hinaus gilt allgemein

$$a = ct_0 \quad e = c\Delta t_0 \quad b = a + e \quad a = r\sqrt{2}$$

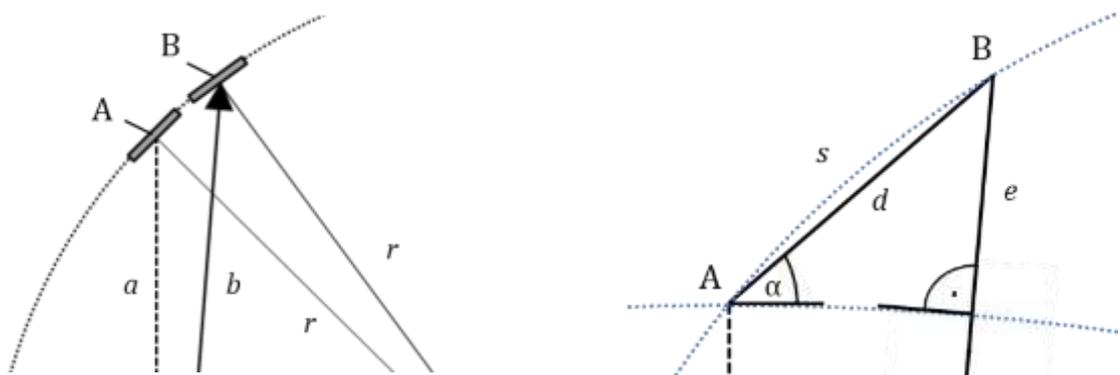


Abb. 4.9: Für die Berechnungen verwendete Formelzeichen

Wird  $\Delta t \ll t_0$  vorausgesetzt, dann gelten in guter Näherung folgende Zusammenhänge

$$s = d = r \cdot \omega \cdot t_0 \quad (4.61)$$

$$\sin \alpha = \sin(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{e}{d} = \frac{c \cdot \Delta t_0}{r \cdot \omega \cdot t_0} \quad (4.62)$$

#### 4. Weiterführende Betrachtungen für bewegte Beobachter

und damit

$$\Delta t_0 = \frac{r\omega t_0}{\sqrt{2} \cdot c} = \frac{a^2\omega}{2c^2} \quad (4.63)$$

Es gibt 4 Segmente, also ist die Zeitverzögerung bei einem Umlauf

$$\Delta t_+ = 2 \frac{a^2\omega}{c^2} \quad (4.64)$$

Die Verkürzung der Zeit für den Lichtstrahl auf dem entgegengesetzten Weg hat den gleichen Betrag, also ist das Endergebnis

$$\Delta t_t = \Delta t_+ + \Delta t_- = 4 \frac{a^2\omega}{c^2} \quad (4.65)$$

Bei einer Länge  $a$  von 1m und 10 Umdrehungen pro Sekunde ergibt das  $\Delta t_t = 4,4 \cdot 10^{-16}$ s entsprechend einer Wellenlänge im sichtbaren Licht, die Interferenzmessungen zulässt.

G. Sagnac war der Überzeugung, dass er mit seiner (ähnlich aufgebauten) Apparatur einen Äthereffekt gemessen hatte; es wurde jedoch bereits 1911 von Max v. Laue der Nachweis geführt, dass ein solches Experiment mit dem Relativitätsprinzip vereinbar ist [101].

Im Jahr 1925 wurde von A. A. Michelson und H. G. Gale ein Versuch mit einer Abmessung von 613m Länge und 339 m Breite durchgeführt [102,103]. Hiermit konnte die Rotation der Erde mit einer relativen Genauigkeit von 2% gemessen werden.

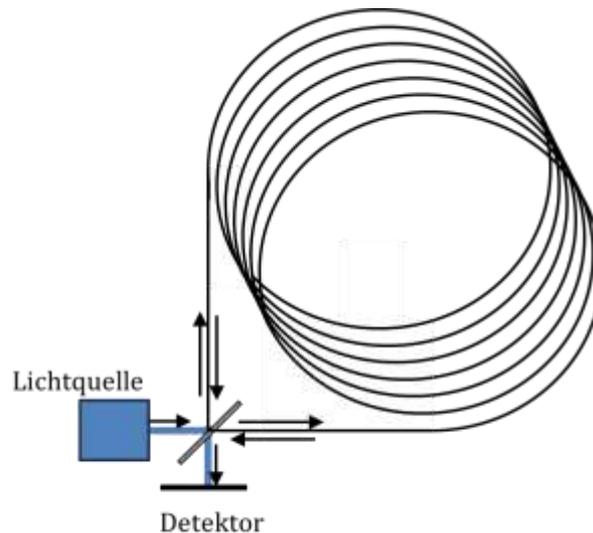


Abb. 4.10: Aufbau eines Sagnac-Interferometers mit einem Lichtwellenleiter

Neben dem Aufbau mit Strahlenreflektion durch Spiegel können auch wie in Abb. 4.10 dargestellt aufgewickelte Lichtwellenleiter eingesetzt werden. Diese sind heute weit verbreitet und finden Anwendung in Bereichen wie Luft- und Raumfahrt, bei der Navigation von Schiffen und in der Robotik. Sie sind weniger anfällig für mechanischen Verschleiß als mechanische Kreiselkompass, da sie keine beweglichen Teile enthalten. Ein weiterer Trend in deren Entwicklung ist die Miniaturisierung von optischen Gyroskopen. Mit dem Aufkommen von Mikro-Elektro-Mechanischen Systemen (MEMS) ist es möglich geworden, kleinere und kosteneffizientere Gyroskope herzustellen, die für eine Vielzahl von Anwendungen, von Smartphones bis hin zu Drohnen, eingesetzt werden können.