2. Betrachtungen für zwei bewegte Beobachter

Wie bereits in der Einleitung ausgeführt wurde, wird im Folgenden die Spezielle Relativitätstheorie als grundlegendes Prinzip zur Betrachtung von physikalischen Gegebenheiten gewählt. Darauf basierend werden in diesem Kapitel verschiedene Konstellationen beim Signalaustausch zwischen zwei Beobachtern untersucht, die zunächst als punktförmig angenommen werden, anschließend werden dann räumlich ausgedehnte Objekte betrachtet. Im Anschluss wird eine Untersuchung der Winkelbeziehungen beim Austausch von Signalimpulsen durchgeführt.

Die sich dabei ergebenden Konsequenzen werden diskutiert und mit Auswertungen aus der Literatur verglichen. Es zeigt sich dabei, dass die Ergebnisse widerspruchsfrei sind. Zusätzlich ergeben sich ergänzende Erkenntnisse bei den Winkelberechnungen. Diese basieren hier auf geometrischen Betrachtungen und führen zunächst zu dem erwarteten Ergebnis, dass die Längenkontraktion berücksichtigt werden muss. Es zeigt sich hierbei aber außerdem, dass diese symmetrisch in Bewegungsrichtung und entgegengesetzt dazu aufgeteilt sein muss. Dieses Ergebnis wird wichtig bei der Diskussion von alternativen Theorien, wie sie im Kapitel 11.1 beschrieben werden.

Es wird in jedem Fall zunächst von „ruhenden“ und „bewegten“ Objekten ausgegangen. Bei den Berechnungen zeigt sich dann, dass dieser Ansatz durch den Begriff „relativ zueinander gleichförmig bewegt“ ersetzt werden kann. Diese Vorgehensweise wird nicht oft angewendet, ist aber auch noch in neuerer Literatur zu finden [21].

2.1 Austausch von Signalen zwischen punktförmigen Körpern

Obwohl die hier dargestellten Betrachtungen und die ersten daraus folgenden Ableitungen zunächst trivial erscheinen, werden schon bei diesen elementaren Ansätzen die Grenzen der klassischen Mechanik erkennbar. Um Widersprüche zu vermeiden, müssen bereits bei den einfachen Gegebenheiten, wie sie beim Austausch von Signalen zwischen als punktförmig angenommenen bewegten Körpern vorliegen, die Regeln der Lorentz-Transformation angewendet werden.

Im Folgenden wird dies an verschiedenen einfachen Beispielen demonstriert, bevor dann komplexere Betrachtungen vorgenommen werden.

2.1.1 Bewegung aufeinander zu oder voneinander weg

Wenn sich zwei Beobachter A und B gleichförmig voneinander wegbewegen, so lässt sich der Empfang von jeweils periodisch ausgesendeten Lichtsignalen bestimmen. Gemäß der klassischen Theorie nach Newton würde gelten, dass der sich bewegende Beobachter die Signale in größerem zeitlichem Abstand empfängt als der ruhende (vgl. Abb. 2.1).

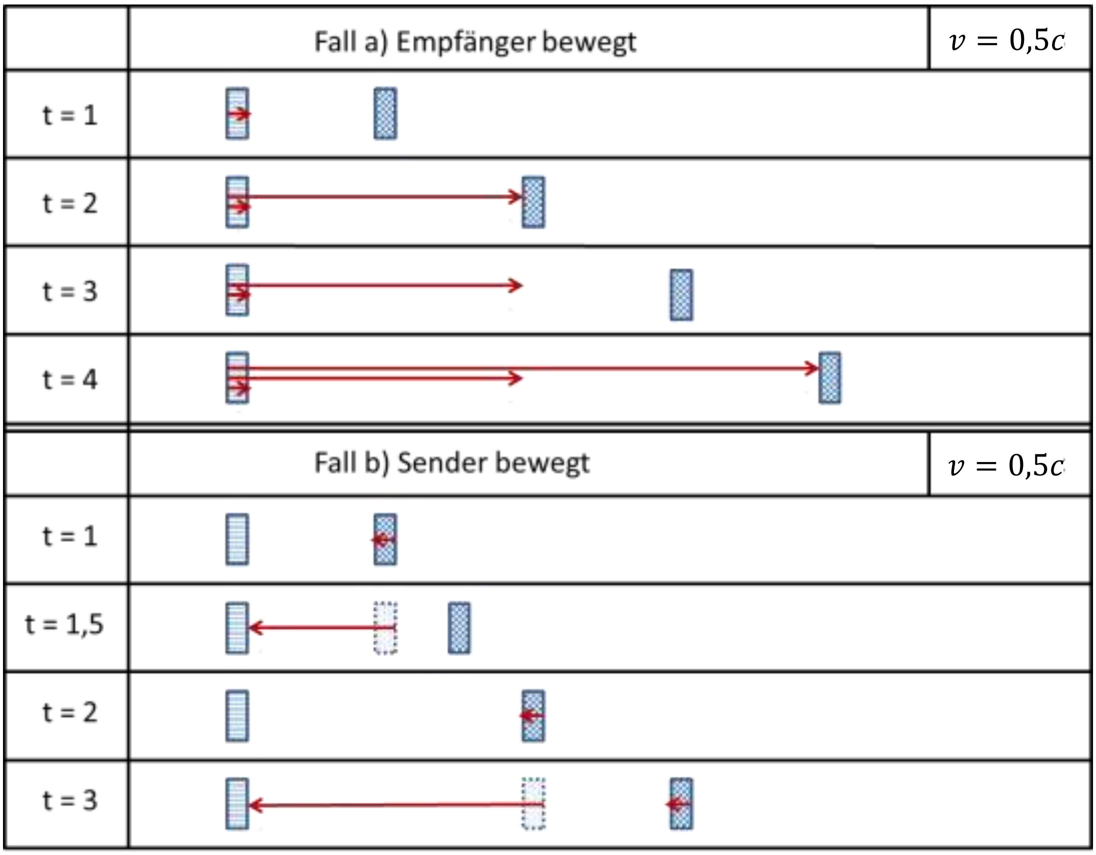

Abb. 2.1: Unterschiede in der zeitlichen Abfolge empfangener Signale für einen ruhenden und einen bewegten Beobachter gemäß klassischer Theorie.
Beobachter passieren bei $t = 0$,
Signalintervall mit $\Delta t = 1\ ZE$ (Zeiteinheit),
Beispiel für $v = 0{,}5c$

Bei dem gewählten Beispiel mit $v = 0{,}5\ c$ würde der bewegte Beobachter alle 2 Zeiteinheiten (ZE) ein Signal empfangen, während sich beim ruhenden Beobachter ein Abstand von $1{,}5\ ZE$ einstellt. Beide Beobachter könnten demnach anhand des Signaleingangs bestimmen mit welcher Geschwindigkeit sie sich bewegen. Dies steht jedoch im Widerspruch zu der experimentellen Beobachtung, dass die Messergebnisse eines solchen Versuchs unabhängig vom Bewegungszustand stets gleich sind.

In der Abb. 2.2 sind zusammenfassend die möglichen Varianten zwischen ruhenden und bewegten Beobachtern zusammengestellt. Darüber hinaus sind in Tab 2.1 auch die grundlegenden Beziehungen zwischen diesen wiedergegeben. Es handelt sich hierbei um einen Signalaustausch in Bewegungsrichtung bzw. entgegengesetzt dazu; das Verhalten in anderen Raumrichtungen wird später behandelt.

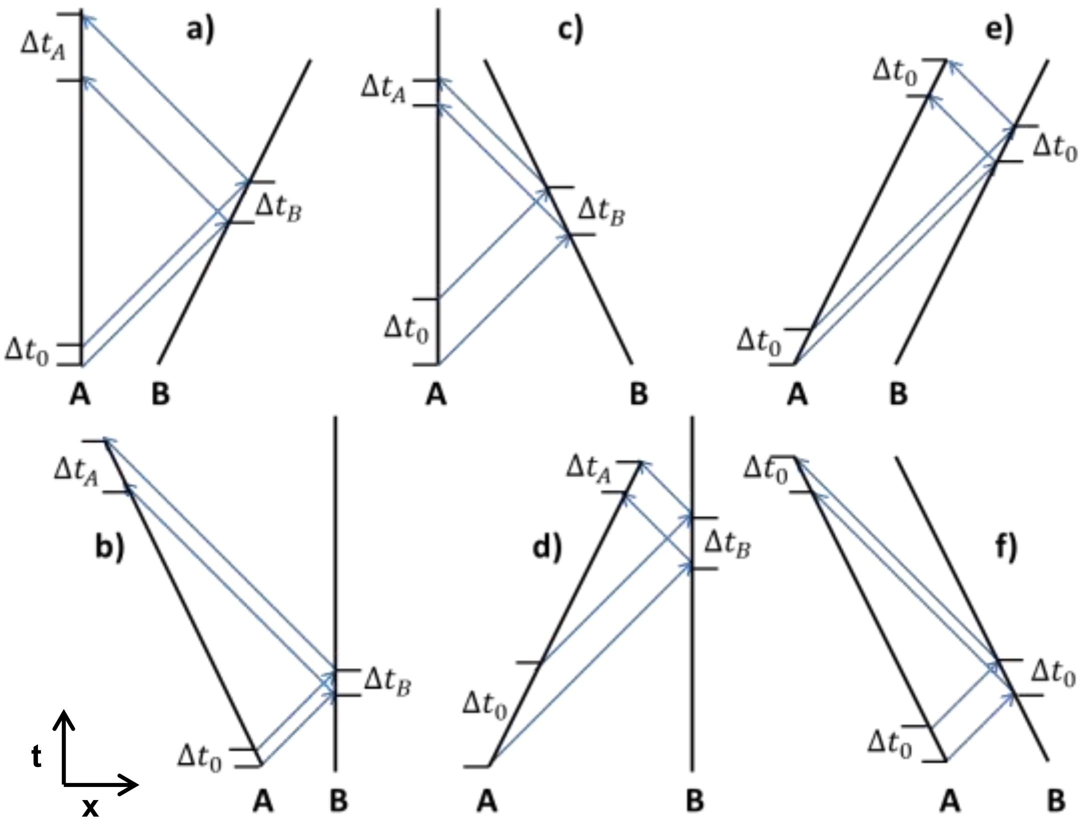

Abb. 2.2 Raum-Zeit-Schaubilder für Möglichkeiten beim Signalaustausch in Bewegungsrichtung

a)	$\Delta t_B = \Delta t_0 \dfrac{1}{1-\frac{v}{c}}$	c)	$\Delta t_B = \Delta t_0 \dfrac{1}{1+\frac{v}{c}}$	e)	$\Delta t_B = \Delta t_0$
	$\Delta t_A = \Delta t_0 \dfrac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}$		$\Delta t_A = \Delta t_0 \dfrac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}$		$\Delta t_A = \Delta t_0$
b)	$\Delta t_B = \Delta t_0 \left(1+\frac{v}{c}\right)$	d)	$\Delta t_B = \Delta t_0 \left(1-\frac{v}{c}\right)$	f)	$\Delta t_B = \Delta t_0$
	$\Delta t_A = \Delta t_0 \dfrac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}$		$\Delta t_A = \Delta t_0 \dfrac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}$		$\Delta t_A = \Delta t_0$

Tab. 2.1 Signalabstände für den Signalaustausch in Abb. 2.2

Im Folgenden sollen die Gegebenheiten für einen Signalaustausch von A nach B und umgekehrt von B nach A gemäß Abb. 2.1 in einem einfachen Raum-Zeit-Diagramm dargestellt werden (Abb. 2.3). Hierzu werden die Varianten a) und b) aus Abb. 2.2 kombiniert.

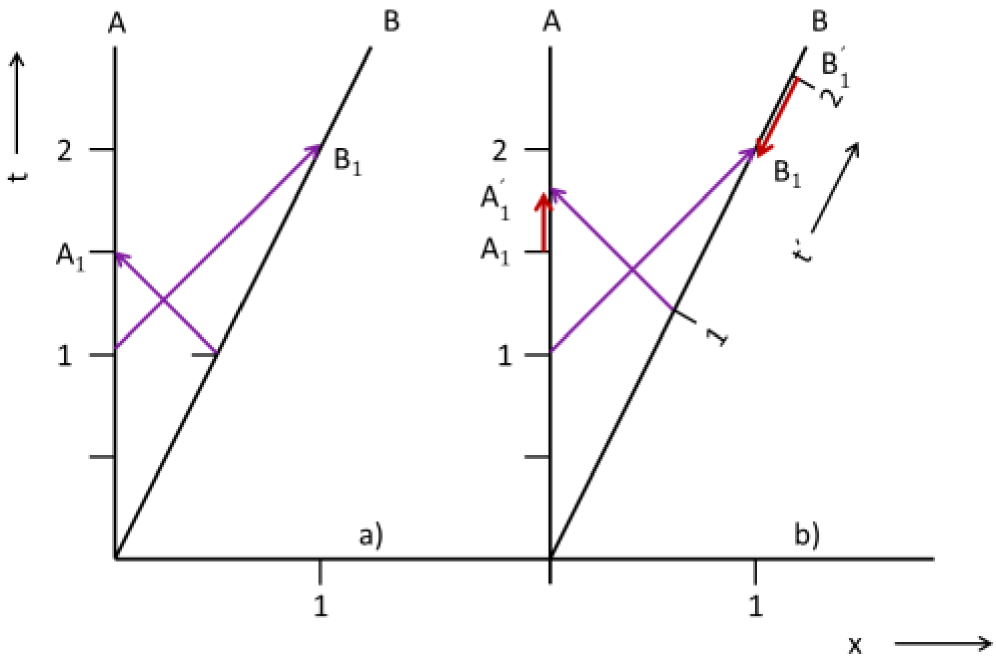

Abb. 2.3: Raum-Zeit-Diagramm für Signalaustausch zwischen Beobachter A (ruhend) und B (sich entfernend), Beispiel für $v = 0{,}5c$
a) konventionell (nach Newton)
b) relativistisch (nach Lorentz)

Hierbei ist im Teil a) die konventionell (nach Newton) zu erwartende Situation dargestellt. Die Signale werden zum Zeitpunkt $t = 1$ von beiden Beobachtern ausgesandt und treffen bei A_1 bzw. B_1 beim Versuchspartner ein. Dieses Diagramm ist z. B. beim Austausch von Schallimpulsen gültig, wenn A sich gegenüber dem Medium (z. B. Luft oder Wasser) in Ruhe befindet. Wie bereits ausgeführt, wird dies aber bei Versuchen mit Licht nicht festgestellt.

Von H. A. Lorentz wurde bereits im vorletzten Jahrhundert eine Lösung für dieses (innerhalb der klassischen von Newton entwickelten Mechanik) existierende Problem präsentiert. Hierzu wird vorausgesetzt, dass bei höheren Geschwindigkeiten der Effekt einer Zeitdilatation (d. h. Verlangsamung der Zeit) auftritt. Dies ist in Teildiagramm b) dargestellt. Für den Beobachter B vergeht die Zeit langsamer, also sendet er sein Signal aus Sicht von A etwas später aus; dieses trifft dann bei A_1' ein. Gleichzeitig nimmt B durch die für ihn wirksame Verlangsamung der Zeit den von A ausgesendeten Impuls subjektiv früher war. Dieser Effekt ist im Diagramm durch den Übergang von B_1 nach B_1' gekennzeichnet.

Der genaue Faktor der zugrundeliegenden Zeitverzögerung lässt sich leicht berechnen gemäß Abb. 2.2, Fälle a) und b). Für den Übergang von einem ruhenden auf einen bewegten Beobachter gilt die Beziehung für ein Zeitinterval Δt_0

$$\Delta t_{AB} = \Delta t_0 \, \frac{1}{1 - \frac{v}{c}} \tag{2.01}$$

In umgekehrter Richtung ist dies

$$\Delta t_{BA} = \Delta t_0 \, (1 + \frac{v}{c}) \tag{2.02}$$

Um Δt_{AB} und Δt_{BA} gleichzusetzen müssen die Gleichungen (2.01) und (2.02) jeweils um einen Faktor γ korrigiert werden (Δt_{AB} verkürzt und Δt_{BA} verlängert) und es ergibt sich

$$\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{1}{1 - \frac{v}{c}} = \left(1 + \frac{v}{c}\right) \cdot \gamma \qquad (2.03)$$

mit

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (2.04)$$

Die hier bestimmte Größe γ entspricht demnach dem Lorentz-Faktor aus Gl. (1.03).

Es ist also für Beobachter A und B aufgrund dieser Messungen nicht zu unterscheiden, ob sie sich bewegen oder in Ruhe befinden. Dies bedeutet, dass auch B aufgrund der Signaleingänge die Feststellung trifft, dass bei A die Zeit langsamer abläuft.

Das hier dargelegte Beispiel für sich entfernende Versuchsteilnehmer lässt sich leicht auch für sich annähernde Beobachter darstellen (vgl. Abb. 2.4, größerer Maßstab als Abb. 2.3).

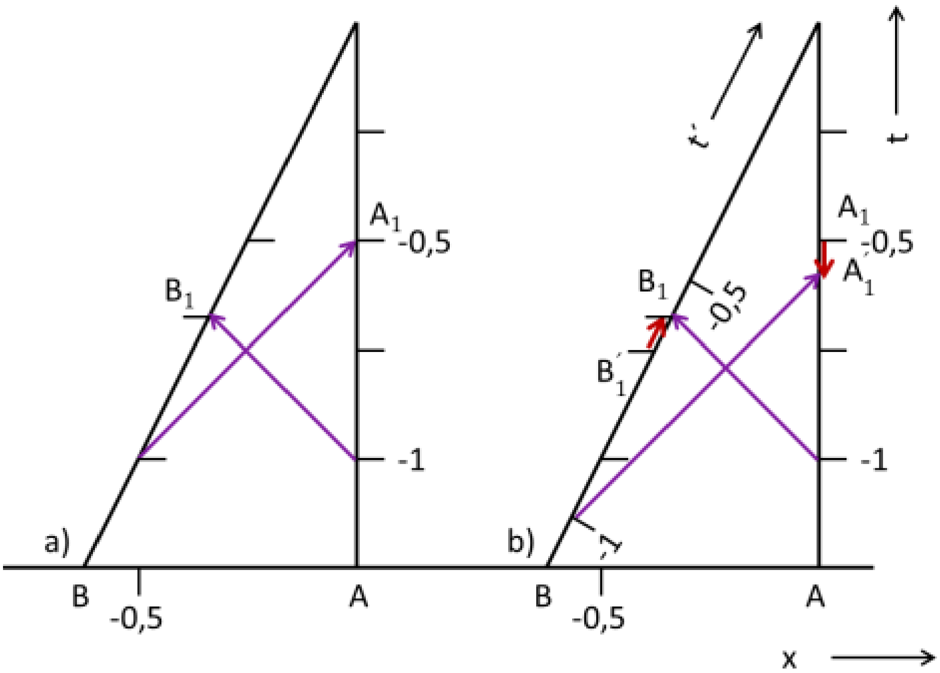

Abb. 2.4: Raum-Zeit-Diagramm für Signalaustausch zwischen Beobachter A (ruhend) und B (sich nähernd), Beispiel für $v = 0{,}5c$
a) konventionell (nach Newton)
b) relativistisch (nach Lorentz)

Für den Übergang von einem ruhenden auf einen bewegten Beobachter gilt hier die Beziehung für die Zeit Δt_0 gemäß Fall c) und d) aus Abb. 2.2

$$\Delta t_{AB} = \Delta t_0 \frac{1}{1 + \frac{v}{c}} \qquad (2.05)$$

In umgekehrter Richtung ist dies

$$\Delta t_{BA} = \Delta t_0 \left(1 - \frac{v}{c}\right) \tag{2.06}$$

Die Gleichungen (2.05) und (2.06) müssen wiederum jeweils um den Faktor γ korri-giert werden (Δt_{AB} verkürzt und Δt_{BA} verlängert) und es ergibt hier

$$\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{1}{1 + \frac{v}{c}} = \left(1 - \frac{v}{c}\right) \cdot \gamma \tag{2.07}$$

mit dem gleichen Endergebnis für γ wie in Gl. (2.04).

Es sei an dieser Stelle noch einmal festgehalten, dass die Zeitdilatation des bewegten Beobachters unerlässlich ist, damit es nicht zu Widersprüchen kommt. Ohne diesen Effekt wäre es stets möglich, einen bewegten von einem ruhenden Beobachter zu unterscheiden.

2.1.2 Bewegung in beliebigen Raumrichtungen

Es wurde bisher dargestellt, dass zwei gleichmäßig aufeinander zu oder voneinander weg bewegte Beobachter anhand von ausgetauschten Signalen nicht unterscheiden können, ob sie sich in Ruhe befinden oder sich bewegen. Wenn sich die Beobachter aber nicht direkt aufeinander zubewegen, sondern in einem definierten Abstand a passieren ändert sich die Situation und es ist ein größerer Aufwand erforderlich um nachzuweisen, dass die Beobachtungen der Versuchsteilnehmer äquivalent sind.

Es wird folgender Versuchsablauf gewählt:

1. Beide Versuchsteilnehmer senden im (subjektiven) Abstand von Δt Signale aus.
2. Bei den eingehenden Signalen wird der Winkel zur Bewegungsrichtung des jeweils anderen Versuchsteilnehmers gemessen.
3. Ist das eingehende Signal genau quer zur Bewegungsrichtung des Senders so wird ein besonders gekennzeichnetes Rücksignal ausgesendet.
4. Die Signale sind fortlaufend kodiert, so dass zum Abschluss des Versuchs und nach Austausch der Daten eine Auswertung darüber erfolgen kann, wann das Signal ausgesendet wurde, das beim anderen Teilnehmer als quer eintreffend gemessen wurde.

Betrachtet man zunächst den ruhenden Beobachter A und einen im Abstand a mit der Geschwindigkeit v passierenden Versuchsteilnehmer B, so wird A bei der geringsten Entfernung die von B (subjektiv) im Abstand von Δt ausgesendeten Signale im Abstand von $\gamma\Delta t$ wahrnehmen. B hat jedoch einen anderen Blickwinkel. Verursacht durch den Aberrationseffekt wird er aus Sicht A das Signal erst unter einem Winkel von

$$\delta = arcsin\left(\frac{v}{c}\right) = arctan\left(\gamma \cdot \frac{v}{c}\right) \tag{2 .10}$$

als quer eintreffend wahrnehmen (vgl. Abb. 2.5). Beim Beispiel von $v = 0{,}5c$·ist $\delta = 30°$. Für Winkel abweichend von der (subjektiven) Querrichtung von B sind besondere geometrische Betrachtungen erforderlich, die in Kap. 2.3 dargestellt sind.

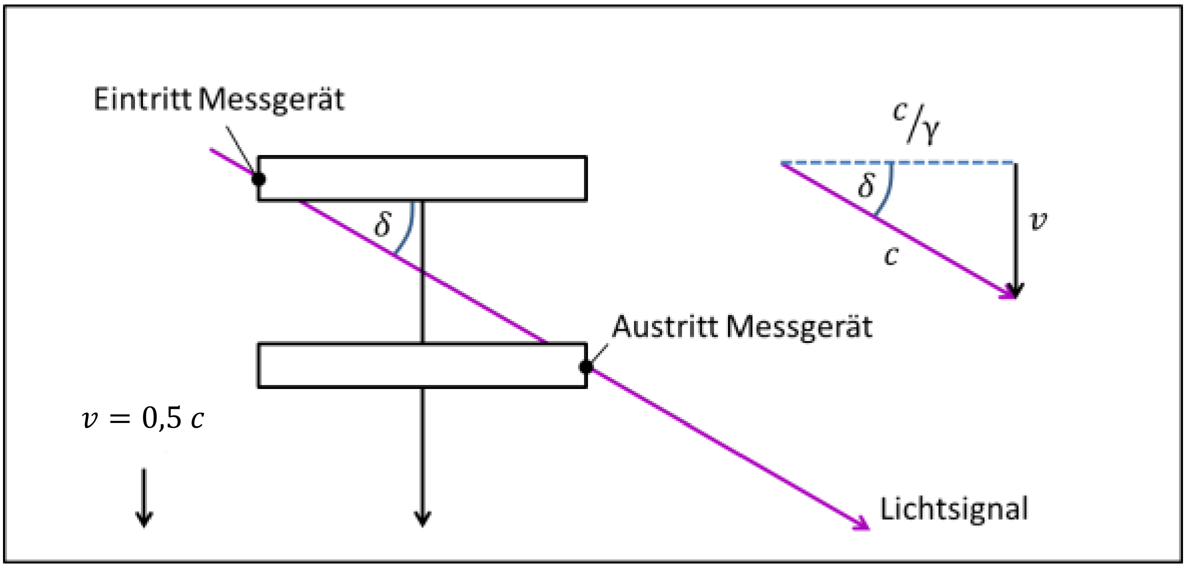

Abb. 2.5: Aberrationseffekt: Durch die Bewegung des Empfängers gegenüber einer ruhenden Signalquelle lässt sich der Winkel δ messen.

Im Folgenden soll gemäß der Darstellung in Abb. 2.6 untersucht werden, welche Werte sich für Δt (Signalabstand) und andere relevante Zeitmessungen für den bewegten und den ruhenden Beobachter ergeben.

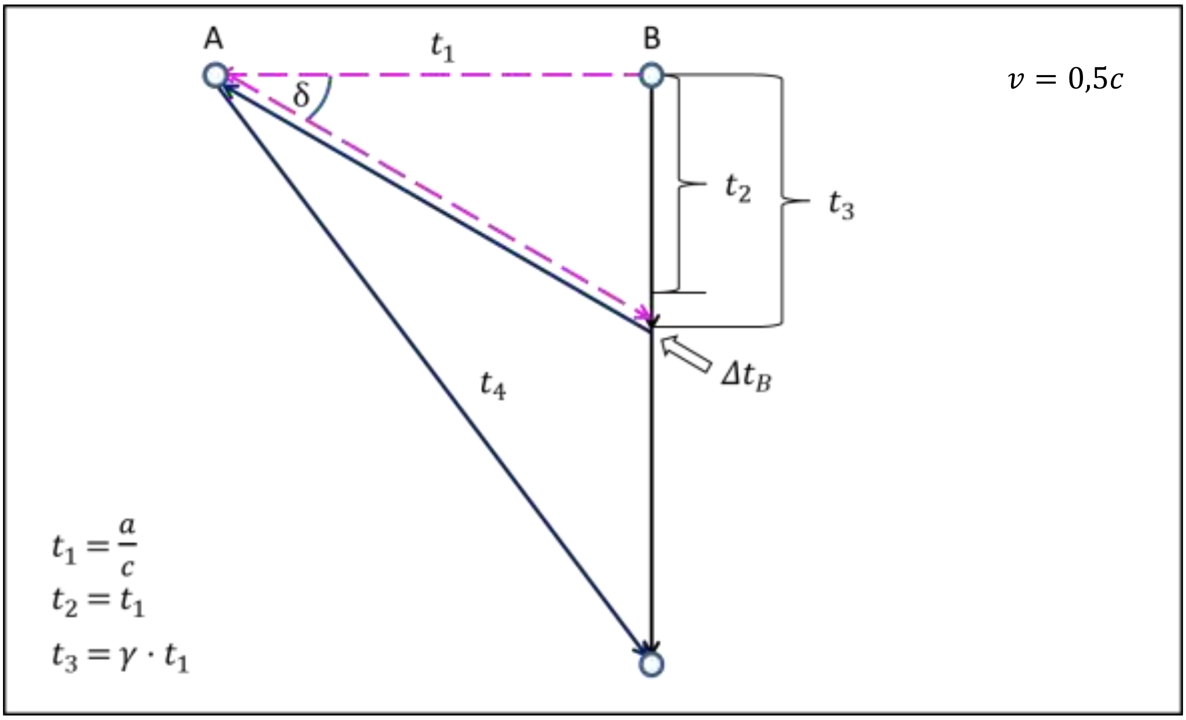

Abb. 2.6: Signalaustausch zwischen A und B am Beispiel $v = 0{,}5c$ und $\delta = 30°$; Detail Signalabstand Δt_B: vgl. Abb. 2.7; Gesamtlaufzeiten: vgl. Abb. 2.8

<u>*a) Messung des Signalabstands*</u>

Wie bereits erwähnt beträgt der vom ruhenden Beobachter gemessene Zeitabstand zwischen zwei von B in Querrichtung ausgesendeten Signalen (Zeit t_1) aufgrund der bei B wirksamen Zeitdilatation $\gamma\Delta t$.

Der von B gemessene Wert Δt_B kann mittels einer Näherungsrechnung gemäß dem Schema in Abb. 2.7 ermittelt werden. Zu Beginn wird von A ein Signal ausgesandt und am Punkt B_0 empfangen, das nächste Signal folgt dann im Abstand Δt_0. Trifft dieses bei B_0 ein, so hat sich der Beobachter aber bereits zum Punkt B_1 fortbewegt und die zusätzliche Zeit für den verlängerten Weg muss hinzuaddiert werden. Wird dabei vorausgesetzt, dass $\Delta t_0 \ll t_1$ ist, kann für die Berechnung angenommen werden, dass die von A ausgesandten Signale parallel in Richtung B_1 verschoben werden können ohne δ zu verändern. Trifft das Signal bei B_1 ein hat bereits eine erneute Fortbewegung zu B_2 stattgefunden und die Berechnungen sind entsprechend zu wiederholen.

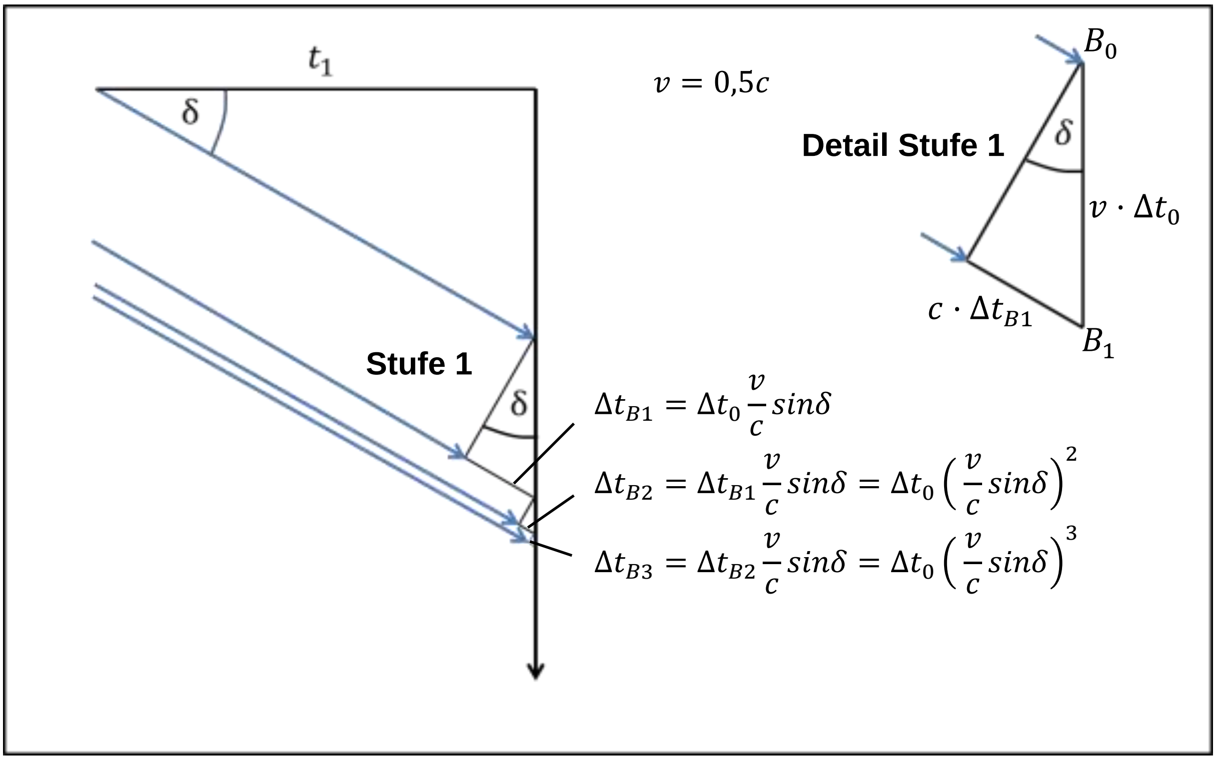

Abb. 2.7: Schema zur Berechnung des Signalabstands Δt_B (für $\Delta t_0 \ll t_1$). Darstellung der ersten 3 Stufen.

Die einzelnen Werte können zu

$$\Delta t_B = \Delta t_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \Delta t_{i-1} \frac{v}{c} sin\delta = \Delta t_0 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{v}{c} sin\delta\right)^i \tag{2.11}$$

aufsummiert werden. Bei der Summe handelt sich um eine geometrische Reihe

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} q^i \tag{2.12}$$

mit S_n als Grenzwert und

$$q = \frac{v}{c} sin\delta \tag{2.13}$$

Für $n \to \infty$ folgt mit $q < 1$

$$S_\infty = \frac{1}{1-q} \tag{2.14}$$

Da B den Signaleingang subjektiv in Querrichtung feststellt gilt hier Gl. (2.10)

$$sin\delta = \frac{v}{c} \tag{2.15}$$

Somit folgt

$$S_\infty = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \gamma^2 \tag{2.16}$$

Eingesetzt in die Gleichung (2.11) ergibt dies

$$\Delta t_B = \gamma^2 \cdot \Delta t_0 \tag{2.17}$$

Dies bedeutet, dass der bewegte Versuchsteilnehmer B subjektiv beim Empfang aus Querrichtung einen Wert von $\gamma\Delta t$ wahrnimmt, da er ja selbst der Zeitdilatation unterliegt. Damit ist gezeigt, dass die von A und B gemessenen Werte gleich sind.

b) Messung der Gesamtlaufzeit der Signale

Die Laufzeit des von A ausgesendeten und von B als quer zur Bewegungsrichtung gemessenen Signals beträgt γt_1 (vgl. Abb. 2.6).

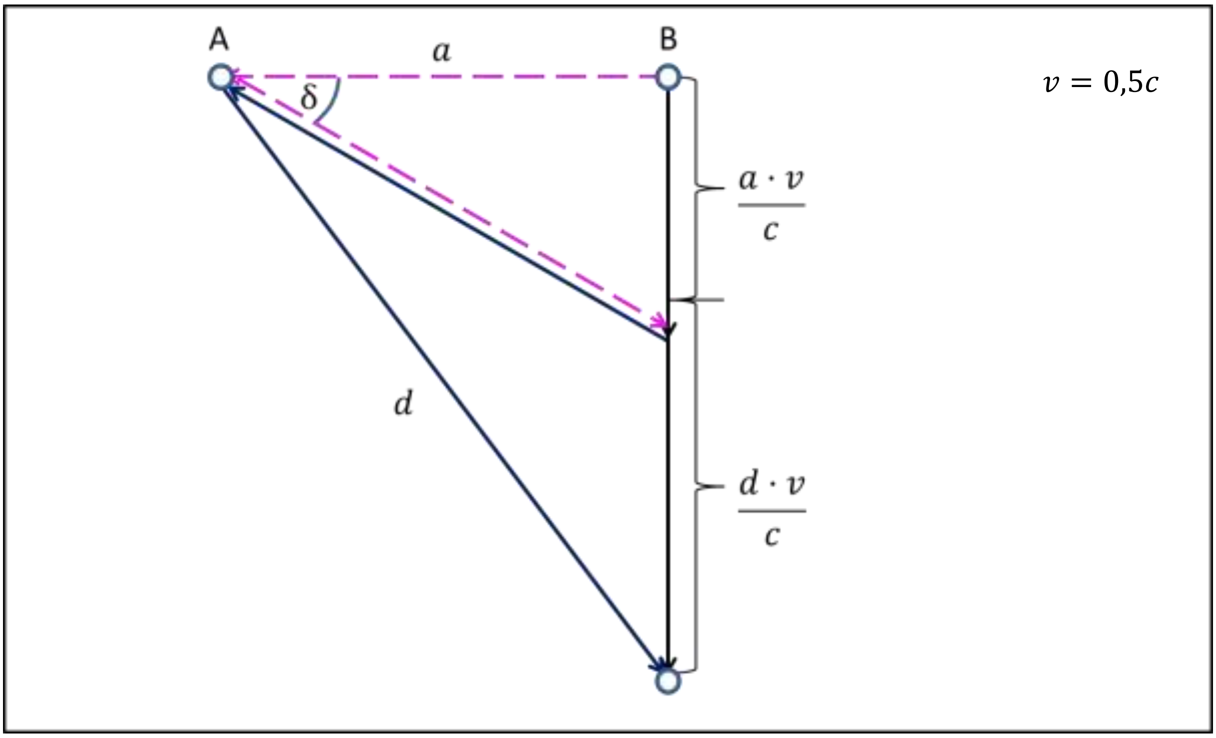

Abb. 2.8: Bezeichnung der Wegstrecken für das Signal B → A → B.

Da von B das Signal auf gleichem Weg zurückgeschickt wird ist die Gesamtzeit $2\gamma t_1$. Für B ergibt sich für den Weg a der Wert t_1, der Rückweg mit t_4 für d muss berechnet werden. Hierzu sind gemäß Abb.2.8 einige wesentliche Bezeichnungen festzulegen. Die Wegstrecke d (entsprechend der Zeit t_4) ergibt sich demnach aus

$$a^2 + \left(\frac{v}{c}a + \frac{v}{c}d\right)^2 = d^2 \tag{2.18}$$

nach quadratischer Ergänzung zu

$$a = d\left(-\frac{v^2}{c^2\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)} \pm \sqrt{\left(\frac{v^2}{c^2\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)}\right)^2 + \frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{1+\frac{v^2}{c^2}}}\right) \tag{2.19}$$

Werden nur positive Werte berücksichtigt, so folgt nach Vereinfachung

$$a = d\left(-\frac{v^2}{c^2\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)} + \sqrt{\frac{v^4}{c^4} + \left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\right) \tag{2.20}$$

$$= d\left(-\frac{v^2}{c^2\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)} + 1\right) = d\left(\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{1+\frac{v^2}{c^2}}\right) \tag{2.21}$$

und

$$d = a\left(\frac{1+\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}\right) \tag{2.22}$$

Zur Ermittlung des Gesamtwegs wird noch einmal a hinzuaddiert

$$d + a = a\left(\frac{1+\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}} + 1\right) = a\left(\frac{1+\frac{v^2}{c^2}+1-\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}\right) = 2a\gamma^2 \tag{2.23}$$

Es ergibt sich demnach eine Gesamtzeit von $2\gamma^2 t_1$ und damit ein Faktor von γ zwischen den Beobachtern A und B, der die Zeitdilatation für Beobachter B kompensiert. Die subjektiv gemessenen Werte sind also auch hier identisch.

2.2 Austausch von Signalimpulsen innerhalb von bewegten Körpern

Die bisher dargestellten Betrachtungen verdeutlichen die wesentlichen Beziehungen beim Signalaustausch zwischen Objekten mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten. Damit sind die Gegebenheiten jedoch zunächst nicht widerspruchsfrei zu beschreiben. Würde z. B. ein ruhender Beobachter Messungen der Lichtgeschwindigkeit zwischen zwei bewegten Objekten direkt beobachten, so wären für ihn ohne weitere Modifikationen Unterschiede zu seinen Ergebnissen feststellbar. Dies würde eine Verletzung der Tatsache darstellen, dass Messungen der Lichtgeschwindigkeit in Inertialsystemen stets zu konstanten Werten führen müssen. Dabei ergeben sich Unterschiede für Betrachtungen in Bewegungsrichtung und in anderen Raumrichtungen; diese werden im Folgenden separat behandelt.

Es wird hier ausschließlich der Austausch von Lichtimpulsen betrachtet. Die Untersuchung des Verhaltens von Licht als Welle und die damit verbundenen Besonderheiten erfordern eine gesonderte Betrachtungsweise, die in Kap. 8 dargestellt wird.

2.2.1 Signalaustausch in Bewegungsrichtung

Zur Darstellung dieses Sachverhalts wird die Zeit für den Signalaustausch zwischen den Objekten A und B untersucht. Während im Ruhezustand die Zeit für Hin- und Rückweg zwischen ihnen

$$t_{AB} + t_{BA} = 2t_0 \tag{2.30}$$

ist, gilt bei bewegten Objekten aus Sicht des ruhenden Beobachters (vgl. Gl. 2.01 und 2.05)

$$t_{AB} + t_{BA} = t_0 \frac{1}{1-\frac{v}{c}} + t_0 \frac{1}{1+\frac{v}{c}} \tag{2.31}$$

$$t_{AB} + t_{BA} = t_0 \left[\frac{\left(1+\frac{v}{c}\right)+\left(1-\frac{v}{c}\right)}{\left(1+\frac{v}{c}\right)\left(1-\frac{v}{c}\right)} \right] = 2\gamma^2 t_0 \tag{2.32}$$

Wie bereits dargestellt, läuft die Zeit für die bewegten Beobachter um den Faktor γ langsamer ab. Bei der hier durchgeführten Betrachtung ergibt sich aber eine Verlängerung in der Zeit um γ^2. Um diesen Widerspruch aufzulösen, muss daher zusätzlich eine Verkürzung des Wegs in Bewegungsrichtung um den Faktor γ angenommen werden. Diese Verkürzung wird auch als Raumkontraktion bezeichnet.

Werden die Effekte der Zeitdilatation und Raumkontraktion gemeinsam betrachtet so ergibt sich ein widerspruchsfreies Bild. Bemerkenswert ist hierbei, dass sich einzelnen Zeiten für die Strecken $A \rightarrow B$ und $B \rightarrow A$ zwar bei der Betrachtung durch den ruhenden Beobachter unterscheiden, dass die Summe der Zeiten aber (bei Berücksichtigung der Zeitdilatation) mit dem Ergebnis eines nicht bewegten Systems identisch ist.

Dies gilt nicht nur für die bereits dargestellten Zusammenhänge für den ruhenden Versuchsteilnehmer. Auch der bewegte Beobachter nimmt aufgrund der für ihn um den Faktor γ langsamer ablaufenden Zeit die Entfernungen im System des ruhenden Beobachters in Bewegungsrichtung als um den gleichen Betrag verkürzt war. Zeitdilatation und Raumkontraktion bedingen sich also gegenseitig, um zu einem widerspruchsfreien Bild zu gelangen.

Die Zusammenhänge sollen an einem einfachen Beispiel gezeigt werden. Dazu wird der Fall betrachtet, dass die Beobachter A und B im Abstand a voneinander entfernt sind. Zum Zeitpunkt 0 sendet A ein Signal aus, das bei B unmittelbar an A reflektiert wird. Wenn A und B sich in Ruhe befinden ist sofort klar, dass Hin- und Rückweg und damit die erforderlichen Zeiten für den Signaltransport gleich sind. Wenn sich aber beide Beobachter bezüglich eines anderen Inertialsystems gleichförmig bewegen, ist die Situation aus dessen Sicht völlig anders. Dieser Verlauf soll in einem Weg-Zeit-Diagramm dargestellt werden. Zur Vereinfachung der grafischen Darstellung werden alle Werte normiert; dies bedeutet, dass $a = 1$ gesetzt wird, außerdem wird die Zeit t als ct dargestellt und ebenso wie der Weg x auf 1 normiert. (Die Nutzung von ct anstatt t erfolgt häufiger; hierdurch erhalten x und ct die gleiche Dimension und aus dem Diagramm können Werte direkt abgelesen werden).

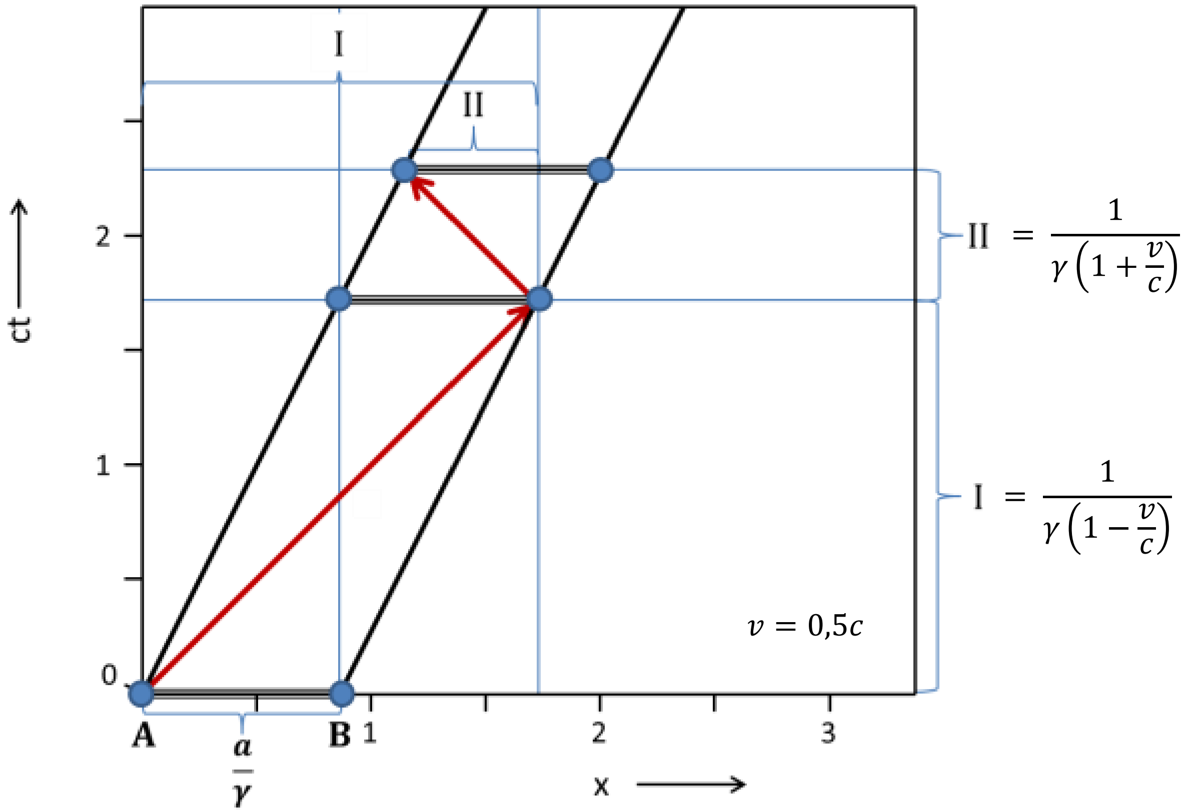

Abb. 2.9: Signalaustausch zwischen Beobachtern A und B (rote Pfeile) in einem bewegten System. Beispiel für $v = 0{,}5c$

Berechnungen analog Gl. (2.32) ergeben:

$$x_T = x_1 - x_2 = \frac{a}{\gamma\left(1-\frac{v}{c}\right)} + \frac{a}{\gamma\left(1+\frac{v}{c}\right)} = \frac{2\gamma v a}{c} \tag{2.33}$$

$$t_T = t_1 + t_2 = \frac{a}{c\gamma\left(1-\frac{v}{c}\right)} + \frac{a}{c\gamma\left(1+\frac{v}{c}\right)} = \frac{2\gamma a}{c} \tag{2.34}$$

Eingesetzt in die Lorentz-Gleichungen Gl. (1.07) und (1.08) folgt $x' = 0$ sowie $t' = 2\,a/c$ und damit das erwartete Ergebnis für ruhende Beobachter. Wie sich die Lorentz-Gleichungen ableiten lassen, ist an dieser Stelle noch nicht zu erkennen; im Kapitel 3.3 werden verschiedene Methoden gezeigt, wie dies möglich ist.

2.2.2 Signalaustausch beim Passieren von zwei Körpern

Wählt man einen komplexeren Ansatz für die Betrachtungen aus, z. B. indem man die Messungen zwischen identischen, aneinander vorbeibewegten Laboren mit jeweiligem Signalaustausch zwischen Anfang und Ende untersucht, so ergeben sich ebenfalls keine Unterschiede. Ein Beispiel ist im Folgenden wiedergegeben. Hierzu wird folgender Versuchsaufbau gewählt:

1. Zwei völlig identische Laboreinrichtungen mit den Beobachtern A, B, C sowie A′, B′, C′ werden aufgebaut. Die Ausrichtung ist in Abb. 2.10 dargestellt. C und C′ befinden sich genau in der Mitte der Labore.

2. Die Vorrichtung mit A′, B′, C′ wird gegenüber A, B, C bewegt.
3. Die bewegte Vorrichtung passiert die unbewegte in minimalem Abstand, um Aberrationseffekte möglichst gering zu halten.
4. Sobald sich die Beobachter der beiden Systeme bei A und A′ begegnen, werden von diesen Signale an C bzw. C′ abgeschickt. C bzw. C′ reflektieren die Signale an den jeweiligen Absender und speichern die entsprechenden Zeiten.

Zunächst treffen A und A′ aufeinander. Bei geringen Geschwindigkeiten (im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit) werden die Begegnungen B′ mit A und A′ mit B gleichzeitig erfolgen, bei relativistischen Geschwindigkeiten ist das nicht mehr der Fall. Hier weist dann das bewegte System eine Verkürzung in Bewegungsrichtung auf und die Kontakte erfolgen nacheinander. Abschließend erfolgt der Kontakt B′ mit B. Es entstehen demnach vier Kontaktsituationen, die in Abb. 2.11 in einem Raum-Zeit-Diagramm dargestellt sind.

Nach Versuchsende werden dann die gemessenen Zeiten aller Teilnehmer verglichen. Für das gewählte Beispiel mit $v = 0{,}5\ c$ ergeben sich für die Eintreffpunkte bei C bzw. C′ die in der nachfolgenden Tabelle dargestellten Werte. Neben den eigentlichen Beobachtungsergebnissen sind auch die berechneten Werte aufgrund der Lorentz-Transformation mit eingetragen. Zum exakten Vergleich werden anschließend die sich ergebenden Situationen für die Orts- und Zeitkoordinaten genauer betrachtet.

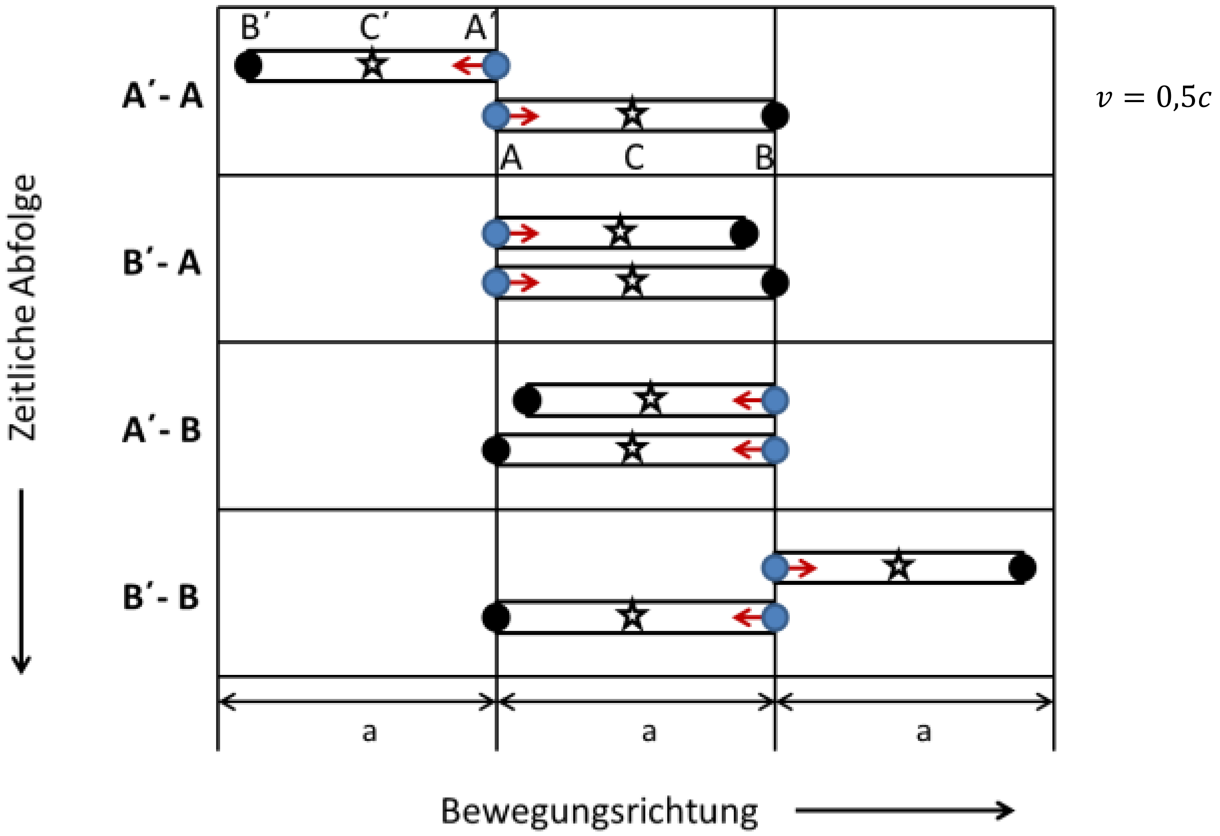

Abb. 2.10: Laboreinrichtung mit Beobachtern A und B zur Aussendung von Signalen und C zum Empfang. Ein identisches Labor mit A′, B′ und C′ bewegt sich mit Geschwindigkeit $v = 0{,}5\ c$ daran vorbei. Bei allen Kontakten von A und B mit A′ und B′ wird ein Signal ausgesandt und von C bzw. C′ empfangen.

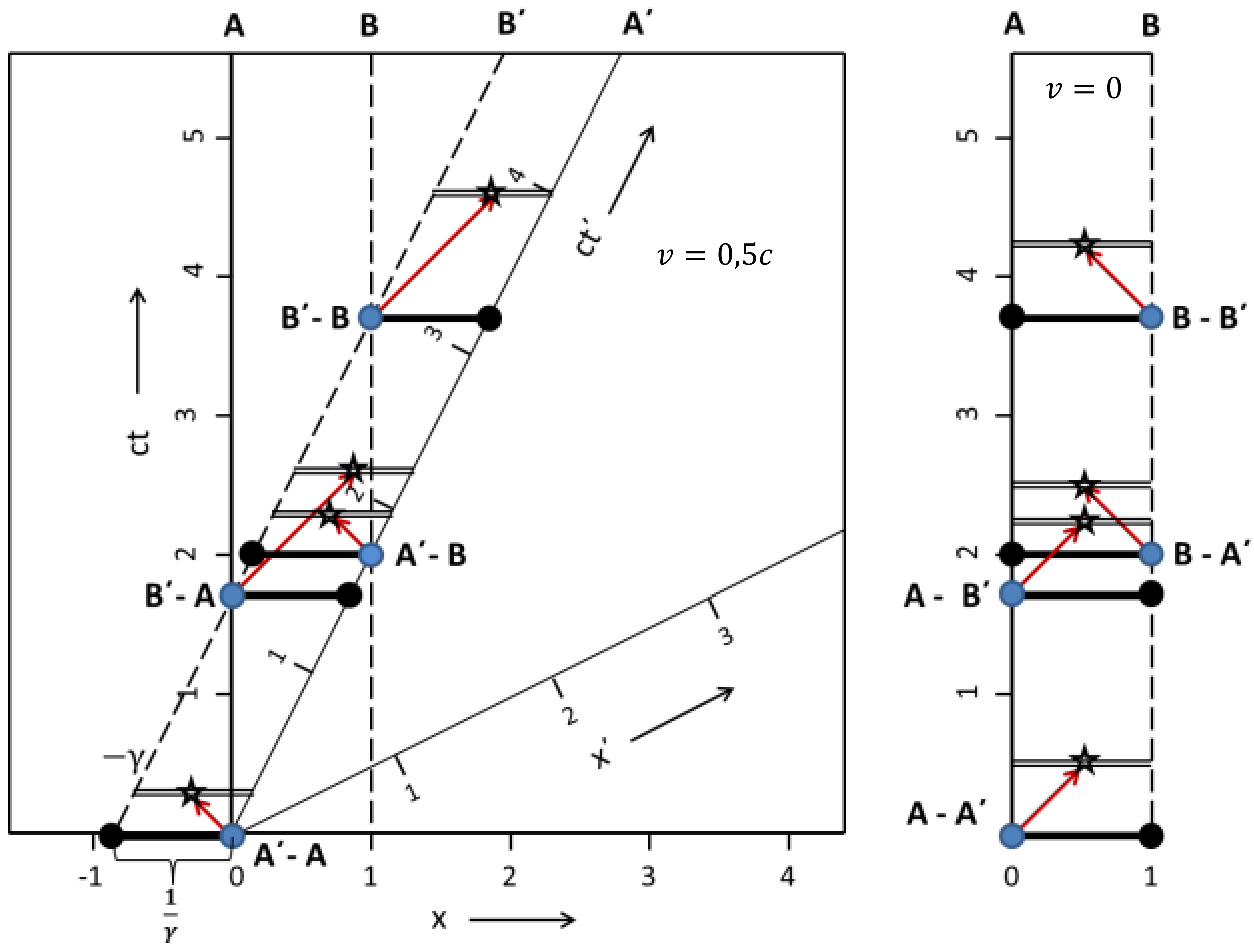

Abb. 2.11: Zeitliche Abfolge der Ankunft von Signalen in Labormitte, die beim Passieren von zwei identischen Laboren ausgelöst werden.
Links: Bewegtes Labor
Rechts: Ruhendes Labor

Fall	Beobachter	A/A′	A/B′	B/A′	B/B′
1	C	[0,5 ; 0,5]	[0,5 ; 2,232]	[0,5 ; 2,5]	[0,5 ; 4,232]
2	C	[-0,289 ; 0,289]	[0,866 ; 2,598]	[0,711 ; 2,289]	[1,866 ; 4,598]
3	C′	[-0,5 ; 0,5]	[-0,5 ; 2,5]	[-0,5 ; 2,232]	[-0,5 ; 4,232]

Tabelle 2.2: Koordinaten für Ort [Klammer links] und Zeit [Klammer rechts] für den Versuch gemäß Abb. 2.11
Zeile 1: Werte für ruhenden Beobachter
Zeile 2: Beobachtungen vom ruhenden Beobachter ins bewegte System
Zeile 3: Berechnete Werte für den bewegten Beobachter gemäß der Lorentz-Transformation

Ortskoordinaten

Zunächst ist klar, dass die Ortskoordinaten in der 1. Zeile konstant sein müssen. Unter den gewählten Versuchsbedingungen liegt der Punkt C ortsfest bei 0,5. Für das bewegte System variieren diese entsprechend den geometrischen Beziehungen gemäß Zeile 2. Die aus der Lorentz-Transformation berechneten Ortskoordinaten im bewegten System sind gleich denen des ruhenden Systems, allerdings ist das Vorzeichen wegen der anderen Bewegungsrichtung negativ. Dies bedeutet, dass der unbewegte und bewegte Beobachter subjektiv die gleichen Ortskoordinaten messen.

Zeitkoordinaten

Ähnliches gilt für die Zeitkoordinaten. Hier sind jedoch für C und C′ die festgestellten Werte A/B′ und B′/A vertauscht. Dies ist auch aufgrund der Relativitätsbetrachtung zwingend erforderlich, da die Beobachter C bzw. C′ zuerst beide Signale von den ihnen zugeordneten Beobachtern A bzw. A′ empfangen muss. Hierbei ist wichtig, dass aus Sicht des ruhenden Beobachters erst der Unterschied in den beobachteten Zeiten für die Signalübertragung von A′ und B′ nach C′ zu einer einwandfreien Zeitabfolge führt. Es sind somit zusammenfassend keinerlei Unterschiede für die sich ergebenden Messergebnisse der beteiligten Beobachter festzustellen.

2.2.3 Signalaustausch quer zur Bewegungsrichtung

Es sei der Fall betrachtet, dass ein Signal quer zur Bewegungsrichtung ausgesendet und reflektiert wird (z. B. in y-Richtung). Die auftretende Zeitdilatation mit dem Wert von γ für den bewegten Beobachter, der beim Erreichen des Lichtsignals am Reflektor den Weg $d = vT$ zurückgelegt hat, wird exakt durch den längeren Weg des Signals $D' = cT$ kompensiert und es sind daher für den bewegten Beobachter keine Unterschiede gegenüber dem Ruhezustand feststellbar (Abb. 2.12).

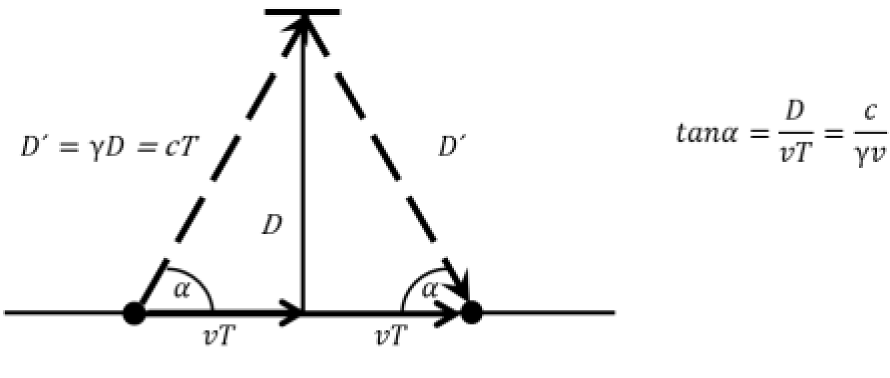

Abb. 2.12: Signalverlauf quer zur Bewegungsrichtung

Dies bedeutet, dass im Gegensatz zu den Effekten in Längsrichtung bei einem Signalaustausch quer zur Bewegungsrichtung für einen ruhenden Beobachter durch den Effekt der Aberration aus seiner Sicht eine Veränderung des Abstrahlwinkels auftritt. Dieser lässt sich gemäß der in Abb. 2.12 dargestellten Beziehung über den Tangens berechnen (vgl. auch Gl. (2.10) mit $\alpha = 90° - \delta$).

Nachdem zunächst die Verhältnisse beim Austausch von Signalen in Bewegungsrichtung untersucht wurden, wird damit das Verhalten quer dazu beschrieben. Es ergaben sich keine Abweichungen zu den erwarteten Gegebenheiten für die bewegten Versuchsteilnehmer und das Relativitätsprinzip ist damit gewahrt.

Um im nächsten Schritt eine Bestimmung der Verhältnisse beim Signalaustausch in beliebigen Raumrichtungen vornehmen zu können, sind zunächst grundlegende Betrachtungen der Winkelbeziehungen von ein- und ausgehenden Signalen unter Berücksichtigung des Aberrationseffekts erforderlich. Diese werden im Folgenden vorgenommen, bevor dann abschließend nachgewiesen werden soll, dass auch hierbei keine Abweichungen zwischen den subjektiven Beobachtungen eines ruhenden und eines relativ dazu bewegten Beobachters auftreten. Dieser Sachverhalt wird ausführlich in Kapitel 2.4 dargestellt und die Gültigkeit anhand einer Beispielrechnung nachgewiesen.

2.3 Winkelbeziehungen beim Austausch von Signalimpulsen

Im Folgenden wird untersucht, welche Auswirkungen aus unterschiedlichen Richtungen ein- oder ausgehende Signale auf die Winkelmessung beim Empfang in einem bewegten Körper haben. Dieser Effekt wird als Aberration bezeichnet (vgl. Abb. 2.5).

Wie bereits dargestellt wurde, muss bei relativistischer Betrachtung der Effekt berücksichtigt werden, dass ein Körper sich in Bewegungsrichtung verkürzt. Dieser Effekt wurde jedoch bisher nur für Hin- und Rückweg eines Signals in Bewegungsrichtung eingesetzt und sagt noch nichts über die Aufteilung in alle Raumrichtungen aus. Aus dem Relativitätsprinzip lässt sich ableiten, dass die Raumkontraktion symmetrisch um die Mittelachse des betrachteten Körpers gemäß der Darstellung in Abb. 2.13 verteilt ist. Es spielt dabei keine Rolle, in welche Richtung die Bewegung stattfindet.

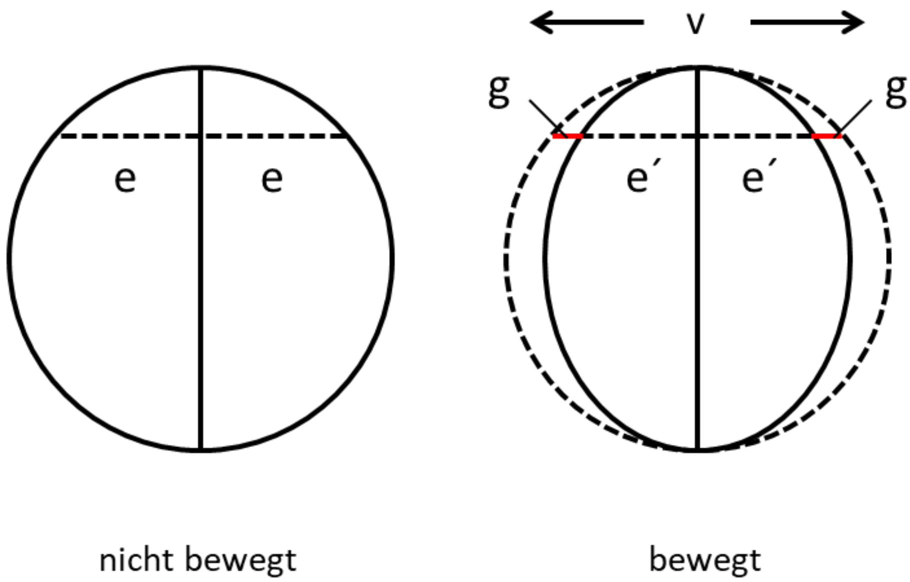

Abb. 2.13: Raumkontraktion im bewegten Körper

Dabei entspricht die Distanz e' im bewegten System dem Wert $e - g$ oder e/γ.

2.3.1 Empfang im bewegten Körper

Im Folgenden sollen die Werte für den Empfang in einem bewegten System bestimmt werden. Hierbei ist zunächst die Frage zu klären, wie eine solche Messung durchgeführt werden soll. Es wird folgende Anordnung gewählt:

Eine Kugel mit dem Radius a enthält ausreichend viele Bohrungen im Gesamtumfang, durch die gerichtete Lichtstrahlen eines Senders eindringen können (z. B. an der Stelle P_1, vgl. Abb. 2.14). Trifft ein solcher Lichtstrahl den Mittelpunkt (P_2), so sind aus Sicht des Empfängers über die Lage der Bohrung und dem gegebenen Radius a die Winkel definiert, da jeder dieser Bohrungen über geometrische Messungen ein Winkel α' bzw. β' zugeordnet werden kann.

Wird der Empfänger bewegt, so werden sich aus Sicht eines ruhenden Beobachters die Winkel ändern und betragen für ihn α bzw. β. Der durch das bewegte System verlaufende Lichtstrahl entspricht dann einer Länge von d. Bei den Berechnungen ist zu berücksichtigen, dass wie bereits ausgeführt durch die Längenkontraktion eine angenommene Kugel sich in Bewegungsrichtung verformt (vgl. Abb. 2.13). Dabei entsprechen für eingehende Signale die geometrischen Abhängigkeiten der Abb. 2.14. Für den Signaleingang von hinten (Teil a) gelten die Zusammenhänge

$$d^2 = f^2 + (e + b - g)^2 \tag{2.40}$$

und

$$f = d \cdot sin\alpha \qquad f = a \cdot sin\alpha' \tag{2.41}$$

Außerdem gilt

$$e = a \cdot cos\alpha' \tag{2.42}$$

$$\frac{b}{v} = \frac{d}{c} \tag{2.43}$$

$$e - g = \frac{e}{\gamma} \tag{2.44}$$

Hieraus folgt zunächst

$$a = d \cdot \frac{sin\alpha}{sin\alpha'} \tag{2.45}$$

Nach Umformung entwickelt sich Gl. (2.40) dann zu

$$d^2 = (d \cdot sin\alpha)^2 + \left(d\frac{v}{c} + d\frac{cos\alpha' \cdot sin\alpha}{\gamma \cdot sin\alpha'}\right)^2 \tag{2.46}$$

$$1 - sin^2\alpha = cos^2\alpha = \left(\frac{v}{c} + \frac{sin\alpha}{\gamma \cdot tan\alpha'}\right)^2 \tag{2.47}$$

$$tan\alpha' = \frac{sin\alpha}{\gamma\left(\pm\, cos\alpha - \frac{v}{c}\right)} \tag{2.48}$$

wobei aufgrund der geometrischen Gegebenheiten nur positive Werte für $cos\alpha$ zu berücksichtigen sind. Für den Signaleingang von vorn (Abb. 2.14b) gelten die Zusammenhänge

$$d^2 = f^2 + (e - b - g)^2 \tag{2.49}$$

Dies führt dann nach gleicher Rechnung wie zuvor zu

$$tan\beta' = \frac{sin\beta}{\gamma\left(cos\beta + \frac{v}{c}\right)} \tag{2.50}$$

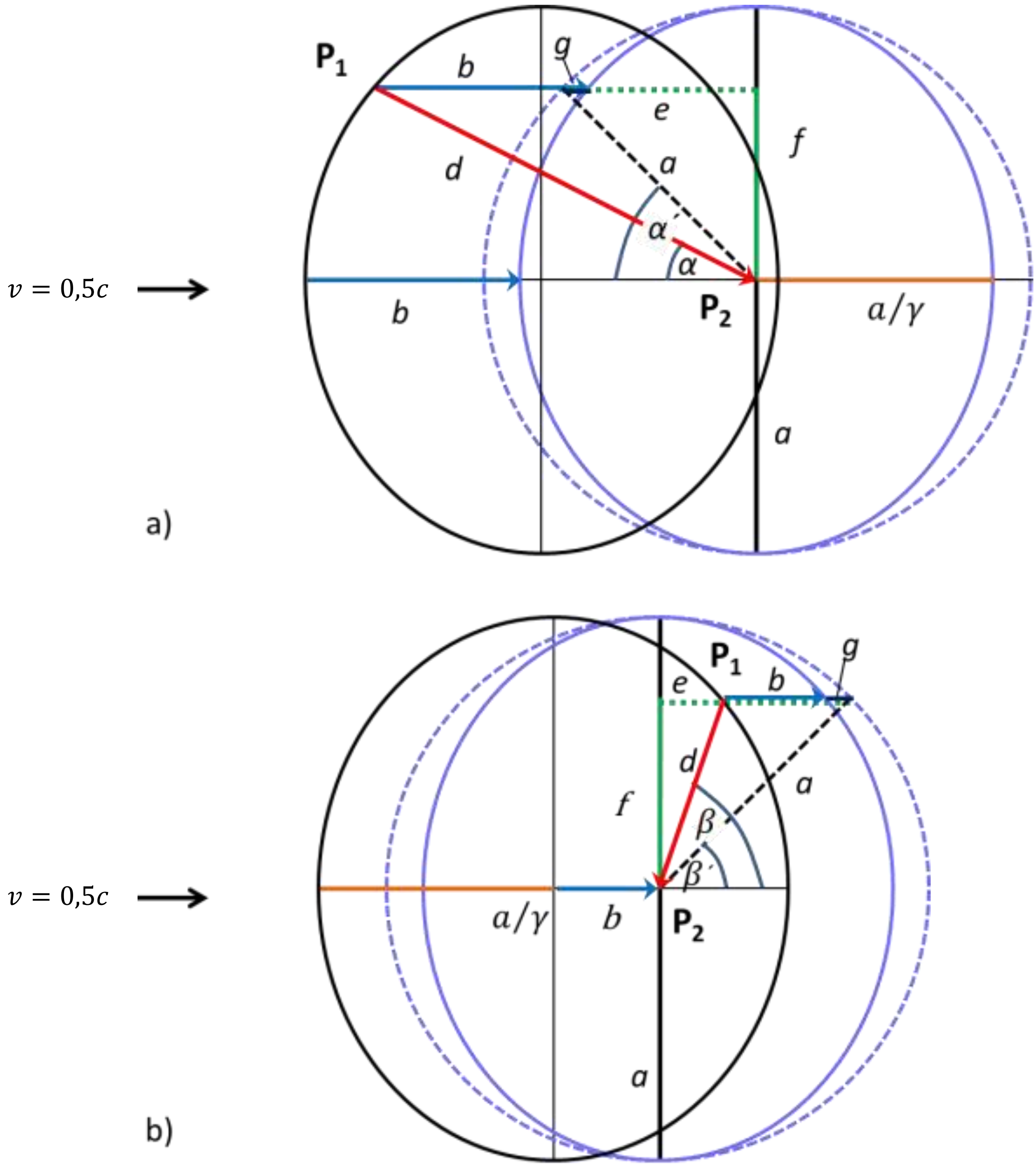

Abb. 2.14: Definition der Größen zur Bestimmung des subjektiven Eingangswinkelsfür einen bewegten Beobachter (Beispiele für $v = 0{,}5c$ und $\alpha', \beta' = 45°$)
a) Signaleingang in Bewegungsrichtung, b) Signaleingang von vorn

Bevor die Ergebnisse diskutiert werden, soll zunächst der umgekehrte Fall für ausgehende Signale untersucht werden.

2.3.2 Ausstrahlung vom bewegten Körper

Für die ausgehenden Signale gelten vergleichbare Beziehungen. Die für einen ruhenden Beobachter gültigen Zusammenhänge sind aus dem Diagramm 2.15 zu entnehmen. Hierbei wird das Lichtsignal vom Mittelpunkt ausgestrahlt (P_1) und trifft auf eine Bohrung in der Außenwand (P_2). Auch hierbei muss die Längenkontraktion des Beobachters berücksichtigt werden.

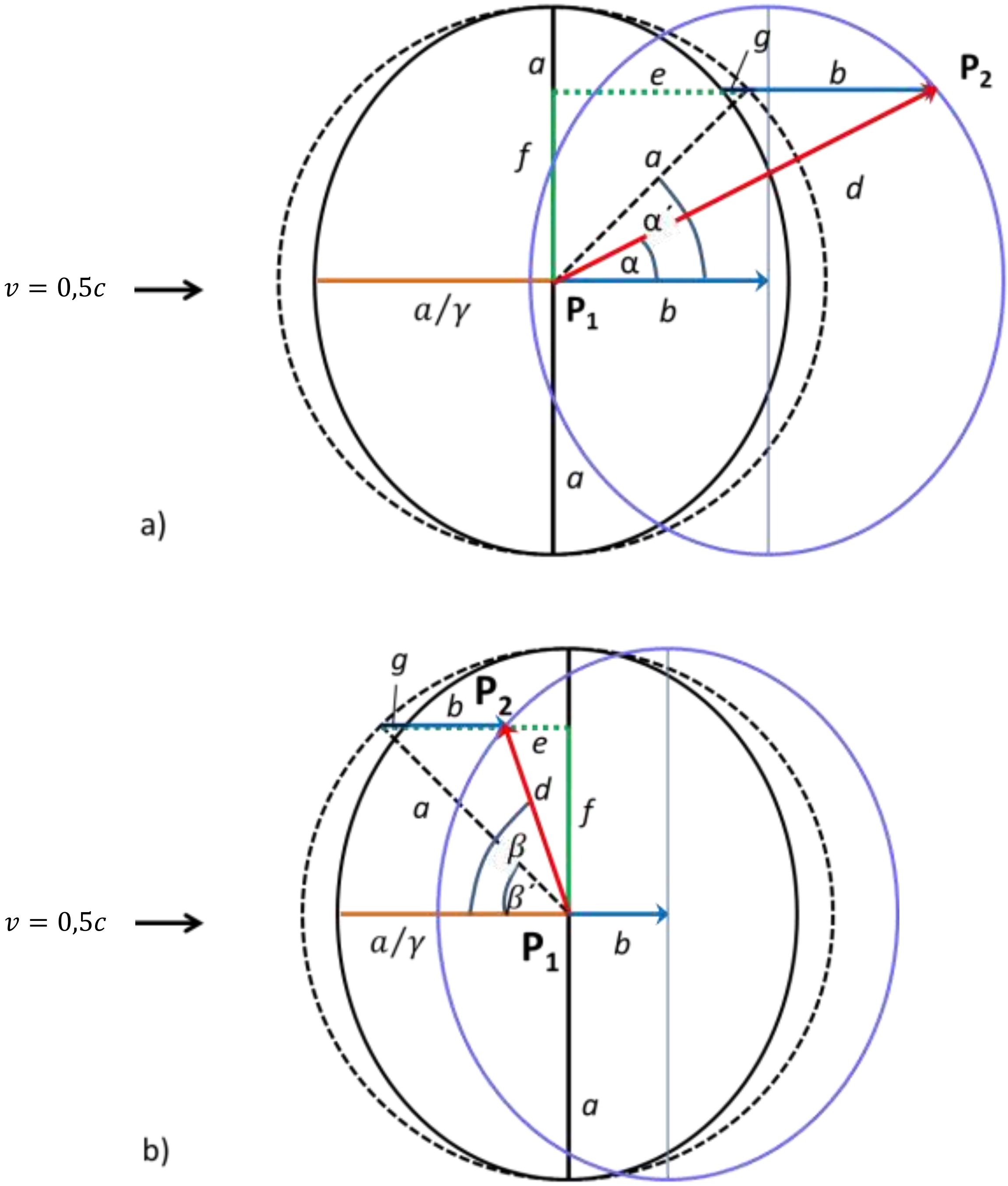

Abb. 2.15: Definition der Größen zur Bestimmung des subjektiven Ausgangswinkels für einen bewegten Beobachter (Beispiele für $v = 0{,}5c$ und $\alpha', \beta' = 45°$)
a) Signalausgang in Bewegungsrichtung, b) Signalausgang zurück

Für den Signalausgang in Bewegungsrichtung (Abb. 2.15a) ergeben sich exakt die gleichen Bedingungen wie beim Signaleingang entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung, die in den Gleichungen Gl. (2.40) bis Gl. (2.48) dargestellt sind. Für den Signalausgang nach hinten (Abb. 2.15b) gilt der umgekehrte Fall und es ergibt sich als Ergebnis Gl. (2.50).

2.3.3 Ergebnisse der Winkelbestimmungen

Zunächst sei an dem Beispiel aus Kapitel 2.1.2 gezeigt, dass die dort auftretenden Winkel für den unbewegten und den bewegten Beobachter übereinstimmen. Dazu werden die Signalverläufe mit den zugehörigen Winkeln betrachtet. Aus Sicht des unbewegten Beobachters A beginnt der Vorgang mit dem Aussenden des Signals 1, dann trifft Signal 2 ein und wird zurückgesendet, abschließend trifft das zurückgesendete Signal 1 ein. Die Winkel für ausgehende Signale werden mit ε, für eingehende mit δ gekennzeichnet.

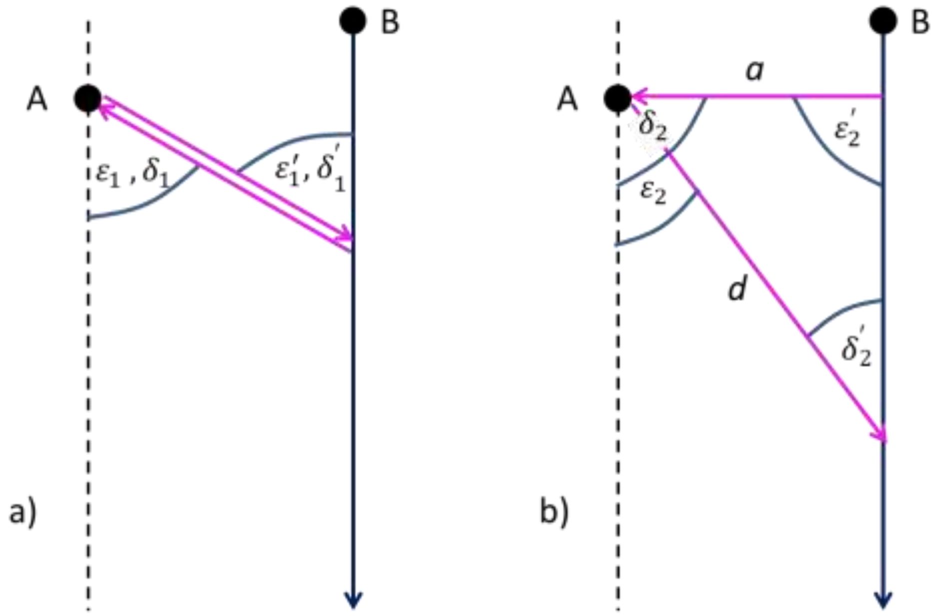

Abb. 2.16: Signalverlauf der in Kap. 2.1 dargestellten Situation mit entsprechenden Winkeln, Beispiel für $v = 0{,}5c$

Aufgrund der gewählten Situation lassen sich folgende Randbedingungen definieren:

- Die Eingangswinkel δ_2 und δ_1' betragen 90°.
- Eingangswinkel δ_1 und Ausgangswinkel ε_1 sind gleich.
- Der Ausgangswinkel ε_2 errechnet sich aus Gl. (2.23) zu

$$\varepsilon_2 = arcsin\left(\frac{a}{d}\right) = arcsin\left(\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{1+\frac{v^2}{c^2}}\right) = 36{,}87° \tag{2.51}$$

Hieraus ergeben sich für $v = 0{,}5c$ folgende Berechnungen:

	Ausgangswert	Formel	Ergebnis
1	$\delta_1' = 90°$	$tan\delta_1' = \frac{sin\varepsilon_1}{\gamma\left(cos\varepsilon_1 + \frac{v}{c}\right)}$	$\varepsilon_1 = 60°$
2	$\delta_2 = 90°$	$tan\varepsilon_2' = \frac{sin\delta_2}{\gamma\left(cos\delta_2 + \frac{v}{c}\right)}$	$\varepsilon_2' = 60°$
3	$\varepsilon_2 = 36{,}87°$	$tan\delta_2' = \frac{sin\varepsilon_2}{\gamma\left(cos\varepsilon_2 - \frac{v}{c}\right)}$	$\delta_2' = 60°$
4	$\delta_1 = 60°$	$tan\varepsilon_1' = \frac{sin\delta_1}{\gamma\left(cos\delta_1 + \frac{v}{c}\right)}$	$\varepsilon_1' = 36{,}87°$

Tab. 2.3: Berechnung der Winkel für die Situation gemäß Abb. 2.16

Es ist klar zu erkennen, dass A und B die gleichen Winkel für ausgehende (60°, 36,87°) und eingehende (90°, 60°) Signale feststellen. Es ist damit gezeigt, dass das Relativitätsprinzip auch für Winkelmessungen anwendbar ist und dass die symmetrische Aufteilung der Raumkontraktion um die Mittelachse korrekt sein muss.

2.3.4 Literaturvergleich und Bewertung

Folgende einfache Form einer Ableitung der Aberrationsformel im relativistischen Bereich wurde von D. Giulini dargestellt [19], bei der die Abstrahlung eines Lichtimpulses von einem Beobachter mit den Koordinaten x_0 und y_0 in einem unbewegten System bzw. x_0' und y_0' bezogen auf ein hierzu mit der Geschwindigkeit v bewegtes System auf den jeweiligen Koordinatenursprung betrachtet wird. Dabei sind δ und δ' die jeweiligen Winkel zur x-Achse. Zum Zeitpunkt $t = t_0 = t_0'$ treffen die Systeme im Nullpunkt aufeinander. Dann gilt für die Geschwindigkeitskomponente u_x im unbewegten System

$$u_x = -c \cdot cos\delta \tag{2.60}$$

und im bewegten System

$$u_x' = -c \cdot cos\delta' \tag{2.61}$$

Eingesetzt in die relativistische Gleichung der Geschwindigkeitsaddition

$$u_x' = \frac{u_x + v}{1 + \frac{u_x \cdot v}{c^2}} \tag{2.62}$$

ergibt sich die Form

$$cos\delta' = \frac{cos\delta - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c} \cdot cos\delta} \tag{2.63}$$

Umfassendere Darstellungen der Herleitung kommen zum gleichen Ergebnis (z. B. von R. K. Pathria [27]). Aus der Literatur sind weitere Ableitungen bekannt, z. B. [28,89a] mit

$$sin\delta' = \frac{sin\delta}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c} \cdot cos\delta\right)} = \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} sin\delta}{1 - \frac{v}{c} \cdot cos\delta} \tag{2.64}$$

Eine weitere nützliche Darstellung [19,28] erreicht man unter Verwendung der allgemeingültigen Halbwinkelformel für den Tangens mit

$$tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{sin\theta}{1 + cos\theta} \tag{2.65}$$

Werden hier die Formeln aus Gl. (2.63) und Gl. (2.64) eingesetzt, so ergibt sich

$$tan\left(\frac{\delta'}{2}\right) = \frac{sin\delta}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c}\right)(1 + cos\delta)} \tag{2.66}$$

$$tan\left(\frac{\delta'}{2}\right) = \left(\frac{c - v}{c + v}\right)^{1/2} tan\left(\frac{\delta}{2}\right) \tag{2.67}$$

Diese Formel erlaubt es, durch einfache Umstellung der Gleichung Werte von δ in Abhängigkeit von δ' zu bestimmen. Im Folgenden werden Ergebnisse aus allen Formeln berechnet und miteinander verglichen. Hierbei ist zu berücksichtigen, dass Umkehrfunktionen (arc) für Winkel zwischen 0 und 180° nicht exakt definiert sind, wenn sie einen Sinus enthalten. Dies liegt daran, dass anders als beim Kosinus, der in diesem Intervall monoton fallend ist, die sinusförmige Welle bei 90° ein Maximum aufweist und daher die Umkehrfunktion 2 mögliche Lösungen hat. Aus diesem Grund wurden Ergebnisse für Werte >90° entsprechend den Angaben in Tab. 2.4 bzw. 2.5 angepasst. (Der Tangens ist zwischen 0 und 90° monoton steigend, was gemäß der Halbwinkelformel ausreichend ist).

1: $\alpha' = arctan\left(\frac{sin\alpha}{\gamma\left(cos\alpha - \frac{v}{c}\right)}\right)$	**2**: $\alpha' = arccos\left(\frac{cos\alpha - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c} \cdot cos\alpha}\right)$
3: $\alpha' = arcsin\left(\frac{sin\alpha}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c} \cdot cos\alpha\right)}\right)$	**4**: $\alpha' = 2 \cdot arctan\left[\left(\frac{c + v}{c - v}\right)^{1/2} tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]$

α		1		2		3		4	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,523599	30	0,869038	49,79	0,869038	49,79	0,869038	49,79	0,869038	49,79
0,785398	45	1,244669	71,31	1,244669	71,31	1,244669	71,31	1,244669	71,31
1,047198	60	1,570796	90,00	1,570796	90,00	1,570796	90,00	1,570796	90,00
1,570796	90	-1,047198	120,00	2,094395	120,00	1,047198	120,00	2,094395	120,00
2,094395	120	-0,643501	143,13	2,498092	143,13	0,643501	143,13	2,498092	143,13
2,356194	135	-0,469475	153,10	2,672117	153,10	0,469475	153,10	2,672117	153,10
2,617994	150	-0,306968	162,41	2,834625	162,41	0,306968	162,41	2,834625	162,41
3,141593	180	0	180,00	3,141593	180,00	0	180,00	3,141593	180,00

Tab. 2.4: Werte für α' in Abhängigkeit von α gemäß Formeln 1 bis 4, $v = 0{,}5c$
Winkelangabe im Bogenmaß und in Grad [°] (grau unterlegt).
Felder mit Rahmen: 180°+Winkel (für 1) und 180°-Winkel (für 3)

5: $\beta' = arctan\left(\frac{sin\beta}{\gamma\left(cos\beta + \frac{v}{c}\right)}\right)$	**6**: $\beta' = arccos\left(\frac{cos\beta + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c} \cdot cos\beta}\right)$
7: $\beta' = arcsin\left(\frac{sin\beta}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c} \cdot cos\beta\right)}\right)$	**8**: $\beta' = 2 \cdot arctan\left[\left(\frac{c - v}{c + v}\right)^{1/2} tan\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]$

β		5		6		7		8	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,523599	30	0,306968	17,59	0,306968	17,59	0,306968	17,59	0,306968	17,59
0,785398	45	0,469475	26,90	0,469475	26,90	0,469475	26,90	0,469475	26,90
1,047198	60	0,643501	36,87	0,643501	36,87	0,643501	36,87	0,643501	36,87
1,570796	90	1,047198	60,00	1,047198	60,00	1,047198	60,00	1,047198	60,00
2,094395	120	1,570796	90,00	1,570796	90,00	1,570796	90,00	1,570796	90,00
2,356194	135	-1,244669	108,69	1,896924	108,69	1,244669	108,69	1,896924	108,69
2,617994	150	-0,869038	130,21	2,272555	130,21	0,869038	130,21	2,272555	130,21
3,141593	180	0	180	3,141593	180	0	180	3,141593	180

Tab. 2.5: Werte für β' in Abhängigkeit von β gemäß Formeln 5 bis 8, $v = 0{,}5c$
Winkelangabe im Bogenmaß und in Grad [°] (grau unterlegt).
Felder mit Rahmen: 180°+Winkel (für 5) und 180°-Winkel (für 7)

Die bisherigen Betrachtungen der Gleichungen 1 - 8 waren ausschließlich gerichtet auf den Abstrahlungswinkel für einen Lichtimpuls, der für einen ruhenden Beobachter messbar ist und dann für die Bedingungen in einem bewegten System umgerechnet wurde. Dabei tragen definitionsgemäß in Bewegungsrichtung ausgerichtete Winkel die Bezeichnung α (für das unbewegte System) und α' (bewegt), während β und β' entgegengesetzt dazu liegen. Wie bereits in Kap. 2.3.2 ausgeführt, entsprechen bei der Betrachtung dieses umgekehrten Falls die für einen bewegten Beobachter messbaren Winkel bezogen auf ein ruhendes System exakt den entgegengesetzten Werten. Dies bedeutet, dass Messungen in Bewegungsrichtung mit Winkel α formal das Ergebnis entsprechend für β' aufweisen und dies für β und α' ebenfalls der Fall ist.

Dies gilt zunächst nur für die vorgenommene Ableitung der Gleichung 1. Das gleiche Ergebnis erhält man aber darüber hinaus auch sofort für Gleichung 4, die sich leicht nach α umstellen lässt.

Während die Beziehungen für eingehende Signale oft behandelt werden, ist dies für ausgehende Signale nur in wenigen Fällen der Fall. Von R. Göhring [47] werden dazu die für den eingehenden Fall gewonnenen Gleichungen nach α' aufgelöst und es zeigt sich, dass die auf diese Weise gewonnenen Ergebnisse mit den nachfolgenden Gleichungen übereinstimmen. Von W. Rindler [28] wird darüber hinaus ausgeführt, dass in den jeweiligen Formeln der Wert für c durch $-c$ ersetzt werden muss und sich dann die entsprechenden Beziehungen ergeben. Wird dies für alle der untersuchten Varianten überprüft, so ergibt sich auch hier eine völlige Übereinstimmung.

Die Ergebnisse lassen sich also folgendermaßen darstellen:

1: $\alpha = arctan\left(\frac{sin\alpha'}{\gamma\left(cos\alpha' + \frac{v}{c}\right)}\right)$	**2**: $\alpha = arccos\left(\frac{cos\alpha' + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c} \cdot cos\alpha'}\right)$
3: $\alpha = arcsin\left(\frac{sin\alpha'}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c} \cdot cos\alpha'\right)}\right)$	**4**: $\alpha = 2 \cdot arctan\left[\left(\frac{c - v}{c + v}\right)^{1/2} tan\left(\frac{\alpha'}{2}\right)\right]$

Die gleiche Umstellung gilt auch für den entgegengesetzten Fall:

5: $\beta = arctan\left(\frac{sin\beta'}{\gamma\left(cos\beta' - \frac{v}{c}\right)}\right)$	**6**: $\beta = arccos\left(\frac{cos\beta' - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c} \cdot cos\beta'}\right)$
7: $\beta = arcsin\left(\frac{sin\beta'}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c} \cdot cos\beta'\right)}\right)$	**8**: $\beta = 2 \cdot arctan\left[\left(\frac{c + v}{c - v}\right)^{1/2} tan\left(\frac{\beta'}{2}\right)\right]$

Abschließend kann zusammengefasst werden, dass der abgeleitete Formalismus eine Berechnung der relativistischen Aberration von unbewegten Systemen in bewegte und umgekehrt gestattet. Dabei treten für Beobachter in bewegten und unbewegten Systemen die gleichen Werte für die gemessenen Aberrationswinkel auf womit das Relativitätsprinzip gewahrt ist. Voraussetzung dafür ist, dass der Effekt der Längenkontraktion berücksichtigt wird und dass dieser symmetrisch in Bewegungsrichtung und entgegengesetzt dazu aufgeteilt ist.

In der praktischen Umsetzung ist für Berechnungen Variante 2 oder 4 vorzuziehen, weil diese keine Sinusfunktion enthalten und daher keine Interpretation des Resultats für Winkel >90° erforderlich ist. Der eigentliche Vorteil der hier vorgenommenen geometrischen Ableitung (d. h. Gleichungen 1 und 5) zeigt sich erst, wenn statt Lichtsignalen die Bewegung mit Unterlichtgeschwindigkeiten untersucht wird. In diesem Fall kann die Variante 1 bzw. 5 durch einfachen Austausch von c durch die Geschwindigkeit v des zweiten bewegten Objekts modifiziert werden, was mit den anderen Ableitungen nicht möglich ist. Dies wird wichtig bei Untersuchungen zum Impulsaustausch, die in Kap. 7 behandelt werden.

2.4 Signalaustausch in beliebigen Raumrichtungen

Nachdem nun die grundsätzlichen Gegebenheiten für den Signalverlauf in beliebigen Raumrichtungen abgeleitet wurden, kann abschließend der Nachweis erfolgen, dass ein Signal in einem bewegten System (hier in Form einer Kugel mit dem normierten Radius $a = 1$) vom Zentrum zur Außenschale und zurück subjektiv die gleiche Zeit benötigt wie im ruhenden System. Hierzu werden folgende Randbedingungen definiert:

1. Es wird ein beliebiger Winkel α' (bezogen auf die Bewegungsrichtung) für das bewegte System festgelegt, unter der das Lichtsignal vom Mittelpunkt der Kugel abgestrahlt wird. Danach erfolgen die folgenden Berechnungen:
2. Der zugehörige Winkel α_1 des (ruhenden) Referenzsystems,

3. Die Weglänge d_1 bis zum Erreichen der Außenkugel,
4. Der Winkel α_2 für den Rückweg zur Mitte mit gleichem Winkel α',
5. Die Weglänge d_2,
6. Bestimmung von $d_T = d_1 + d_2$. Der Wert von d_T muss exakt $2a\gamma$ sein, damit subjektiv für Messungen aus beiden Referenzsystemen das Relativitätsprinzip gewahrt ist.

Zur Berechnung werden die Gleichungen (2.45) und (2.67) genutzt und es ergeben sich folgende Zusammenhänge:

2: $\alpha_1 = 2 \cdot arctan\left[\left(\frac{c-v}{c+v}\right)^{1/2} tan\left(\frac{\alpha'}{2}\right)\right]$	**3**: $d_1 = \frac{sin\alpha'}{sin\alpha_1}$
4: $\alpha_2 = 2 \cdot arctan\left[\left(\frac{c+v}{c-v}\right)^{1/2} tan\left(\frac{\alpha'}{2}\right)\right]$	**5**: $d_2 = \frac{sin\alpha'}{sin\alpha_2}$

In der Tabelle 2.6 sind Berechnungen für das Beispiel $v = 0{,}5c$ zusammengestellt. Für die Werte $\alpha' \to 0°$ und 180° ergibt sich bezüglich α_1 und α_2 eine Division von 0 durch 0 und es müsste extrapoliert werden, zur Vereinfachung wurden nur Werte zwischen 1° bis 179° ausgewählt. Die Werte in Bewegungsrichtung bzw. entgegengesetzt dazu, d. h. bei 0 und 180° wurden bereits auf andere Weise in Kapitel 2.1 ermittelt.

Für alle Werte d_T ergibt sich ein Ergebnis von 2γ (hier für $v = 0{,}5c \Rightarrow 2\gamma = 2{,}309401..$). Dies bedeutet, dass der aus Sicht des ruhenden Beobachters zurückgelegte Weg des Impulses genau um diesen Faktor länger ist und damit auch die erforderliche Zeit für die Impulsübertragung. Alle Werte zeigen eindeutig, dass keine Abweichungen zwischen den subjektiv bestimmten Ergebnissen eines ruhenden und bewegten Beobachters festzustellen sind, da die Zeit im bewegten System genau um diesen Faktor langsamer abläuft. Auch hier wird also das Relativitätsprinzip nicht verletzt.

α' [°]	α'	α_1	α_1 [°]	d_1	α_2	α_2 [°]	d_2	d_T
1	0,017453	0,010077	0,577360	1,731963	0,030228	1,731963	0,577438	2,309401
15	0,261799	0,151727	8,693343	1,712378	0,448391	25,69090	0,597023	2,309401
30	0,523599	0,306968	17,58795	1,654701	0,869038	49,79218	0,654701	2,309401
45	0,785398	0,469475	26,89895	1,562949	1,244669	71,31426	0,746452	2,309401
60	1,047198	0,643501	36,86990	1,443376	1,570796	90	0,866025	2,309401
75	1,308997	0,834062	47,78826	1,304130	1,851500	106,0831	1,005271	2,309401
90	1,570796	1,047198	60	1,154701	2,094395	120	1,154701	2,309401
105	1,832596	1,290093	73,91689	1,005271	2,307530	132,2117	1,304130	2,309401
120	2,094395	1,570796	90	0,866025	2,498092	143,1301	1,443376	2,309401
135	2,356194	1,896924	108,6857	0,746452	2,672117	153,1010	1,562949	2,309401
150	2,617994	2,272555	130,2078	0,654701	2,834625	162,4120	1,654701	2,309401
165	2,879793	2,693202	154,3091	0,597023	2,989865	171,3067	1,712378	2,309401
179	3,124139	3,111364	178,2680	0,577438	3,131516	179,4226	1,731963	2,309401

Tab. 2.6: Berechnung der Werte für $d_T = d_1 + d_2$ gemäß Gl. 2 bis 5, $v = 0{,}5c$.
Die Werte entsprechen exakt $2\gamma = 2{,}309401$