

12. Schlussfolgerungen und Vorschläge zur Modifikation

Mit dem von Einstein postulierten Relativitätsprinzip, den von Larmor, Lorentz und Poincaré entwickelten Transformationsgleichungen und der relativistischen Masseerhöhung bei steigender Geschwindigkeit können alle denkbaren Konstellationen zwischen bewegten Körpern in Inertialsystemen widerspruchsfrei beschrieben werden. Eine Vielzahl von Versuchsergebnissen zu diesem Themengebiet wurde bereits diskutiert.

Hiermit sind jedoch nicht alle kosmologischen Themen hinreichend abgedeckt. Zu Beginn der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts wurde entdeckt, dass im Universum eine kosmische Hintergrundstrahlung existiert, die in allen Raumrichtungen völlig gleichmäßig verläuft. Aufbauend auf den bereits zum Ende des 19. Jahrhunderts entwickelten Äthertheorien wurde insbesondere aufgrund dieser Beobachtungen erneut versucht, die spezielle Relativitätstheorie mit einem übergeordneten Ruhezustand in Einklang zu bringen. Keiner der Ansätze war jedoch erfolgreich und es traten stets Widersprüche zu experimentellen Befunden auf. Die wichtigsten Theorien aus den Anfängen und die Weiterentwicklungen werden hier erläutert. Außerdem wird die bereits in Kap. 3.4 diskutierte Einstein Synchronisation erneut diskutiert und bewertet.

Weiterhin wird nachgewiesen, dass sich bei Verwendung von Lichtimpulsen zum Signalaustausch bei der Betrachtung von zwei beliebig zueinander bewegten Beobachtern zusätzlich ein übergeordnetes System absoluter Ruhe integrieren lässt. Dieses kann unter ausschließlicher Verwendung der Lorentz-Transformation widerspruchsfrei eingebunden werden. Dies wird zunächst für den Fall gezeigt, dass zwei Beobachter sich auf einer Geraden bezüglich des Ruhesystems befinden, anschließend für beliebige Konstellationen.

12.1 Alternative Theorien

Im folgenden Kapitel sollen Theorien dargestellt werden, die nicht mit dem Formalismus der Lorentz-Transformation (LT) übereinstimmen. Sie wurden entwickelt, um die „Relativität der Gleichzeitigkeit“ zu umgehen, die integraler Bestandteil der LT ist. Stattdessen wurde eine absolute und in allen Inertialsystemen gleiche Zeit eingeführt. Obwohl diese Theorien einer experimentellen Prüfung in ihrer ursprünglichen Form nicht standhalten, sind sie doch aus historischer Sicht wichtig und teilweise noch heute Basis für die Suche nach Verletzungen der LT.

12.1.1 Einfache Addition der Geschwindigkeiten

In der Anfangsphase der Diskussionen um Lichtgeschwindigkeit und „Ätherdrift“ wurde vielfach angenommen, dass die Geschwindigkeit der Bewegung eines Beobachters (mit einer von ihm mitgeführten Messvorrichtung) und die Lichtgeschwindigkeit einfach addiert werden können [12c]. Auch bei den theoretischen Ansätzen des Michelson-Morley-Versuchs wird dies bei der Berechnung der Werte für Hin- und Rückweg der ausgesandten Lichtstrahlen angenommen [7].

Es wurde jedoch bereits 1913 von W. de Sitter durch Betrachtung von Doppelsternsystemen gezeigt, dass die Lichtgeschwindigkeit unabhängig von der Geschwindigkeit des Körpers ist, der die Signale aussendet [55]. Damit war der erste Nachweis erbracht, dass diese Annahme nicht den Tatsachen entsprechen kann.

12.1.2 Theorie des „Neo-Lorentzianismus“

Nach einer ähnlichen Idee wie unter Kap. 12.1.1 beschrieben wurde von H. Ives und weiterentwickelt von J. S. Prokhovnik [74] angenommen, dass in allen Punkten des Universums ein (ruhendes) Referenzsystem S existiert. Bewegt sich relativ dazu ein anderes Inertialsystem A so wird diesem als einziges Merkmal die Eigenschaft zugeordnet, dass der Raum sich gemäß

$$x_A = \frac{x_S}{\gamma} \quad (12.01)$$

verkürzt. Für den Hin- und Rückweg eines Lichtsignals werden unterschiedliche Geschwindigkeiten angenommen, und zwar

$$c_1 = c + u_A \quad (12.02)$$

$$c_2 = c - u_A \quad (12.03)$$

Die Eigenschaften für die Zeit lassen sich dann für den geschlossenen Hin- und Rückweg eines Lichtsignals berechnen

$$t_A = \frac{x_A}{c_1} + \frac{x_A}{c_2} = \frac{x_S(c - u_A + c + u_A)}{\gamma(c + u_A)(c - u_A)} = \frac{2x_S}{c} \gamma = \gamma t_S \quad (12.04)$$

Dies würde bedeuten, dass die Zeitdilatation nur scheinbar auftritt. Da dieser Effekt innerhalb des Inertialsystems auf einfache Weise z. B. wegen Synchronisationsunterschieden messbar sein müsste, aber nicht zu finden ist, wird diese Theorie heute nicht mehr diskutiert. Interessant sind aber die Beteiligten, insbesondere H. Ives (1882-1953). Er war Zeit seines Lebens ein erklärter Gegner Einsteins und versuchte dabei neben der Aufstellung einer alternativen Theorie ihn in vielfältiger Weise zu diskreditieren. So bestritt er die Urheberschaft Einsteins an der Speziellen Relativitätstheorie und versuchte auch nachzuweisen, dass der Ausdruck

$$E = mc^2 \quad (6.17)$$

ursprünglich nicht von Einstein stammt [75]. Trotzdem hat er mit dem auch nach ihm benannten Ives-Stilwell Experiment [17,18] einen Beweis für die Zeitdilatation von bewegten

Körpern erbracht und damit auch – sicher unbeabsichtigt – die Gültigkeit der Lorentz-Gleichungen gestützt.

12.1.3 RMS Test Theorie

Eine andere alternative Theorie wurde auf Basis der Vorschläge von H. Robertson [59] durch R. Mansouri und R. Sexl formuliert [24] und wird heute allgemein als Robertson-Mansouri-Sexl- oder RMS-Theorie bezeichnet. Hierbei wird angenommen, dass ein System absoluter Ruhe (bezeichnet als „Äthersystem“) existiert. Für die Notation der Koordinaten des Äthersystems werden Großbuchstaben, für die des bewegten Systems kleine Buchstaben verwendet. Es werden dafür allgemein die Transformations-Gleichungen

$$t = aT + \varepsilon x \quad (12.10)$$

$$x = b(X - vT) \quad (12.11)$$

aufgestellt, wobei die Faktoren a und b aus Messungen (Michelson-Morley und Kennedy-Thorndike Experimente) und ε aufgrund der Synchronisationsbedingungen als

$$\frac{1}{a} = b = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad \varepsilon = -v \quad (12.12)$$

bestimmt werden. Daraus folgt

$$t = \frac{T}{\gamma} - vx \quad (12.13)$$

$$x = \gamma(X - vT) \quad (12.14)$$

Die Gl. (12.14) entspricht offensichtlich der Lorentz-Transformation gemäß Gl. (1.08). Die Gl. (12.13) lässt sich umformen, und zwar

$$t = \frac{T}{\gamma} - vx = \gamma T(1 - v^2) - vx = \gamma T - \gamma T v^2 - vx \quad (12.15)$$

Wird Gl. (12.11) nach T aufgelöst so folgt

$$T = \frac{X - \frac{x}{\gamma}}{v} \quad (12.16)$$

und damit

$$t = \gamma T - \gamma \frac{X - \frac{x}{\gamma}}{v} v^2 - vx = \gamma T - \gamma v X + vx - vx \quad (12.17)$$

und

$$t = \gamma(T - vX) \quad (12.18)$$

Die Gleichungen entsprechen also exakt der Lorentz-Transformation. Beim Ansatz nach Mansouri-Sexl wird jetzt aber unterstellt, dass beim Passieren eines bewegten Systems und Gleichsetzung der Ursprungskoordinaten ein Uhrenabgleich gemäß

12. Schlussfolgerungen und Vorschläge zur Modifikation

$$\Delta t = -vx \quad (12.19)$$

durchgeführt wird. Die Gleichung (12.13) erhält dadurch die Form

$$t = \frac{T}{\gamma} \quad (12.20)$$

In einer grafischen Darstellung führt das zu der in Abb. 12.1 dargestellten Situation. Es ist klar, dass hierdurch bei einer späteren Synchronisation mit Lichtsignalen ein Unterschied innerhalb des Systems feststellbar sein müsste, was sich aber experimentell nicht nachweisen lässt [54,75].

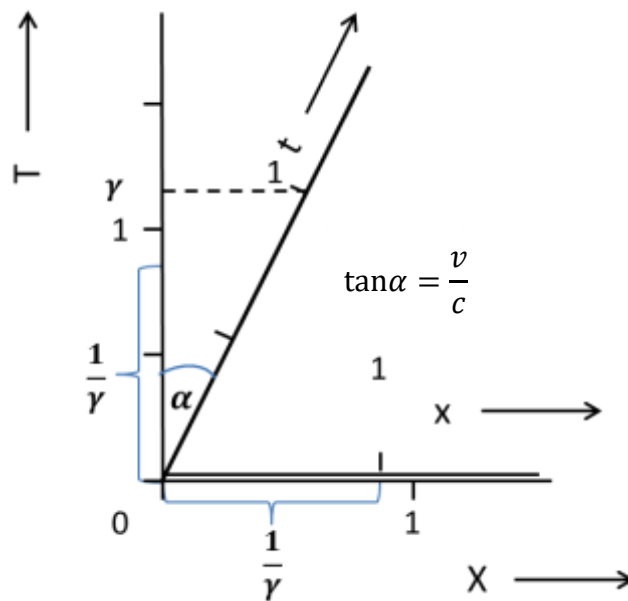


Abb. 12.1: Weg-Zeit-Diagramm entsprechend Gleichung Gl. (12.18) (entnommen aus [24])

Obwohl die Theorie offensichtliche Mängel hat, wird sie noch heute weiterentwickelt [54]. Der Grund liegt darin, dass neuere Ansätze zu Quantengravitations- bzw. Stringtheorien Verletzungen der Lorentz-Transformation nahelegen. Zusammen mit den Beziehungen

$$y = d \cdot Y \quad z = d \cdot Z \quad (12.21)$$

wird versucht, Unterschiede zu den gemäß der Lorentz-Transformation gegebenen Beziehungen

$$\frac{1}{a} = b = \left[1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad d = 1 \quad (12.22)$$

zu finden. Man erhofft sich, dass bei steigender Genauigkeit von Experimenten des Typs Michelson-Morley, Kennedy-Thorndike und Ives-Stilwell diese festgestellt werden und dann in ein Gesamtbild integriert werden können. Beispiele für weiterführende hochgenaue Messungen sind z. B. in [76,77,78,79] dargestellt, bisher konnten jedoch keine Verletzungen der Lorentz-Invarianz experimentell bestätigt werden.

11.1.4 Weitere Alternativen

Es wurden in der Vergangenheit weitere vom Formalismus der Lorentz-Gleichungen abweichende Alternativen formuliert. Dies erfolgt in aller Regel im Zusammenhang mit der Weiterentwicklung der „Allgemeinen Relativitätstheorie“ und hat zum Ziel, einen übergeordneten Ansatz zu entwickeln und diesen mit der Quantenmechanik zu verbinden. Die Theorien sind teilweise hoch komplex, haben aber trotz aller Bemühungen in den letzten Jahrzehnten nicht zu verwertbaren Resultaten geführt. Hier stellt sich die Frage, warum ein solcher Aufwand getrieben wird und ob er zu rechtfertigen ist. Dazu soll aus einer neueren Studie von C. M. Will zitiert werden [64]:

[Übersetzung:] „Wir erkennen, dass die Allgemeine Relativitätstheorie allen mit größtmöglicher Sorgfalt durchgeführten Experimenten entspricht. Nun stellt sich die Frage: Warum machen wir damit weiter? Eine Antwort ist, dass die Schwerkraft eine der fundamentalsten Eigenschaften der Natur ist und daher die größtmögliche empirische Untermauerung verdient. Eine andere, dass alle Versuche zur Quantisierung der Schwerkraft und zur Vereinheitlichung mit den anderen Kräften vermuten lassen, dass die Allgemeine Relativitätstheorie von Einstein nicht das letzte Wort ist... Obwohl es erstaunlich ist, dass diese Theorie, die vor mehr als 80 Jahren aus reiner Gedankenkraft geboren wurde, bis heute überlebt hat, wird die Möglichkeit zum Auffinden einer Abweichung auch in den nächsten Jahrzehnten die Experimente vorantreiben.“

12.2 Bewertung der Einstein Synchronisation

Im Kapitel 3.4 wurde die Einstein Synchronisation bereits grundlegend betrachtet. Wegen der übergeordneten Bedeutung wird sie an dieser Stelle noch einmal genau untersucht. Hierzu sollen zunächst die theoretisch auftretenden Synchronisationsunterschiede in unbewegten und bewegten Systemen ermittelt werden.

Im nachfolgenden Raum-Zeit-Diagramm (Abb. 12.2) werden aus Sicht eines ruhenden Beobachters A die bezogen auf einen bewegten Beobachter B auftretenden Synchronisationsunterschiede ΔS und $\Delta S'$ wiedergegeben. Die Darstellung ist normiert (dies bedeutet $\Delta t = \Delta x = 1$), daher verlaufen im Diagramm Lichtimpulse stets im Winkel von 45° . Die angenommene Geschwindigkeit für B ist $v = x/t = 0,5c$.

Es werden die Fälle unterschieden, dass

- a) A ein Signal aussendet, das von B reflektiert wird,
- b) B ein Signal aussendet, das von A reflektiert wird.

In Tab. 12.1 sind die für die Berechnung der Synchronisationsdifferenzen wesentlichen Gleichungen zusammengestellt. Für A ist die Auswertung von Bild a) einfach und es folgt sofort aus Symmetriegründen $\Delta t_0 = \Delta t_2 = \Delta t_1$.

Bei der Betrachtung von b) ergibt sich dagegen eine komplexere Situation. Aus subjektiver Sicht von A wird der Impuls von B später ausgesandt (die Zeit läuft aus Sicht von A für B um den Faktor γ langsamer ab), trifft aber aufgrund der zunehmenden Entfernung von B während der Signalausbreitung früher ein als das von ihm abgestrahlte Signal bei B (zur genauen Definition siehe auch Kap. 2).

12. Schlussfolgerungen und Vorschläge zur Modifikation

Für A gilt also die Synchronisationsdifferenz

$$\Delta S = \Delta t_S \frac{1 - \frac{1}{\gamma}}{1 - \frac{v}{c}} \quad (12.30)$$

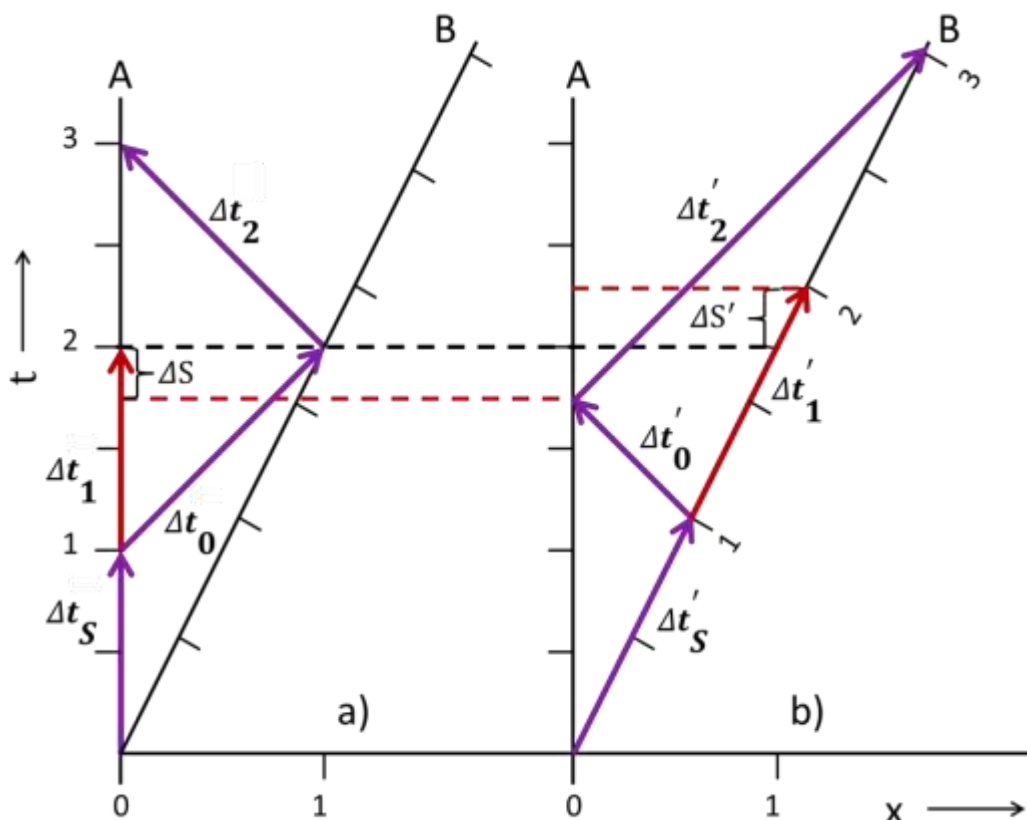


Abb. 12.2: Darstellung der Synchronisationsdifferenzen ΔS bzw. $\Delta S'$

Δt_S	$\Delta t'_S = \gamma \Delta t_S$
$\Delta t_0 = \Delta t_S \left[\frac{v}{c \left(1 - \frac{v}{c} \right)} \right]$	$\Delta t'_0 = \Delta t_S \gamma \frac{v}{c}$
$\Delta t_2 = \Delta t_S \left[\frac{v}{c \left(1 - \frac{v}{c} \right)} \right]$	$\Delta t'_2 = \Delta t_S \gamma \left[\frac{v \left(1 + \frac{v}{c} \right)}{c \left(1 - \frac{v}{c} \right)} \right]$
$\Delta S = \Delta t_S + \left[\frac{\Delta t_0 + \Delta t_2}{2} \right] - [\Delta t'_S + \Delta t'_0]$ $= \Delta t_S \frac{1 - \frac{1}{\gamma}}{1 - \frac{v}{c}}$	$\Delta S' = \Delta t'_S + \left[\frac{\Delta t'_0 + \Delta t'_2}{2} \right] - [\Delta t_S + \Delta t_0]$ $= \Delta t_S \frac{\gamma - 1}{1 - \frac{v}{c}}$

Tab. 12.1: Gleichungen zur Berechnung von ΔS bzw. $\Delta S'$

12.2 Bewertung der Einstein Synchronisation

Aus Sicht des bewegten Beobachters B in Bild b) ergibt sich eine vergleichbare Situation: Auch aus seiner Sicht trifft das Signal früher ein wobei hier

$$\Delta S' = \Delta t_s \frac{\gamma - 1}{1 - \frac{v}{c}} \quad (12.31)$$

gilt. Da für ihn die Zeit langsamer abläuft, sind die subjektiv ermittelten Werte aus beiden Systemen identisch und es ergibt sich

$$\Delta S' = \gamma \Delta S \quad (12.32)$$

Die Einstein-Synchronisation legt nun folgendes fest: Zum Zeitpunkt t_s bzw. t'_s wird von den Beobachtern A und B ein Signal ausgesandt. Beim Empfang durch B bzw. A gelten gleichartige Uhren dann als synchronisiert, wenn sie beim Eintreffen des Signals einen Wert von

$$t_1 = t_s + \frac{t_2 - t_0}{2} \quad (12.33)$$

oder

$$t'_1 = t'_s + \frac{t'_2 - t'_0}{2} \quad (12.34)$$

aufweisen.

Für das System a) ergibt sich die Gültigkeit der Festlegung unmittelbar aus der Darstellung im Diagramm und es gibt keine Unterschiede zu den durchgeführten Berechnungen. Für b) kommt es jedoch zu gravierenden Änderungen.

Eine wesentliche Aussage ist zunächst, dass $\Delta t'_1$ hiermit eindeutig festgelegt ist und die Aufteilung zwischen den Einzelzeiten $\Delta t'_0$ und $\Delta t'_2$ dabei keine Rolle spielt. Zusammen mit der Aussage, dass die Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen gleich ist, wird auf diese Weise die Synchronisationsdifferenz zu einer virtuellen Größe, die aus dem bewegten System heraus nicht bestimmbar ist. Da dieser Wert für einen ruhenden Beobachter aber bei der Übertragung von Impulsen mit Überlichtgeschwindigkeiten doch messbar wäre, darf es aufgrund dieser Festlegungen keine Informationsübertragung schneller als das Licht und auch kein System absoluter Ruhe geben. Hiermit wird also eine zentrale Aussage der Speziellen Relativitätstheorie beschrieben.

Die Einstein-Synchronisation ist nicht durch eine Beobachtung gedeckt, sondern es liegt eine Definition vor.

Die Verwendung der Einstein Synchronisation hat neben der Möglichkeit zur Berechnung der Lorentz-Gleichungen noch eine weitere Bedeutung. Wie bereits ausführlich dargestellt wurde ist es aus Sicht eines ruhenden Beobachters nicht möglich, ohne die Verwendung des Prinzips der konstanten Phasengeschwindigkeit in einem bewegten System den Schwingungsverlauf einer elektromagnetischen Welle (z. B. Licht) widerspruchsfrei zu beschreiben. Um dies zu umgehen ist es ein einfaches Mittel, die Definition der Einstein Synchronisation so zu nutzen, dass Schwingungsbetrachtungen grundsätzlich nur innerhalb des jeweiligen Inertialsystems zugelassen werden. Geht man nach diesem Prinzip vor so folgt daraus, dass ein Zustand absoluter Ruhe sich nicht einfügen lässt, zu scheinbaren Widersprüchen führt und dann in der Folge als fehlerhaft zurückgewiesen werden muss.

12. Schlussfolgerungen und Vorschläge zur Modifikation

Im Folgenden wird ein weiterer wichtiger Aspekt zum Thema Lichtgeschwindigkeit behandelt. Die Aussage: „Die Lichtgeschwindigkeit ist in allen Inertialsystemen gleich“ muss sorgfältig betrachtet und interpretiert werden.

Betrachten mehrere Versuchsteilnehmer aus verschiedenen gegeneinander bewegten Inertialsystemen das *gleiche* Ereignis, z. B. den Signalaustausch zwischen verschiedenen räumlich getrennten Punkten, so muss es zu unterschiedlichen Beobachtungen kommen. Wird für Messungen jeweils die Lichtgeschwindigkeit des eigenen Systems zugrunde gelegt und werden die für den Signalaustausch erforderlichen Zeiten und Distanzen für Hin- und Rückweg ermittelt, so kommen sie zu unterschiedlichen Ergebnissen. Weg und Zeit sind *nicht* symmetrisch aufgeteilt. Dieser Effekt wird durch die „Relativität der Gleichzeitigkeit“ verursacht.

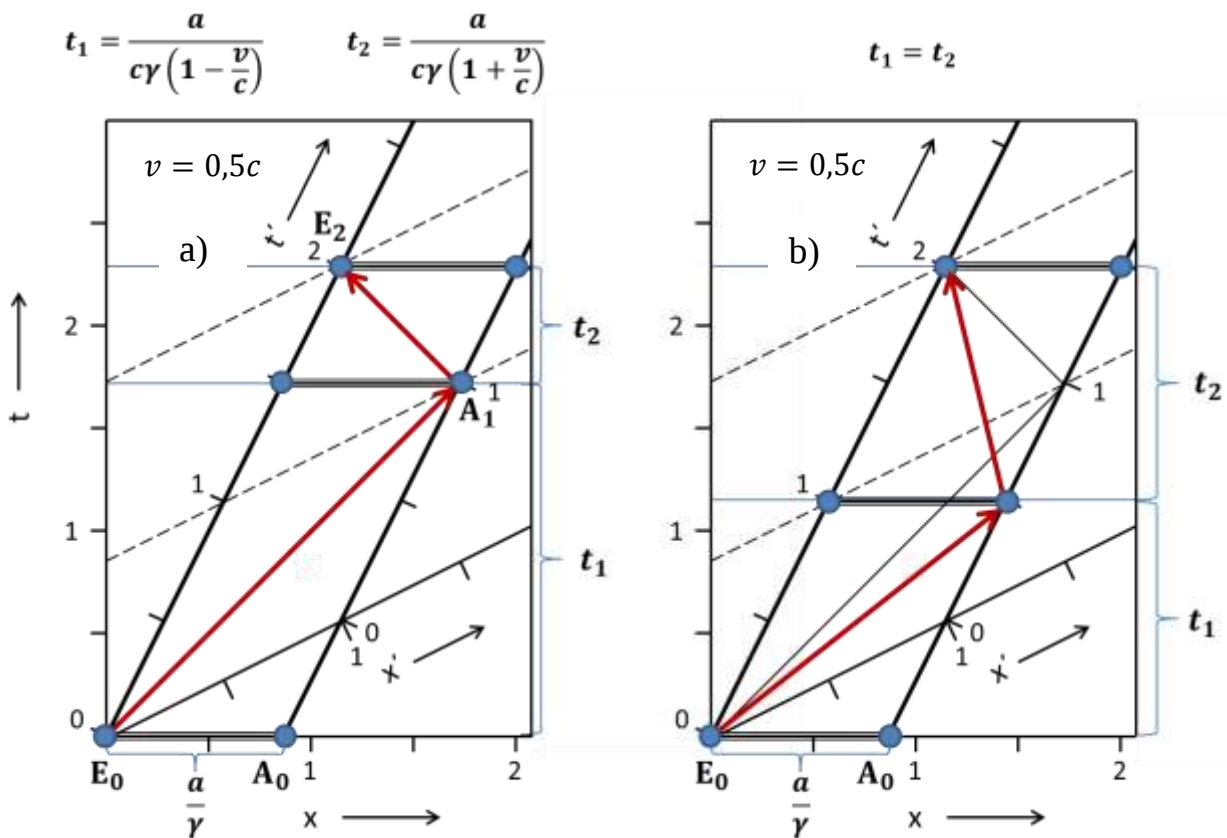


Abb. 12.3: Schematische Darstellung des Signalverlaufs in einem Labor L zwischen E und A aus Sicht eines relativ dazu bewegten Inertialsystems S ($v = 0,5c$)
a) Korrekt: $c = \text{const.}$ bezogen auf S.
b) Nicht korrekt: $t_1 = t_2$ bezogen auf S

Um dies zu verdeutlichen, ist der Sachverhalt in Abb. 12.3 dargestellt. Während für einen ruhenden Beobachter die Situation immer klar ist (Hin- und Rückweg sind gleich lang und auch die Einzelzeiten sind gleich) gilt dies nicht für einen Beobachter aus einem dazu bewegten Inertialsystem S.

Die Festlegung der Einstein-Synchronisation, d. h. beim Hin- und Rückweg für den Signalaustausch zwischen zwei Punkten (z. B. den Enden eines Labors A und E) sind Zeit und Weg jeweils zur Hälfte ausgeteilt, gilt nur subjektiv für das zum Labor in Ruhe befindliche System L. Würde aus einem anderen Inertialsystem S heraus ebenfalls diese Festlegung

gelten und die Zeiten $t_1 = t_2$ gleich sein, so würde die Situation entstehen wie im rechten Teil des Diagramms dargestellt mit Signalgeschwindigkeiten größer oder kleiner als c sowie messbaren Synchronisationsdifferenzen. Darüber hinaus kann eine Situation, bei der der Weg in beiden Richtungen konstant ist, nach diesen Überlegungen noch nicht einmal theoretisch auftreten, weil sich das Laborende nach dem Aussenden des Signals sofort vom ursprünglichen Punkt entfernt und beim Rückweg an anderer Stelle befindet. Stattdessen gilt die Situation wie im linken Teilbild dargestellt. Dies bedeutet, dass die Festlegung eines Referenzsystem immer nur subjektiv sein kann.

12.3 Integration eines Systems absoluter Ruhe in die Lorentz-Gleichungen

Die in Kap. 12.1 dargestellten Versuche zur Integration eines absoluten Ruhesystem unter Verletzung der Lorentz-Gleichungen haben offensichtlich bisher nicht zum Erfolg geführt. Im Folgenden wird untersucht, ob sich bei der Betrachtung von zwei beliebig zueinander bewegten Beobachtern zusätzlich ein übergeordnetes System absoluter Ruhe integrieren und dabei die Verwendung der Lorentz-Transformation widerspruchsfrei einbinden lässt. Bereits eine einfache Betrachtung zeigt, dass dies möglich sein muss da es sich hier im mathematischen Sinn um eine Gruppe handelt. Bei der Anwendung der Lorentz-Transformation von einem System $A \rightarrow B$ kann daher ebenfalls die Form $A \rightarrow S \rightarrow B$ genutzt werden, wobei S ein Ruhesystem sein kann.

Aufgrund der Bedeutung dieser Aussage wird die Gültigkeit dieser Beziehungen jedoch hier noch explizit nachgewiesen. Dabei werden gemäß den möglichen Konstellationen zwischen den Beobachtern nacheinander unterschiedliche Fälle behandelt.

1. Die Beobachter A und B bewegen sich auf einer Geraden bezüglich S

Im Folgenden wird analytisch das Beispiel untersucht, bei dem das Ruhesystem S und Beobachter A im Referenzsystem 1, das sich gegenüber S mit v_0 bewegt sowie Beobachter B im zu untersuchenden System 2 (mit v_1 bezogen auf das Referenzsystem 1) auf einer Linie liegen und $v_0 < v_1$ gilt. Zur Vereinfachung der Darstellung werden generell für die Geschwindigkeiten nicht die absoluten Werte gewählt, sondern durch ihr Verhältnis zu c ersetzt.

Die Lorentz-Gleichungen zwischen dem Referenz-System 1 und einem zu untersuchenden System 2 lauten dann

$$x_2 = \gamma_1(x_1 - v_1 t_1) \quad (12.40)$$

$$t_2 = \gamma_1(t_1 - v_1 x_1) \quad (12.41)$$

wobei x_1 und t_1 die Koordinaten des Referenzsystems und x_2 und t_2 die des sich mit der Geschwindigkeit v_1 fortbewegenden Systems sind. Führt man nun ein System absoluter Ruhe ein so wird sich das System 1 gegenüber diesem bewegen. Aus der Sicht des ruhenden Systems ergeben sich also die folgenden Beziehungen

$$x_1 = \gamma_0(x_0 - v_0 t_0) \quad (12.42)$$

12. Schlussfolgerungen und Vorschläge zur Modifikation

$$t_1 = \gamma_0(t_0 - v_0 x_0) \quad (12.43)$$

$$x_2 = \gamma_2(x_0 - v_2 t_0) \quad (12.44)$$

$$t_2 = \gamma_2(t_0 - v_2 x_0) \quad (12.45)$$

wobei v_0 die Geschwindigkeit zwischen Ruhesystem und Referenzsystem 1 und v_2 zwischen Ruhesystem und System 2 ist. Außerdem gilt die Beziehung für die relativistische Geschwindigkeitsaddition

$$v_2 = \frac{v_0 + v_1}{1 + v_0 v_1} \quad (12.46)$$

Aus den Gleichungen (12.42) und (12.43) ergibt sich die Beziehung für die Koordinaten x_0 und t_0 zu

$$x_0 = \gamma_0(x_1 + v_0 t_1) \quad (12.47)$$

$$t_0 = \gamma_0(t_1 + v_0 x_1) \quad (12.48)$$

Eingesetzt in Gl. (12.44) und (12.45) folgt damit

$$x_2 = \gamma_2(\gamma_0(x_1 + v_0 t_1) - v_2 \gamma_0(t_1 + v_0 x_1)) \quad (12.49)$$

$$x_2 = \gamma_2 \gamma_0((1 - v_0 v_2)x_1 - (v_2 - v_0)t_1) \quad (12.50)$$

$$t_2 = \gamma_2(\gamma_0(t_1 + v_0 x_1) - v_2 \gamma_0(x_1 + v_0 t_1)) \quad (12.51)$$

$$t_2 = \gamma_2 \gamma_0((1 - v_0 v_2)t_1 - (v_2 - v_0)x_1) \quad (12.52)$$

Die Gleichungen (12.40) und (12.41) sollen identisch sein mit den Gleichungen (12.50) bzw. (12.51). Zum Beweis wird ein Koeffizientenvergleich durchgeführt und es ergibt sich

$$(12.40) \Leftrightarrow (12.50) \quad x_1: \quad \gamma_1 = \gamma_2 \gamma_0(1 - v_0 v_2) \quad (12.53)$$

$$(12.40) \Leftrightarrow (12.50) \quad t_1: \quad v_1 \gamma_1 = \gamma_2 \gamma_0(v_2 - v_0) \quad (12.54)$$

$$(12.41) \Leftrightarrow (12.51) \quad t_1: \quad \gamma_1 = \gamma_2 \gamma_0(1 - v_0 v_2) \quad (12.55)$$

$$(12.41) \Leftrightarrow (12.51) \quad x_1: \quad v_1 \gamma_1 = \gamma_2 \gamma_0(v_2 - v_0) \quad (12.56)$$

Offensichtlich sind Gleichungen (12.53) und (12.55) sowie (12.54) und (12.56) identisch. Wegen

$$v_1 = \frac{v_2 - v_0}{1 - v_0 v_2} \quad (12.57)$$

geht Gl. (12.54) in Gl. (12.53) über, da

$$(v_2 - v_0)\gamma_1 = \gamma_2 \gamma_0(v_2 - v_0)(1 - v_0 v_2) \quad (12.58)$$

Damit sind alle 4 Gleichungen identisch. Zum endgültigen Nachweis der Gültigkeit genügt also die Betrachtung einer Beziehung.

Werden nun z. B. aus Gl. (12.54) beide Seiten quadriert und die jeweiligen Beziehungen der Werte für γ eingesetzt, so folgt

$$\frac{v_1^2}{(1 - v_1^2)} = \frac{(v_2 - v_0)^2}{(1 - v_2^2) \cdot (1 - v_0^2)} \quad (12.59)$$

mit

$$(1 - v_2 v_0)^2 v_1^2 = (v_2 - v_0)^2 \quad (12.60)$$

Wird für v_2 die Gleichung (12.46) eingesetzt, so folgt

$$\left(1 - \frac{v_0 + v_1}{1 + v_0 v_1} v_0\right)^2 v_1^2 = \left(\frac{v_0 + v_1}{1 + v_0 v_1} - v_0\right)^2 \quad (12.61)$$

Wird diese Gleichung vollständig ausmultipliziert so ergeben sich dabei 20 Terme, die sich gegenseitig aufheben. Es wurde also damit für diesen Fall gezeigt, dass die Verwendung eines Ruhesystems nicht zu einem Konflikt bei der Verwendung der Lorentz-Gleichungen führt. Veränderte Randbedingungen mit $v_0 > v_1$ führen zum gleichen Ergebnis, da es sich hier um lineare Beziehungen handelt, die in allen Fällen durch Linearkombinationen dargestellt werden können.

Betrachtet man dagegen eine beliebige Abhängigkeit bei der Kombination von Geschwindigkeiten für Bewegungen in verschiedene Raumrichtungen (d. h. in diesem Fall treffen sich die Beobachter nicht, sondern nähern sich nur auf einen bestimmten Wert an und entfernen sich dann wieder) so wird die Darstellung deutlich schwieriger. Es wurde bereits in Kap. 2.1.2 gezeigt, dass es für einen unbewegten (A) und einen bewegten Beobachter (B) keine Unterschiede bei der jeweiligen Beobachtung der Situation gibt und es für sie aufgrund von Messungen beim Signalaustausch nicht unterscheidbar ist, ob sie sich bewegen oder in Ruhe befinden. Kommt hier ein System absoluter Ruhe hinzu, dessen Geschwindigkeit gegenüber dem zuvor als unbewegt betrachteten Beobachter A von Null verschieden ist, so wird die Darstellung der Situation komplex, kann aber durch geeignete Wahl eines Nullpunkts stark vereinfacht werden.

Es wird dabei die Tatsache genutzt, dass sich die Richtungsvektoren der Beobachter auf definierten Geraden bewegen. Verschiebt man die Vektoren auf dieser Geraden so ändern sich die Beziehungen zwischen den Vektoren um eine lineare Größe, d. h. im mathematischen Sinne wird eine Konstante hinzugefügt, die nach einer erfolgten Vergleichsberechnung wieder abgezogen werden kann. Es lassen sich nun zwei unterschiedliche Fälle betrachten.

2. Die Geraden der Richtungsvektoren schneiden sich

Es wird nun die Tatsache genutzt, dass bei diesem System zwar der Ruhezustand festgelegt ist, aber es keinen definierten Ausgangspunkt gibt, von dem aus die Betrachtungen durchgeführt werden müssen. Zunächst wird hier aus den unendlich vielen Möglichkeiten der Nullpunkt so gewählt, dass sich A von ihm entfernt; diese Linie entspricht der x -Achse. Außerdem werden die Vektoren beider Beobachter so verschoben, dass sie sich schneiden. Mit diesen Voraussetzungen können dann die Koordinaten x, y, t aus Sicht von A und vom Ruhesystem S aus berechnet werden, der Wert in Richtung z ist aufgrund der Wahl des Koordinatensystems stets gleich Null. Die Beziehungen müssen dabei der Lorentz-Transformation gehorchen.

12. Schlussfolgerungen und Vorschläge zur Modifikation

Zum Nachweis wird folgendes Experiment diskutiert: Vom Beobachter A wird sich mit einem beliebigen Winkel α' bezüglich der x -Achse der Beobachter B entfernen. Nach einer definierten Zeit Δt wird dieser ein Signal aussenden. Diese Koordinaten werden von A und aus dem Ruhesystem S bestimmt. Sind diese bei einem Vergleich mittels der Lorentz-Gleichungen identisch so lässt sich das Ruhesystem integrieren.

Es ergeben sich folgende Rechnungen:

Beobachter A stellt fest, dass die ausgesendeten Signale von dem mit Geschwindigkeit v_1 bewegendem Beobachter B mit einer Verzögerung

$$t_1 = \gamma_1 \Delta t \quad (12.62)$$

ausgestrahlt werden. Er findet demnach die Koordinaten

$$x_1 = v_1 t_1 \cos \alpha' \quad (12.63)$$

$$y_1 = v_1 t_1 \sin \alpha' \quad (12.64)$$

Vom System S aus gesehen lässt sich die Geschwindigkeit gemäß Gl. (4.20) bestimmen (vgl. Kap. 4.1)

$$v_2 = \frac{\sqrt{(v_0^2 + v_1^2 + 2v_0v_1\cos\alpha') - (v_0v_1\sin\alpha')^2}}{1 + v_0v_1\cos\alpha'} \quad (12.65)$$

wobei aus seiner Sicht v_0 die Geschwindigkeit von A ist. Für den von S bestimmten Winkel α gilt gem. Gl. (7.43)

$$\alpha = \arctan \left[\frac{\sin \alpha'}{\gamma_0 \left(\cos \alpha' + \frac{v_0}{v_1} \right)} \right] \quad (12.66)$$

(Zu Details vgl. Kap. 7.2). Analog zu den vorher bestimmten Koordinaten gilt nun

$$t_2 = \gamma_2 \Delta t \quad (12.67)$$

$$x_2 = v_2 t_2 \cos \alpha \quad (12.68)$$

$$y_2 = v_2 t_2 \sin \alpha \quad (12.69)$$

Abschließend werden nun die Koordinaten bestimmt, die sich aus den Lorentz-Gleichungen ergeben müssen und es folgt

$$t'_1 = \gamma_0(t_2 - v_0 x_2) \quad (12.70)$$

$$x'_1 = \gamma_0(x_2 - v_0 t_2) \quad (12.71)$$

Es muss nun gelten:

$$t'_1 = t_1 \quad (12.72)$$

$$x'_1 = x_1 \quad (12.73)$$

$$y_2 = y_1 \quad (12.74)$$

Gl. (12.74) zeigt an, dass die Werte in y -Richtung in allen Systemen identisch sein müssen, was direkt aus den Lorentz-Gleichungen folgt.

12.3 Integration eines Systems absoluter Ruhe in die Lorentz-Gleichungen

α'	t_1	x_1	y_1	v_2	α	t_2	x_2	y_2	t'_1	x'_1
0	1,154701	0,577350	0,000000	0,571429	0,000000	1,218544	0,696311	0,000000	1,154701	0,577350
15	1,154701	0,557678	0,149429	0,569508	12,45513	1,216566	0,676539	0,149429	1,154701	0,557678
30	1,154701	0,500000	0,288675	0,563786	25,01756	1,210770	0,618571	0,288675	1,154701	0,500000
45	1,154701	0,408248	0,408248	0,554386	37,79756	1,201548	0,526357	0,408248	1,154701	0,408248
60	1,154701	0,288675	0,500000	0,541551	50,91089	1,189531	0,406181	0,500000	1,154701	0,288675
75	1,154701	0,149429	0,557678	0,525691	64,48031	1,175536	0,266234	0,557678	1,154701	0,149429
90	1,154701	0,000000	0,577350	0,507445	78,63457	1,160518	0,116052	0,577350	1,154701	0,000000
105	1,154701	-0,149429	0,557678	0,487753	93,50218	1,145500	-0,034130	0,557678	1,154701	-0,149429
120	1,154701	-0,288675	0,500000	0,467905	109,19583	1,131505	-0,174078	0,500000	1,154701	-0,288675
135	1,154701	-0,408248	0,408248	0,449528	125,78294	1,119487	-0,294253	0,408248	1,154701	-0,408248
150	1,154701	-0,500000	0,288675	0,434472	143,24177	1,110266	-0,386467	0,288675	1,154701	-0,500000
165	1,154701	-0,557678	0,149429	0,424533	161,41618	1,104469	-0,444435	0,149429	1,154701	-0,557678
180	1,154701	-0,577350	0,000000	0,421053	0,000000	1,102492	-0,464207	0,000000	1,154701	-0,577350
0	1,154701	0,577350	0,000000	0,800000	0,000000	1,666667	1,333333	0,000000	1,154701	0,577350
15	1,154701	0,557678	0,149429	0,796896	6,50446	1,655309	1,310617	0,149429	1,154701	0,557678
30	1,154701	0,500000	0,288675	0,787340	13,06431	1,622008	1,244017	0,288675	1,154701	0,500000
45	1,154701	0,408248	0,408248	0,770588	19,73390	1,569036	1,138071	0,408248	1,154701	0,408248
60	1,154701	0,288675	0,500000	0,745356	26,56505	1,500000	1,000000	0,500000	1,154701	0,288675
75	1,154701	0,149429	0,557678	0,709783	33,60502	1,419606	0,839213	0,557678	1,154701	0,149429
90	1,154701	0,000000	0,577350	0,661438	40,89339	1,333333	0,666667	0,577350	1,154701	0,000000
105	1,154701	-0,149429	0,557678	0,597477	48,45800	1,247060	0,494121	0,557678	1,154701	-0,149429
120	1,154701	-0,288675	0,500000	0,515079	56,30993	1,166667	0,333333	0,500000	1,154701	-0,288675
135	1,154701	-0,408248	0,408248	0,412289	64,43855	1,097631	0,195262	0,408248	1,154701	-0,408248
150	1,154701	-0,500000	0,288675	0,289259	72,80788	1,044658	0,089316	0,288675	1,154701	-0,500000
165	1,154701	-0,557678	0,149429	0,149449	81,35612	1,011358	0,022716	0,149429	1,154701	-0,557678
180	1,154701	-0,577350	0,000000	0,000000	0,000000	1,000000	0,000000	0,000000	1,154701	-0,577350
0	1,005038	0,100504	0,000000	0,571429	0,000000	1,218544	0,696311	0,000000	1,005038	0,100504
15	1,005038	0,097079	0,026012	0,569508	2,15163	1,216566	0,692356	0,026012	1,005038	0,097079
30	1,005038	0,087039	0,050252	0,563786	4,22175	1,210770	0,680763	0,050252	1,005038	0,087039
45	1,005038	0,071067	0,071067	0,554386	6,12440	1,201548	0,662320	0,071067	1,005038	0,071067
60	1,005038	0,050252	0,087039	0,541551	7,76517	1,189531	0,638285	0,087039	1,005038	0,050252
75	1,005038	0,026012	0,097079	0,525691	9,03827	1,175536	0,610295	0,097079	1,005038	0,026012
90	1,005038	0,000000	0,100504	0,507445	9,82643	1,160518	0,580259	0,100504	1,005038	0,000000
105	1,005038	-0,026012	0,097079	0,487753	10,00607	1,145500	0,550222	0,097079	1,005038	-0,026012
120	1,005038	-0,050252	0,087039	0,467905	9,46232	1,131505	0,522233	0,087039	1,005038	-0,050252
135	1,005038	-0,071067	0,071067	0,449528	8,11836	1,119487	0,498198	0,071067	1,005038	-0,071067
150	1,005038	-0,087039	0,050252	0,434472	5,97964	1,110266	0,479755	0,050252	1,005038	-0,087039
165	1,005038	-0,097079	0,026012	0,424533	3,18024	1,104469	0,468161	0,026012	1,005038	-0,097079
180	1,005038	-0,100504	0,000000	0,421053	0,000000	1,102492	0,464207	0,000000	1,005038	-0,100504

Tab. 12.2: Vergleich der Ergebnisse für die Lorentz-Transformation. Felder grau: Werte approximiert (da sonst Division durch 0). Mit Rahmen: 180°+Winkel
Formeln von $t_1 \rightarrow$ Gl. (12.33) bis $x'_1 \rightarrow$ Gl. (12.42) vgl. Text.

Eine analytische Ableitung der Gültigkeit der Gleichungen ist aufwändig, ein direkter numerischer Vergleich jedoch nicht. In Tab. 12.2 sind die Ergebnisse für verschiedene Geschwindigkeiten gezeigt; es zeigen sich keine Differenzen und die Gl. (12.72), (12.73) und (12.74) gelten daher uneingeschränkt.

3. Die Geraden der Richtungsvektoren schneiden sich nicht

Für den Fall, dass sich die Richtungsvektoren der Beobachter A und B nicht schneiden bedeutet dies, dass die von ihnen beschriebenen Geraden in der Terminologie der Analytischen Geometrie „windschief“ sind. Hier wird zunächst das Gemeinlot bestimmt. Dieses ist dort, wo der Abstand der Geraden ein Minimum annimmt, und es ist der einzige Punkt, an dem die Verbindungslinie auf *beiden* Geraden gleichzeitig senkrecht steht.

Dieses Lot wird nun als Basis für die z -Achse gewählt, die bisher keine Rolle bei den Betrachtungen gespielt hat. Der Schnittpunkt mit der x -Achse wird als Ursprung des Koordinatensystems bestimmt und die Richtung der y -Achse ist dann senkrecht zu beiden. Wenn Beobachter B sich maximal angenähert hat und der Wert auf der z -Achse z_{min} einnimmt gilt $x = y = 0$. Wird nun der Umstand genutzt, dass gemäß Lorentz-Translation die Werte in z -Richtung sich bei einer Transformation nicht ändern, so kann hier auch ohne Veränderung der Beziehungen eine Projektion um z_{min} vorgenommen werden. Die sich dann ergebende Situation ist identisch mit dem bereits gezeigten Sachverhalt für den Fall, dass die Richtungsvektoren sich schneiden. Es ist also auf diese Weise allgemein gezeigt, dass sich ein System allgemeiner Ruhe in jedes beliebig definierte Inertialsystem integrieren lässt.