Die Spezielle Relativitätstheorie

Grundlagen, Grenzen, mögliche Ergänzungen und Vorschläge für Klärungsversuche

Neue Ansätze nach mehr als einem Jahrhundert

Gerhard W. Borst

Vorwort

Motivation

„Meine Damen und Herren, wie Sie sicher wissen, gibt es innerhalb der Physik zwei fundamentale Theorien, auf denen das gesamte Gebäude unserer Wissenschaft ruht. Es handelt sich hierbei um die allgemeine Relativitätstheorie und die Quantenmechanik. Wir wissen heute, dass mindestens eine dieser Theorien falsch sein muss, da sie sich gegenseitig widersprechen. Wir von der Quantenmechanik sind uns aufgrund von vielen positiven und schlüssigen Versuchen sicher, dass wir auf der richtigen Seite stehen. Fangen wir also an.“

Dies waren die einführenden Worte des Dozenten zu Beginn der Vorlesung zur Quantenmechanik im SS 2014 an der Universität Bonn (Theoretische Physik III). Noch nie habe ich in einer Vorlesung die Situation erlebt, dass absolute Stille herrscht. Hier war es der Fall.

Die Vorlesung von der „Konkurrenz“ zur allgemeinen Relativitätstheorie aus dem SS 2015 war hingegen zu diesem Thema von einer sehr defensiven Haltung geprägt. Auf Nachfrage einiger Studenten wurde hier die Aussage gemacht, dass man an Modifikationen der Theorie arbeitet, um die vorhandenen Widersprüche aufzulösen.

Diese Ausgangslage hat mich motiviert, mir eine eigene Meinung zum Thema zu bilden. Da ich aufgrund meines Jahrgangs 1953 als „Altstudent“ keine Prüfungen mehr ablegen musste und daher viel mehr Freiraum hatte als andere Studenten konnte ich relativ viel Zeit hierfür investieren. Dabei hat mich insbesondere die Spezielle Relativitätstheorie interessiert, die die Basis für weitere Darstellungen ist und bin dabei auf einige interessante Zusammenhänge innerhalb dieser Theorie gestoßen, die im Folgenden dargestellt werden.

Inhalt

Genaue Untersuchungen zur Speziellen Relativitätstheorie (SRT) haben als wichtigsten Aspekt die „Konstanz der Phasengeschwindigkeit des Lichts“ ergeben, die bisher nicht umfassend auf die Theorie angewendet wurde. Erfolgt dies bei klassischen Versuchen, wo vor- und zurücklaufende Lichtstrahlen in bewegten Systemen betrachtet werden, so ergeben die üblicherweise dort angestellten Frequenzvergleiche keinen Sinn. Diese Versuche wurden neu interpretiert. Beim Michelson-Morley Experiment sind nur relativ geringe Korrekturen erforderlich, beim Kennedy-Thorndike-Experiment ist dessen Aussagekraft aber deutlich stärker als bisher angenommen.

Weiterhin wurden Prüfungen bezüglich eines Signalaustauschs bewegter Beobachter sowie auch für Versuche mit Impuls- und Energiebetrachtungen durchgeführt. Wird hier wieder die Konstanz der Phasengeschwindigkeit genutzt so zeigt sich in allen Fällen, dass die Annahme eines absolut ruhenden Raums einen Sonderfall innerhalb der unendlichen Möglichkeiten der SRT darstellt aber dabei nicht, wie vielfach behauptet, experimentell nachweisbare Widersprüche auftreten. Die seit einigen Jahrzehnten beobachtete völlig gleichmäßige kosmische Hintergrundstrahlung liefert zwar einen starken Hinweis auf das Vorhandensein eines absolut ruhenden Raumes, es wurde aber auch nach einer Vielzahl von Überprüfungen von konventionellen Experimenten kein Hinweis für einen Versuch innerhalb des klassischen Rahmens gefunden, der eine Entscheidung herbeiführen könnte, ob dieser tatsächlich existiert.

Dies könnte sich ändern, wenn Versuche aus der Quantenmechanik, z. B. von Tunnelexperimenten einbezogen werden. Theoretische Untersuchungen zeigen, dass eine überlichtschnelle Impulsübertragung, z. B. durch das Senden eines einfachen Impulses, zwar mit einem absolut ruhenden Raum jedoch nicht mit der generell geltenden SRT kompatibel ist. Es wurde ein Vorschlag gemacht, wie ein Versuch ausgestaltet werden kann, der eine eindeutige Entscheidung bezüglich der unterschiedlichen Ansätze ermöglicht. Des Weiteren wurden auch zwei andere Versuche dargestellt, deren wichtigster der direkte Nachweis „Relativität der Gleichzeitigkeit“ beinhaltet, die ein integraler Bestandteil der Lorentz Gleichungen ist.

Neben der Betrachtung von Theorie und Versuchen ist für wissenschaftshistorisch interessierte Leser auch ein kurzer Überblick beigefügt, wie es generell, von der Antike über Galilei bis Einstein, zur Entwicklung der SRT gekommen ist.

Warnhinweis

Vorsicht, diese Zusammenstellung enthält Mathematik! Es handelt sich allerdings um eine relativ geringe Dosis; ein Leistungskurs in Mathematik wird für das grundlegende Verständnis ausreichen, nach dem ersten Semester Physikstudium ist man gut gerüstet. Sollte es nicht möglich sein einzelne Passagen nachzuvollziehen, so ist das für das Verständnis der weiteren Kapitel nicht Voraussetzung und sie können übersprungen werden. Um die Präsentation einfach zu halten, wurde insbesondere auf die sonst vielfach üblichen Darstellungen mit Tensorkalkül verzichtet, weil sie für die hier diskutierten grundlegenden Überlegungen nicht erforderlich sind. Stattdessen wurden viele Beispiele durchgerechnet, um das Verständnis für einzelne Punkte zu erhöhen.

Alle aus der Literatur übernommenen Punkte sind gekennzeichnet.

Trotz großer Sorgfalt ist es immer möglich, dass sich bei der Ausarbeitung Fehler eingeschlichen haben. In einem solchen Fall, und natürlich insbesondere bei übergreifenden Diskussionswünschen wäre ich für eine Rückmeldung dankbar.

Alfter, April 2019 Gerhard Borst

Vorwort zur 3. Revision

Als ein Resultat der Diskussionen in den zwei Jahren seit der ersten Veröffentlichung des Buches ist deutlich geworden, dass die Ergebnisse noch prägnanter und klarer zusammengefasst werden sollten. Obwohl sich an der grundsätzlichen Aussage nichts geändert hat, sind daher die wesentlichen Resultate entsprechend den Formulierungen auf der Website hier noch einmal neu dargestellt.

Ergebnisse der Untersuchungen

Das wichtigste Ergebnis der vorliegenden Untersuchungen ist, dass die *Phasengeschwindigkeit des Lichts* und nicht die *Lichtgeschwindigkeit* auf klassische Experimente anzuwenden ist, wenn ausgesendete und wieder eingehende Lichtstrahlen in bewegten Systemen untersucht werden. Die Vergleiche, die üblicherweise mit Interferenzmessungen vorgenommen werden, sind ansonsten unvollständig. Eine Neuinterpretation des Michelson-Morley- und Kennedy-Thorndike-Experiments führen zu veränderten Ergebnissen. Diese Neubetrachtung hat auch einen großen Einfluss auf andere wichtige Zusammenhänge, wie es z. B. für die Spezielle Relativitätstheorie (SRT) der Fall ist.

Zur Formulierung der SRT wurde von Einstein ein Ansatz gewählt, dessen Grundlagen das „Relativitätsprinzip" und die „Konstanz der Lichtgeschwindigkeit" sind und im Ursprung keine physikalische Formel enthält. Aus diesem „Top-down" Ansatz lassen sich die Lorentz-Transformation und die relativistische Zunahme der kinetischen Energie, später auch bezeichnet als relativistischer Massenanstieg, ableiten.

Überraschend ist, dass es bis heute keine einheitliche Formulierung der beiden zentralen Prinzipien gibt. Jeder Autor einer Publikation über die SRT wählt hierzu seinen eigenen Ansatz. Die Darstellungen lassen sich grundsätzlich in „Objektives Beobachtungskriterium" und „Axiom" aufteilen. Objektives Kriterium bedeutet zunächst für das Relativitätsprinzip:

1. Die Durchführung von beliebigen physikalischen Versuchen führt in allen Inertialsystemen zu den gleichen Ergebnissen.

Dieser Ansatz wurde auch von Einstein gewählt. Die Darstellung als „Axiom" beinhaltet dagegen die Aussage „Alle Inertialsysteme sind gleich". Bei neueren Publikationen wird eher (aber nicht ausschließlich) der axiomatische Ansatz benutzt. Bei genauer Interpretation beinhaltet dieser jedoch bereits die Aussage, dass ein System absoluter Ruhe nicht existieren kann, wofür es aber bis heute aber keinen experimentellen Beweis gibt (allerdings auch keinen Gegenbeweis). Um dies offen zu halten, wird daher im Folgenden der klassische Ansatz für dieses Grundprinzip gewählt.

Wird als zweites Kriterium die Lichtgeschwindigkeit betrachtet, so gilt hier das gleiche wie bereits zuvor dargestellt; es gibt auch hier für verschiedene Inertialsysteme die Unterschiede zwischen den Aussagen „es lassen sich keine Unterschiede feststellen" und „die Lichtgeschwindigkeit ist immer gleich". Als wesentliches Resultat der hier durchgeführten Untersuchungen zeigt sich, dass bei der Beobachtung von Schwingungen ***einer*** Lichtquelle aus beliebig vielen zueinander bewegten Inertialsystemen die Phasengeschwindigkeit des Lichts die einzig sinnvolle Größe ist, um widerspruchsfreie Ergebnisse zu erhalten. Wird stattdessen die Lichtgeschwindigkeit genutzt – wie es heute noch vielfach üblich ist – so folgen für unterschiedlich bewegte Beobachter abweichende Interpretationen bezüglich der Schwingungsanzahl aus dieser Quelle und damit auch für Interferenzbetrachtungen.

Der Vorschlag für eine widerspruchsfreie und eindeutige Formulierung des zweiten Prinzips der SRT lautet demnach:

2. Die Phasengeschwindigkeit des Lichts ist in allen Inertialsystemen invariant und entspricht dem in jedem Inertialsystem messbaren Wert der Lichtgeschwindigkeit.

Die hier durchgeführten Untersuchungen haben jedoch auch gezeigt, dass ebenfalls ein „Bottom-up“ Ansatz mit einer *Erweiterten Lorentz-Theorie* möglich ist. Dabei werden die erforderlichen physikalischen Grundgesetze definiert und daraus lässt sich dann das Relativitätsprinzip ableiten. Dieser Ansatz lautet folgendermaßen:

1. Aus der unbegrenzten Anzahl der vorhandenen Inertialsysteme wird eines als Basissystem ausgewählt und mit Index 0 gekennzeichnet.
2. In diesem Basissystem weisen Messungen der Geschwindigkeit des Lichts in alle Richtungen den gleichen Wert c auf.
3. Die Eigenschaften aller anderen Inertialsysteme sind über deren Relativgeschwindigkeit v zum Basissystem definiert, und es gilt für Zeit t, Weg x und Masse m

   a) $t = \gamma\left(t_0 - \frac{v}{c^2}x_0\right), \qquad x = \gamma(x_0 - vt_0)$

   b) $m = \gamma m_0$

   $$mit: \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

In dieser Darstellung sind die Spezielle Relativitätstheorie und der erweiterte Lorentz-Ansatz mathematisch vollständig äquivalent. Die Spezielle Relativitätstheorie schließt jedoch bei üblicher Interpretation das Vorhandensein eines Systems absoluter Ruhe aus, welches aber beim erweiterten Lorentz-Ansatz durch einfache Wahl des Basissystems ohne weitere Annahmen oder Einschränkungen integrierbar ist. Die seit einigen Jahrzehnten bekannte völlig gleichmäßige kosmische Hintergrundstrahlung hat schon vielfach zu Überlegungen geführt, diese mit der Existenz eines *absolut ruhenden Raums* und der SRT in Einklang zu bringen. Dies war bisher nicht erfolgreich und führte stets zu Widersprüchen mit experimentellen Befunden. Der hier gezeigte Ansatz ermöglicht dagegen eine völlig problemlose Integration. Da aber bis heute mit konventionellen Ansätzen kein experimenteller Nachweis gelungen ist, kann eine Entscheidung derzeit nicht getroffen werden.

Dies könnte sich ändern, wenn quantenmechanische Tunnelexperimente einbezogen werden. Theoretische Überlegungen zeigen, dass überlichtschnelle Übertragungen von Signalen, z. B. durch das Senden eines einfachen Impulses, zwar mit der erweiterten Lorentz-Theorie jedoch nicht mit der SRT kompatibel sind. Es wird ein Versuch vorgeschlagen, der eine eindeutige Entscheidung bezüglich der unterschiedlichen Ansätze ermöglicht. Des Weiteren werden auch zwei andere Versuche zur Diskussion gestellt, deren wichtigster den direkten Nachweis der „Relativität der Gleichzeitigkeit“ beinhaltet, die ein integraler Bestandteil der Lorentz Gleichungen ist.

Inhaltsangabe

Hinweis

Dieses Skript kann einer Aktualisierung unterliegen. Der aktuelle Status kann unter https://www.analyse-srt.de abgerufen werden.

Stand	Rev.	Status
25.04.2019	0	Erstausgabe
19.02.2020	1	Redaktionelle Überarbeitung
18.03.2021	2	Revision Kap. 3.4; 6; 7.1; 11; 12.3; 13; Anlagen A - D
27.11.2021	3	Redaktionelle Überarbeitung, Revision Kap. 1, 2, 3, 11, 13
30.05.2022	4	Revision Kap. 6; Anlagen A - D
08.03.2023	5	Revision Kap. 3
20.12.2023	6	Einfügung Kap. 10 „Elektromagnetismus und Gravitation“ und Anlage E „Kurze Einführung in die Vektorrechnung“
28.02.2024	7	Einfügung Kap. 4.5 „Signalaustausch bei Rotation (Sagnac-Effekt)“; Revision Kap. 1.6, 10.2

1. Einführung

In dieser Zusammenstellung werden zunächst die Grundlagen der Speziellen Relativitätstheorie dargestellt und anschließend die daraus abzuleitenden Konsequenzen sowie deren Grenzen diskutiert. Dabei ist ein wichtiger Beitrag zum Verständnis der Zusammenhänge die Betrachtung der historischen Entwicklung der hierfür erforderlichen Grundlagen. Hierzu werden drei Teilgebiete der Physik ausgewählt (klassische Mechanik, Licht und seine Ausbreitung, Elektromagnetismus) und damit verbunden bedeutende Persönlichkeiten vorgestellt, die jeweils einen wesentlichen Anteil am Erkenntnisgewinn hatten. Die Auswahl aus einer Vielzahl von Forschern ist naturgemäß subjektiv und möglicherweise ungerecht, muss aber aus offensichtlichen Gründen wegen der nahezu unüberschaubaren Anzahl stark eingegrenzt werden.

1.1 Allgemeine historische Voraussetzungen

Nach der Auflösung des römischen Reiches in der Folge der Völkerwanderung war in Europa ein genereller Verlust des überkommenen Wissens aus griechisch/römischem Ursprung festzustellen. Viele Schriften sind nur deshalb erhalten, weil sie von der arabischen Wissenschaft, die generell ein viel höheres Niveau erreichte, übersetzt und kommentiert worden waren. Die Situation in Europa änderte sich erst, als zum Ende des ersten Jahrtausends eine Warmzeit begann, die große Umwälzungen zur Folge hatte. Bis zum Jahr 1300 verdreifachte sich die Bevölkerung, Land wurde in großem Umfang urbar gemacht und es wurden viele neue Städte gegründet.

Für den Aufbruch in die Neuzeit und der damit verbundenen Explosion des Wissens werden verschiedene Faktoren verantwortlich gemacht (zu diesem Thema sei das Buch „Der Morgen der Welt“ [1] von Bernd Roeck empfohlen). Zunächst bildete sich in den Städten durch die ausreichende Versorgung mit Nahrungsmitteln eine Gruppe heraus, die man heute als Mittelschicht bezeichnen würde und die aus Kaufleuten und Handwerkern bestand. Von Roeck wird ihre Struktur als „horizontal“ beschrieben, da sie keiner aristokratischen Obrigkeit unterworfen war und sich somit frei entwickeln konnte. Außerdem wurden im 12. Jahrhundert (beginnend mit Bologna, Paris und Oxford) erste Universitäten gegründet und es entstand mit dem Beruf des Hochschullehrers der Stand des Intellektuellen. Die hierzu ernannten Männer (Frauen war dieser Beruf und auch das Studium verschlossen) erfüllten zwar in den meisten Fällen sicher nicht unsere heutigen Erwartungen von der

Qualität eines Professors, es wurden jedoch allgemein die aus griechisch/römischer Tradition stammenden Verfahren der Diskussion und Anwendung der Logik genutzt.

Generell ist festzuhalten, dass in Europa seit der Gründung der ersten Universitäten die Wissenschaft und deren Vermittlung bis ins 17. Jahrhundert recht einheitlich gegliedert war. Ein Studium vermittelte, nach antikem Vorbild, die 7 freien Künste mit dem sprachlichen Trivium (Grammatik, Rhetorik, Dialektik; Abschluss: Bakkalaureus) und dem mathematisch geprägten Quadrivium (Arithmetik, Geometrie, Musik und Astronomie [einschl. Astrologie]; Abschluss: Magister). Anschließend konnte an den drei höheren Fakultäten (der theologischen, juridischen und medizinischen) ein Doktorat erworben werden. Die Sprache war durchgehend Latein, was im vorhandenen territorial und sprachlich zersplitterten Umfeld ein erheblicher Vorteil war. Das Wissen wurde im Wesentlichen durch ein Studium der Bibel und von Schriften der griechischen Philosophen vermittelt; experimentelles Arbeiten wie wir es heute kennen war grundsätzlich nicht üblich.

Neben den bereits dargestellten Themen waren zum Ende des 13. Jahrhunderts weitere günstige Voraussetzungen vorhanden. Es waren nämlich wichtige Erfindungen gemacht worden, die das weitere Geschehen maßgeblich beeinflussten. Bei deren wichtigsten handelte es sich dabei um so unterschiedliche Dinge wie die Herstellung von Papier und Schwarzpulver (beides aus Asien importiert) sowie um die Erfindung der mechanischen Uhr und der Brille (und hiermit verbunden das Wissen Linsen herzustellen). Während der nach 1300 einsetzenden und länger als 500 Jahre dauernden kleinen Eiszeit, die Hunger und Not brachte, konnten sich über die Jahrhunderte hieraus Fertigkeiten entwickeln, die die Wissenschaft maßgeblich beeinflusst haben.

Papier hatte klare Vorteile vor dem bisher verwendeten, aus Tierhäuten hergestellten Pergament und war zu deutlich geringeren Kosten, in besserer Qualität und in größerer Menge herstellbar. Zusammen mit dem von Gutenberg erfundenen Buchdruck und mit entstehenden Postdiensten ermöglichte es einen nie gekannten Informationsaustausch. Die Nutzung von Schwarzpulver hatte dagegen eine beträchtliche Auswirkung auf Metallurgie und Metallbearbeitung, die für die Herstellung von Gewehren und Kanonen erforderlich waren und es entstanden die Anfänge einer Schwerindustrie.

Es wird vielfach behauptet, dass mit Buchdruck und Schwarzpulver die wichtigsten Faktoren zur Erklärung der Entwicklung zu sehen sind. Die Entfaltung der Wissenschaft ist jedoch ebenfalls untrennbar verbunden mit einer immer weiter verbesserten Feinmechanik die u. a. zur Herstellung von Uhren genutzt wurde, ohne die Messungen physikalischer Größen im Allgemeinen nicht durchführbar sind. Dieser langfristigen Entwicklung steht mit der Herstellung und Bearbeitung von Linsen eine Entwicklung gegenüber, deren Wirkung sich mit der Erfindung von Teleskop und Mikroskop in Wissenschaftskreisen mit den nun vorhandenen Mitteln nahezu schlagartig über ganz Europa verbreitete. Des Weiteren kam es durch die beginnende Einführung von Schutzrechten (Copyright, Patente) zu einem Anschub von wichtigen Entwicklungen.

Etwa ab dem Jahre 1600 begann sich langsam die Überzeugung durchzusetzen, dass Erkenntnisse nicht nur durch das Studium alter Schriften, sondern auch durch neue Überlegungen und Experimente gewonnen werden können. Von Francis Bacon (1561-1626) wurde hierfür eine empirische Vorgehensweise vorgeschlagen. Er glaubte daran, dass das menschliche Wissen kumulativ sei (von ihm stammt auch der Ausdruck: „Wissen ist

Macht“). Durch René Descartes (1596-1650) wurden dann mathematische Methoden als wichtiges Mittel wissenschaftlicher Wahrheitsfindung beschrieben. Er benutzte als Erster Gleichungen, die ungefähr der Form entsprechen, wie wir sie heute kennen. Er verwendete dafür jedoch ein Zeichen ähnlich „æ“ (entsprechend dem lat. „aequalis“), das Gleichheitszeichen „=“ wurde erstmals vom walisischen Mathematiker Robert Recorde (1510-1558) benutzt, verbreitete sich ab etwa 1700 in größerem Umfang und wurde schließlich zum Standard bei der Abfassung naturwissenschaftlicher Schriften. Zusammen mit der „Erfindung“ der Null, die ab dem Ende des 13. Jahrhunderts langsam Eingang in die Mathematik fand, sind diese zwar keine notwendigen Voraussetzungen aber wichtige Beschleuniger wissenschaftlichen Arbeitens.

Vom Soziologen Robert K. Merton (1910-2003) stammen weitere bemerkenswerte Aussagen zu den Entwicklungen dieser Zeit [2]. Zunächst wurde von ihm die These aufgestellt, der zufolge Veränderungen in den Naturwissenschaften durch eine Anhäufung von Beobachtungen sowie von verbesserten experimentellen Techniken und methodischen Ansätzen verursacht wurden; dieser Ansatz korrespondiert zu den Thesen von Roeck [1]. Des Weiteren wird von ihm argumentiert, dass die naturwissenschaftliche Revolution im 17. und 18. Jahrhundert im Wesentlichen vom Protestantismus, insbesondere von englischen Puritanern und deutschen Pietisten getragen wurde. Dies änderte sich erst mit der französischen Revolution und der europaweiten Enteignung und Entmachtung der Kirche durch Napoleon. Diese These ist zwar nicht unumstritten denn sie wird anderen bedeutenden Naturforschern nicht gerecht. Es ist aber bezeichnend, dass der damals bedeutende Elsevier-Verlag die von der katholischen Kirche gebannten Schriften von Descartes und Galilei (nach 1633) nur deswegen drucken konnte, weil dieser im protestantischen Leiden angesiedelt war und damit nicht im direkten Einflussbereich der katholischen Kirche lag.

1.2 Klassische Mechanik

Einer der wichtigsten Begründer der modernen Wissenschaft ist Galileo Galilei (1564-1642). Er verbesserte ab 1609 die Technik des im Jahr zuvor durch den Brillenmacher Hans Lipperhey (1570-1619) erfundenen Teleskops durch Herstellung eigener Linsen sowie mittels konstruktiver Veränderungen. Außerdem beobachtete er damit als erster systematisch den Himmel und entdeckte dabei bereits 1610 unter anderem die Monde des Jupiters, die zuvor mit bloßem Auge nicht erkennbar waren. Es beeinflusste erheblich das damalige Weltbild, dass nun neben der Erde auch ein anderer Planet Monde hatte. Er entdeckte weiterhin, dass die Milchstraße eine Anhäufung vieler weit entfernter Sterne ist und kein schimmerndes Band, dass die Planeten im Gegensatz zu den Fixsternen scheibenförmig waren, und er berechnete anhand der Schlagschatten auf dem Mond die Höhe von Bergen und gab diese mit 8000m an [3]. Außerdem wurden von ihm Experimente zum freien Fall von Körpern durchgeführt. Dass diese wie manchmal behauptet am schiefen Turm von Pisa durchgeführt wurden ist aber wohl nur Legende; es handelte sich vermutlich um Rollversuche.

Es sei noch erwähnt, dass es Lipperhey nicht gelang, sich seine Erfindung schützen zu lassen, weil bereits in den Folgemonaten andere Entwickler ihrerseits Ansprüche anmeldeten. Dies führte zu einem langen, aus seiner Sicht vergeblichen Patentstreit. Offensichtlich war die Zeit reif für das Teleskop und auch das kurz zuvor entwickelte Mikroskop und sie setzten sich sofort und umfassend durch.

Die für die im Folgenden betrachtete Zusammenstellung wichtigste Erkenntnis Galileis bezieht sich jedoch auf die erstmalige Formulierung des Relativitätsprinzips. Da dies nur im Zusammenhang mit der Konzeption seines Buches

> Dialogo di Galileo Galilei sopra i due Massimi Sistemi del Mondo Tolemaico e Copernicano (Dialog von Galileo Galilei über die zwei wichtigsten Weltsysteme, das ptolemäische und das kopernikanische), erschienen 1632.

zu verstehen ist, soll hier kurz auf den „Fall Galileo Galilei“ eingegangen werden. Das Buch ist nicht auf Latein, sondern italienisch geschrieben und sollte weite gebildete Kreise erreichen. Es ist nicht aufgebaut wie eine übliche wissenschaftliche Publikation aus der damaligen Zeit, sondern als ein Gespräch zwischen drei Personen.

Dabei handelt es sich um Salviati, Salgredo und Simplicio. Während Salviati und Salgredo die Namen von lang zuvor verstorbenen Freunden Galileis sind [4a] und in der Darstellung des Buches über großes Wissen verfügen übernimmt Simplicio die Rolle des Einfältigen. Es ist zu erkennen, dass Salvati, teilweise aber auch Simplicio die Person Galileos darstellen sollen während Salgredo ein gebildeter Laie ist [4b]. Von Salvati wird auch das bereits erwähnte Relativitätsprinzip erläutert. In Abb. 1.1 ist in deutscher Übersetzung aus dem Jahr 1891 die entsprechende Passage zitiert; der Text ist beste Prosa und sicher auch ohne Verwendung einer Formel verständlich.

Die wissenschaftlichen Aussagen dieses Buches sind heute weitgehend überholt, jedoch ist die Lektüre der Einführung des Übersetzers Erich Strauss empfehlenswert, da sie einen spannenden und umfassenden Einblick in das Denken und den Erkenntnisstand der damaligen Zeit gibt. Neben diesem neueren Buch gab es auch zeitgenössische Übersetzungen z. B. 1661 von Thomas Salusbury in die englische Sprache [5].

Das Format des Dialogs wurde deswegen gewählt, weil die handelnden Personen frei waren und somit auch mit der herrschenden Lehrmeinung nicht übereinstimmende Positionen vertreten konnten. Obwohl die Schriften von Kopernikus über das heliozentrische Weltsystem verboten worden waren, durften seine mathematischen Berechnungen zur Planetenbewegung, die im Vergleich zu den vorher existierenden viel genauer und einfacher waren, benutzt werden, wenn man dabei betonte, dass es sich hierbei nur um eine Hypothese handeln würde und in Wirklichkeit das ptolemäische Weltbild mit der Erde als Mittelpunkt galt [4]. Diesem glaubte Galilei in ausreichender Weise nachzukommen, wenn er das Abschlusskapitel des Dialogs mit der „richtigen“ ptolemäischen Darstellung dem Simplicio übertrug. Dies ging aber gründlich daneben.

Obwohl dem Buch zuvor von der Inquisition das Imprimatur, d. h. die Druckerlaubnis erteilt worden war wurde Galilei angeklagt. Hauptgrund dürfte die Feindschaft mit den Jesuiten gewesen sein; diese war entstanden, weil Galilei sich in erbittertem Streit mit einem Mitglied dieses Ordens, Christoph Schreiner (1573-1650) bezüglich der erstmaligen Entdeckung der Sonnenflecken befand. Nachdem Papst Urban VIII ihm seine Gunst entzogen hatte (angeblich, weil seine Eitelkeit durch Äußerungen Galileis verletzt worden war) kam es zum Prozess. Galilei musste Widerrufen und wurde zu lebenslanger Kerkerhaft verurteilt.

Schließt Euch in Gesellschaft eines Freundes in einen möglichst großen Raum unter dem Deck eines großen Schiffes ein. Verschafft Euch dort Mücken, Schmetterlinge und ähnliches fliegendes Getier; sorgt auch für ein Gefäß mit Wasser und kleinen Fischen darin; hängt ferner oben einen kleinen Eimer auf, welcher tropfenweise Wasser in ein zweites enghalsiges darunter gestelltes Gefäß träufeln läßt. Beobachtet nun sorgfältig, solange das Schiff stille steht, wie die fliegenden Tierchen mit der nämlichen Geschwindigkeit nach allen Seiten des Zimmers fliegen. Man wird sehen, wie die Fische ohne irgend welchen Unterschied nach allen Richtungen schwimmen; die fallenden Tropfen werden alle in das untergestellte Gefäß fließen. Wenn Ihr Euerem Gefährten einen Gegenstand zuwerft, so braucht Ihr nicht kräftiger nach der einen als nach der anderen Richtung zu werfen, vorausgesetzt, daß es sich um gleiche Entfernungen handelt. Wenn Ihr, wie man sagt, mit gleichen Füßen einen Sprung macht, werdet Ihr nach jeder Richtung hin gleichweit gelangen. Achtet darauf, Euch aller dieser Dinge sorgfältig zu vergewissern, wiewohl kein Zweifel obwaltet, daß bei ruhendem Schiffe alles sich so verhält. Nun laßt das Schiff mit jeder beliebigen Geschwindigkeit sich bewegen: Ihr werdet — wenn nur die Bewegung gleichförmig ist und nicht hier- und dorthin schwankend — bei allen genannten Erscheinungen nicht die geringste Veränderung eintreten sehen. Aus keiner derselben werdet Ihr entnehmen können, ob das Schiff fährt oder stille steht. Beim Springen werdet Ihr auf den Dielen die nämlichen Strecken zurücklegen wie vorher, und wiewohl das Schiff aufs schnellste sich bewegt, könnt Ihr keine größeren Sprünge nach dem Hinterteile als nach dem Vorderteile zu machen: und doch gleitet der unter Euch befindliche Boden während der Zeit, wo Ihr Euch in der Luft befindet, in entgegengesetzter Richtung zu Euerem Sprunge vorwärts. Wenn Ihr Euerem Gefährten einen Gegenstand zuwerft, so braucht Ihr nicht mit größerer Kraft zu werfen, damit er ankomme, ob nun der Freund sich, im Vorderteile und Ihr Euch im Hinterteile befindet oder ob Ihr umgekehrt steht. Die Tropfen werden wie zuvor in das untere Gefäß fallen, kein einziger wird nach dem Hinterteile zu fallen, obgleich das Schiff, während der Tropfen in der Luft ist, viele Spannen zurücklegt. Die Fische im Wasser werden sich nicht mehr anstrengen müssen, um nach dem vorangehenden Teile des Gefäßes zu schwimmen als nach dem hinterher folgenden; sie werden sich vielmehr mit gleicher Leichtigkeit nach dem Futter begeben, auf welchen Punkt des Gefäßrandes man es auch legen mag. Endlich werden auch die Mücken und Schmetterlinge ihren Flug ganz ohne Unterschied nach allen Richtungen fortsetzen. Niemals wird es vorkommen, daß sie gegen die dem Hinterteil zugekehrte Wand gedrängt werden, gewissermaßen müde von der Anstrengung dem schnellfahrenden Schiffe nachfolgen zu müssen, und doch sind sie während ihres langen Aufenthaltes in der Luft von ihm getrennt. Verbrennt man ein Korn Weihrauch, so wird sich ein wenig Rauch bilden, man wird ihn in die Höhe steigen, wie eine kleine Wolke dort schweben und unterschiedslos sich nicht mehr nach der einen als nach der anderen Seite hin bewegen sehen. Die Ursache dieser Übereinstimmung aller Erscheinungen liegt darin, daß die Bewegung des Schiffes allen darin enthaltenen Dingen, auch der Luft, gemeinsam zukommt. Darum sagte ich auch, man solle sich unter Deck begeben; denn oben in der freien Luft, die den Lauf des Schiffes nicht begleitet, würden sich mehr oder weniger deutliche Unterschiede bei einigen der genannten Erscheinungen zeigen. So würde unzweifelhaft der Rauch ebensoweit zurückbleiben wie die Luft selbst. Desgleichen würden die Mücken und Schmetterlinge, von der Luft behindert, der Bewegung des Schiffes nicht folgen können, wenn sie sich von ihm um ein beträchtliches Stück entfernten; halten sie sich aber in der Nähe, so würden sie unbehindert und ohne Anstrengung dem Schiffe nachkommen, weil es, als ein unregelmäßig geformtes Bauwerk, die benachbarten Teile der Luft mit sich führt. Aus ähnlichen Gründen sehen wir bisweilen, wie die lästigen Mücken und Bremsen scharf trabenden Pferden nachfolgen und sich bald auf diesen, bald auf jenen Körperteil niederlassen. Bei den fallenden Tropfen hingegen würde der Unterschied ganz geringfügig sein, beim Springen und beim Werfen schwerer Körper sogar völlig unmerklich.

Abb. 1.1 Erste Formulierung des klassischen Relativitätsprinzips von G. Galilei
Übersetzung von E. Strauss [4c] aus dem Jahre 1891

Die Haft wurde aber kurz darauf in einen Hausarrest umgewandelt und er durfte sein restliches Leben das Haus auch für erbetene ärztliche Behandlungen nicht mehr verlassen. Selbst nach seinem Tod wurde ihm ein ehrenvolles Begräbnis verweigert. Obwohl das Urteil kein explizites Publikationsverbot enthielt, konnte sein späteres Hauptwerk, in dem er die Kinematik und Festigkeitslehre begründete, nicht im Inland erscheinen und wurde dann vom Elsevier-Verlag in Leiden veröffentlicht.

Das von Galilei formulierte Relativitätsprinzip lässt sich „mit Mücken, Schmetterlingen und sonstigem fliegenden Getier“ nur schwer anschaulich darstellen. Um aber weiterhin ein Schiff als Ausgang der Betrachtungen beizubehalten, wird im Folgenden angenommen, dass dieses an einer Hafenmole vorbeifährt, wo gerade eine Fahne mit gleichmäßiger Geschwindigkeit an einem Mast hochgezogen wird und zur Zeit t_0 die Spitze erreicht. Für den ruhenden Beobachter an der Mole erscheint die Bewegung der Fahne als senkrecht (Koordinaten $x = 0,\ y$ und Zeit t als veränderliche Größen) während vom Schiff, das sich mit der Geschwindigkeit v dazu bewegt, die Fahne bezüglich seines mitbewegten Koordinatensystems (bezeichnet mit x', y', t') um $v \cdot t_0$ zurückbleibt (s. Abb. 1.2).

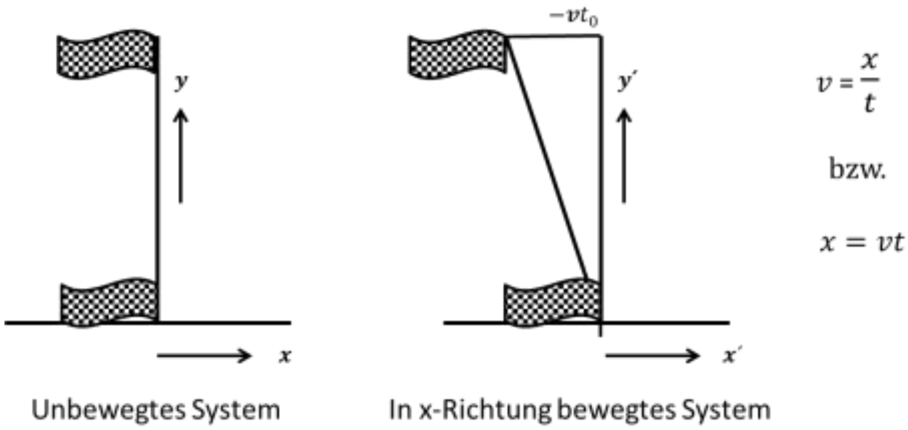


Abb. 1.2: Unterschiedliche Wahrnehmung des gleichen Sachverhaltes beobachtet aus verschiedenen Bezugssystemen

Die Koordinaten können demnach mit den folgenden Beziehungen ineinander umgerechnet werden:

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z \quad t' = t \tag{1.01}$$

Wird dagegen am Schiff eine Fahne hochgezogen so gilt der umgekehrte Fall und aus Sicht des ruhenden Beobachters an der Mole bewegt sich die Fahne in x-Richtung

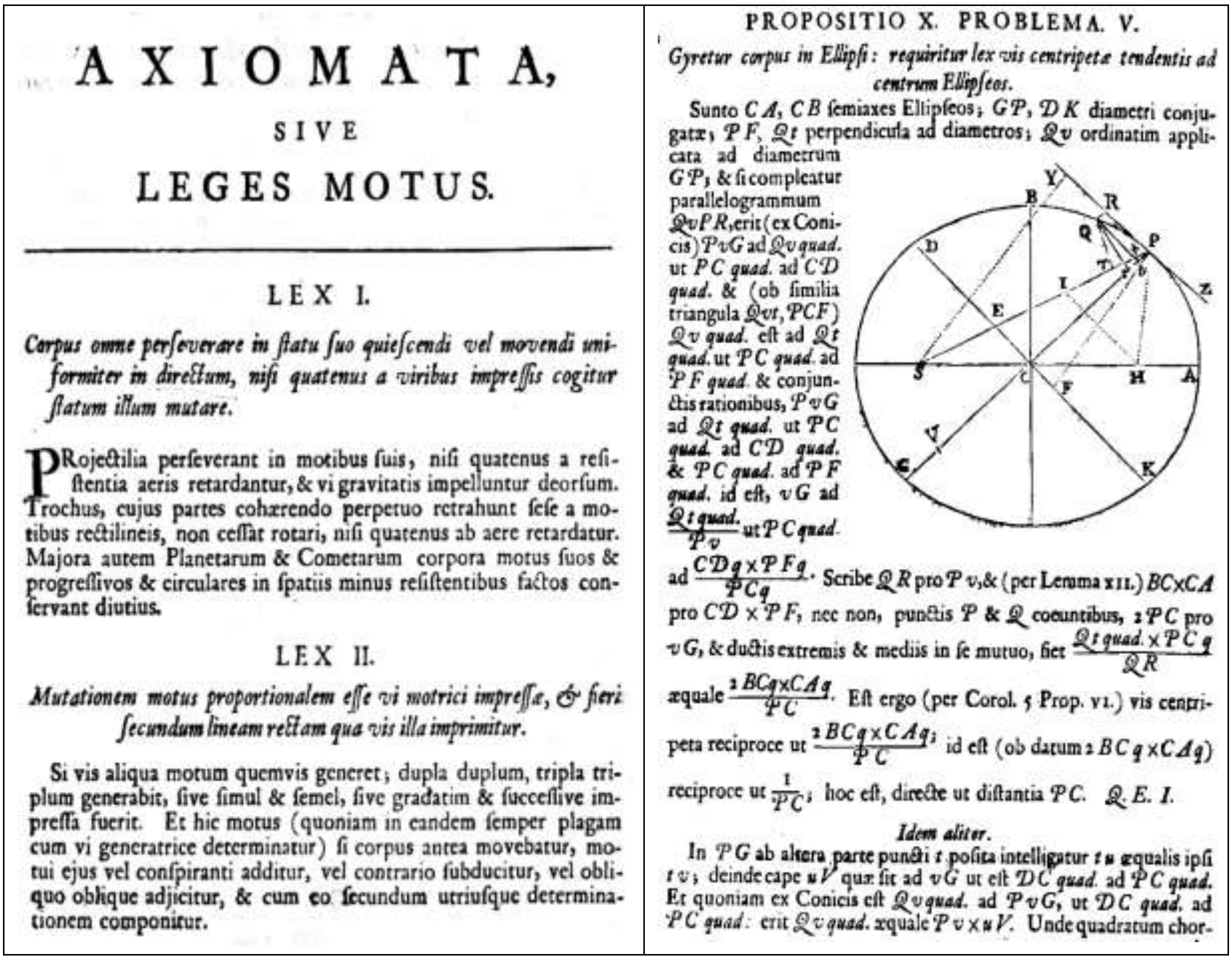
$$x = x' + vt, \quad y = y', \quad z = z' \quad t = t' \tag{1.02}$$

wobei dies nur eine einfache Umstellung der Gl. (1.01) erfordert. Dieses Gleichungssystem wird als die Galilei-Transformation der klassischen Mechanik bezeichnet. Wichtig ist hierbei, dass es nur eine Veränderung in Bewegungsrichtung gibt, die anderen Raumrichtungen und die Zeit bleiben unbeeinflusst. Dieses Prinzip wurde über mehrere Jahrhunderte als a priori gegeben betrachtet, weil es der menschlichen Erfahrung unmittelbar entspricht und dementsprechend auch lange Zeit nicht hinterfragt. Wie später noch ausgeführt wird, weiß man heute, dass die Gültigkeit nur dann (näherungsweise) gegeben ist, wenn die Systemgeschwindigkeit (d. h. in diesem Fall die des Schiffes in x-Richtung) deutlich kleiner als die Lichtgeschwindigkeit ist.

Obwohl damit seitens Galilei bereits wichtige Grundlagen geschaffen worden waren, blieb die hauptsächliche Vervollständigung der klassischen Mechanik einem anderen vorbehalten. Im Jahr 1687 veröffentlichte Isaac Newton (1643-1727) das Werk

> Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (Mathematische Prinzipien der Naturlehre)

Diese auf Latein geschriebene Arbeit enthält die bekannten, später nach ihm benannten Axiome sowie umfassende Berechnungen und Beweise. Diese sind jedoch in Textform gefasst und aus heutiger Sicht nur schwer lesbar, da sie noch keine Gleichungen mit Verwendung des Gleichheitszeichens enthalten (vgl. Abb. 1.3). Diese Schrift ist im Original sowie in verschiedenen Übersetzungen und neueren Übertragungen verfügbar, unter anderem ist von der Cambridge University die von Newton genutzte Originalversion mit handschriftlichen Bemerkungen abrufbar.



AXIOMATA,

SIVE

LEGES MOTUS.

LEX I.

Corpus omne perſeverare in ſtatu ſuo quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, niſi quatenus a viribus impreſſis cogitur ſtatum illum mutare.

Projectilia perſeverant in motibus ſuis, niſi quatenus a reſiſtentia aeris retardantur, & vi gravitatis impelluntur deorſum. Trochus, cujus partes cohærendo perpetuo retrahunt ſeſe a motibus rectilineis, non ceſſat rotari, niſi quatenus ab aere retardatur. Majora autem Planetarum & Cometarum corpora motus ſuos & progreſſivos & circulares in ſpatiis minus reſiſtentibus factos conſervant diutius.

LEX II.

Mutationem motus proportionalem eſſe vi motrici impreſſæ, & fieri ſecundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Si vis aliqua motum quemvis generet; dupla duplum, tripla triplum generabit, ſive ſimul & ſemel, ſive gradatim & ſucceſſive impreſſa fuerit. Et hic motus (quoniam in eandem ſemper plagam cum vi generatrice determinatur) ſi corpus antea movebatur, motui ejus vel conſpiranti additur, vel contrario ſubducitur, vel obliquo oblique adjicitur, & cum eo ſecundum utriuſque determinationem componitur.

PROPOSITIO X. PROBLEMA. V.

Gyretur corpus in Ellipſi: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum Ellipſeos.

Sunto CA, CB ſemiaxes Ellipſeos; GP, DK diametri conjugatæ; PF, Qt perpendicula ad diametros; Qv ordinatim applicata ad diametrum GP; & ſi compleatur parallelogrammum $QvPR$, erit (ex Conicis) PvG ad Qv *quad.* ut PC *quad.* ad CD *quad.* & (ob ſimilia triangula Qvt, PCF) Qv *quad.* eſt ad Qt *quad.* ut PC *quad.* ad PF *quad.* & conjunctis rationibus, PvG ad Qt *quad.* ut PC *quad.* ad CD *quad.* & PC *quad.* ad PF *quad.* id eſt, vG ad $\frac{Qt\ quad.}{Pv}$ ut PC *quad.* ad $\frac{CDq \times PFq}{PCq}$. Scribe QR pro Pv, & (per Lemma XII.) $BC \times CA$ pro $CD \times PF$, nec non, punctis P & Q coeuntibus, $2PC$ pro vG, & ductis extremis & mediis in ſe mutuo, fiet $\frac{Qt\ quad. \times PCq}{QR}$ æquale $\frac{2\,BCq \times CAq}{PC}$. Eſt ergo (per Corol. 5 Prop. VI.) vis centripeta reciproce ut $\frac{2\,BCq \times CAq}{PC}$; id eſt (ob datum $2\,BCq \times CAq$) reciproce ut $\frac{1}{PC}$; hoc eſt, directe ut diſtantia PC. *Q. E. I.*

Idem aliter.

In PG ab altera parte puncti t poſita intelligatur tu æqualis ipſi tv; deinde cape uV quæ ſit ad vG ut eſt DC *quad.* ad PC *quad.* Et quoniam ex Conicis eſt Qv *quad.* ad PvG, ut DC *quad.* ad PC *quad.*: erit Qv *quad.* æquale $Pv \times uV$. Unde quadratum chor-

Abb. 1.3: Auszüge aus Newtons Philosophiae Naturalis Principia Mathematica
Links: Erstes und zweites Axiom
Rechts: Typischer Text mit Diagramm und Formeln ohne Verwendung eines Gleichheitszeichens „="

In dem Buch werden erstmals die heute als „Newtons Axiome“ bezeichneten Grundgesetze der Mechanik definiert. Zur Darstellung wird im Folgenden eine dem heutigen Sprachgebrauch angepasste Version genutzt. Außerdem werden die zugehörigen Formeln in Vektorschreibweise dargestellt. Die Definition von physikalischen Größen als Vektoren, d. h. die Zusammenführung von Betrag und Richtung wurde erst im 19. Jahrhundert durch den deutschen Lehrer Herrmann Günter Graßmann (1809-1877) entwickelt und war demzufolge Newton noch nicht bekannt. Diese Darstellungen sind jedoch heute üblich und sollen demzufolge auch hier genutzt werden.

1. *Das Trägheitsgesetz*

   Jeder Körper mit konstanter Masse verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung, sofern er nicht durch Kräfte gezwungen wird, seinen Bewegungszustand zu ändern.

$$v = const. \quad \text{falls} \sum_i \vec{F}_i = 0 \tag{1.03}$$

   Diese Feststellung erfordert ein hohes Maß an Abstraktion, weil die in der Natur zu beobachtenden Bewegungen stets durch äußere Einflüsse wie Reibung und Gravitation beeinflusst werden.

2. *Das Grundgesetz der Dynamik*

   Die zeitliche Änderung des Impulses eines Massenpunktes ist gleich der wirkenden Kraft. Bei konstanter Masse ist Kraft gleich Masse mal Beschleunigung

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{1.04}$$

3. *Das Reaktionsprinzip*

   Übt ein Körper 1 auf einen Körper 2 die Kraft $\vec{F}_{12}$ aus, so reagiert der Körper 2 auf den Körper 1 mit einer Gegenkraft $\vec{F}_{21}$. Es gilt

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{12} \tag{1.05}$$

   oder allgemein „Aktion ist gleich Reaktion“.

Es existiert eine weitere aus der Schrift abzuleitende Gesetzmäßigkeit, die aber von Newton selbst nicht als Axiom eingeführt wurde. Diese ist jedoch ebenfalls sehr wichtig und wird heute vielfach als 4. Axiom bezeichnet

4. *Das Superpositionsprinzip*

   Wirken auf einen Punkt mehrere Kräfte, so addieren sich diese vektoriell.

$$\vec{F}_{res} = \sum_i \vec{F}_i \tag{1.06}$$

Diese 4 Axiome bilden die Grundlage der klassischen Mechanik und es können dementsprechend alle Prozesse darauf zurückgeführt werden.

Es ist hierbei noch bemerkenswert, dass das Imprimatur für dieses Buch von Samuel Pepys (1633-1703) erteilt wurde, dessen großem Freundeskreis auch Newton angehörte.

Anders als in den katholischen Ländern, wo Vertreter der Inquisition dies vornahmen, war er im protestantischen England als Präsident der Royal Society dafür zuständig. Pepys ist der Nachwelt bekannt durch seine geheimen Tagebücher, die er zwischen 1660 und 1669 anfertigte und die erst nach seinem Tod gefunden und dann veröffentlicht wurden. Diese enthalten interessante und unverfälschte Tatsachenberichte, so z. B. über die große Pest 1665 und den großen Brand von London 1666; außerdem sind die drastischen Schilderungen seiner Mitbürger und die seiner vielen außerehelichen Beziehungen zu erwähnen. Er ist einer der bekanntesten Autoren der damaligen Zeit und seine Bücher werden noch heute gedruckt.

Von Newton wurde auch das erste bekannte Spiegelteleskop hergestellt, das von seinen Zeitgenossen sehr geschätzt wurde. Außerdem war er Mitbegründer der Infinitesimalrechnung, wegen der er sich mit Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), der auch als letzter Universalgelehrter bezeichnet wird, einen teilweise boshaft geführten Prioritätsstreit lieferte. So verklagte er ihn vor der Royal Society – dessen Präsident er zu diesem Zeitpunkt war – wegen Plagiats und diese sprach Leibnitz schuldig. Newton rühmte sich später ihm das Herz gebrochen zu haben. Heute gelten Newton und Leibniz als unabhängige Begründer dieses Bereiches der Mathematik.

Neben seinen bahnbrechenden Entdeckungen gehörte jedoch die größte Leidenschaft Newtons der Alchemie, der er einen erheblichen Teil seiner Forschungen widmete. Ein großer Teil der Bücher aus seinem Nachlass, der nunmehr im Kings College in London aufbewahrt wird, befasst sich mit den entsprechenden Themen. Er wurde Warden (1696-1700) und anschließend Master (1700-1727) der Royal Mint in London. Letztendlich war es ihm also nicht gelungen Gold oder Silber zu erzeugen dafür wurde er mit dieser Ernennung jedoch Herr des Geldes.

Seinem Charakter gemäß nahm er seine Tätigkeit an der Royal Mint sehr ernst. Eines der Hauptprobleme dieser Institution in der damaligen Zeit war die Falschmünzerei; dabei wurden den von der Krone herausgegebenen Silbermünzen durch Abfeilen Metall abgetragen, das dann eingeschmolzen und zu Falschgeld geprägt wurde. Er ließ die Täter rigoros verfolgen und verurteilen, was den Gesetzen der damaligen Zeit zufolge üblicherweise mit der Todesstrafe geahndet wurde. Dies und auch weitere Begebenheiten aus seinem Leben sind dem sehr unkonventionellen Buch von F. Freistetter zu entnehmen (Newton, wie ein Arschloch die Welt neu erfand [83]).

1.3 Licht und seine Ausbreitung

Neben der klassischen Mechanik ist eine weitere wichtige Grundlage für die im Folgenden dargestellten Überlegungen die Natur des Lichts und die Art und Weise wie es sich ausbreitet. In der Frühzeit gab es abhängig vom Kulturkreis verschiedene Überlieferungen zur Natur des Lichts und des Sehens. So war es in der griechischen Mythologie die Göttin Aphrodite, die aus den Elementen Erde, Wasser, Luft und Feuer das Augenlicht schuf; dies war so zu verstehen, dass das Licht aus dem Auge austritt und Dinge dadurch sichtbar werden. Von Euklid wurde etwa im Jahr 300 vor unserer Zeitrechnung das Verhalten von Lichtstrahlen untersucht. Er stellte fest, dass Licht in geraden Strahlen verläuft und entdeckte die Reflexionsgesetze. Außerdem kam er zu dem Schluss, dass Licht nicht aus dem Auge austreten kann, da sonst keine Unterschiede zwischen Tag und Nacht auftreten dürften. Obwohl damit schon eine Basis für weitere Erkenntnisse gelegt war, blieben weitere Fortschritte den Entdeckern der Neuzeit vorbehalten.

Von Newton wurde angenommen, dass das Licht aus kleinen Korpuskeln mit unterschiedlicher Größe und Eigenschaften besteht. Er unternahm Versuche mit Spiegeln, Linsen und Prismen um die Brechungsgesetze sowie andere optische Eigenschaften des Lichts abzuleiten und war auch teilweise erfolgreich. Mit seiner Korpuskel-Theorie konnten aber verschiedene andere Eigenschaften insbesondere bezüglich Interferenzbildungen nicht erklärt werden.

Vom Niederländer Christiaan Huygens (1629-1695) wurde 1690 die erste vollständige Wellentheorie des Lichts formuliert. Durch seine umfassenden Beschreibungen konnte er unter Verwendung der Wellentheorie als erster eine schlüssige Erklärung für die bekannten Phänomene Reflektion und Brechung geben. Neben seinen bahnbrechenden Arbeiten zur Wellentheorie ist Huygens auch als Astronom von großer Bedeutung; er entdeckte durch die Verwendung verbesserter Teleskope, die er zusammen mit seinem Bruder Constantijn entwickelt hatte, als erster den Saturnmond Titan und identifizierte die Saturnringe. Außerdem wurden mathematische Grundüberlegungen zur Kreiszahl π und zur Anwendung von Logarithmen von ihm durchgeführt und er gilt als Mitbegründer der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Die Wellentheorie war lange Zeit umstritten, insbesondere weil die Korpuskeltheorie als Gegenmodell vom großen Isaac Newton formuliert worden war. Eines seiner Hauptargumente war dabei, dass Licht von einem Hindernis abgeschirmt wird und dahinter keine Wellen (wie z. B. auf einer Wasseroberfläche) sichtbar werden. Es war noch nicht bekannt, dass die Wellenlängen des Lichts sehr klein sind (ca. 400-700 Nanometer).

Erst das von Thomas Young (1773-1829) durchgeführte Doppelspaltexperiment, bei dem die Wellen durch Interferenzen sichtbar gemacht werden konnten, verhalf der Theorie zum endgültigen Durchbruch. Young löste auch das Problem der Polarisation, indem er das Licht als Transversalwelle deutete. Nach heutigem Sprachgebrauch bedeutet dies, dass die Vektoren des elektrischen und des magnetischen Felds senkrecht zueinanderstehen und auch senkrecht zur Ausbreitungsrichtung verlaufen (vgl. Abb. 1.4). Dies steht im Gegensatz zum Verhalten bei einer Schallwelle, die sich longitudinal ausbreitet, d. h. es bilden sich hierbei in Bewegungsrichtung Schwingungen im transportierenden Medium wie z. B. in Luft oder Wasser und es ist deshalb dabei auch keine Polarisation möglich. Lineare Polarisation bei Licht tritt auf, wenn viele sich überlagernde Wellen die gleiche Orientierung aufweisen.

Im Jahr 1676 wurde von Ole Christian Rømer (1644-1710) erstmals der Nachweis geführt, dass die Lichtgeschwindigkeit endlich ist. Er beobachtete die Verfinsterung des Jupiter-Mondes Io, die bei Erdnähe des Jupiters früher, bei Erdferne später auftritt. Das Ergebnis widersprach dem Verständnis anderer, von Aristoteles bis Descartes, die eine unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts annahmen und setzte sich nur langsam durch. Aus den Messergebnissen von Rømer, der bei seinen Messungen nur die Zeitverzögerung bestimmt hatte, errechnete Huygens 1678 eine Geschwindigkeit von etwa 213000 km/s, die etwa 70 % des tatsächlichen Wertes beträgt. Gemessen an den Möglichkeiten der damaligen Zeit ist dies bereits bemerkenswert genau.

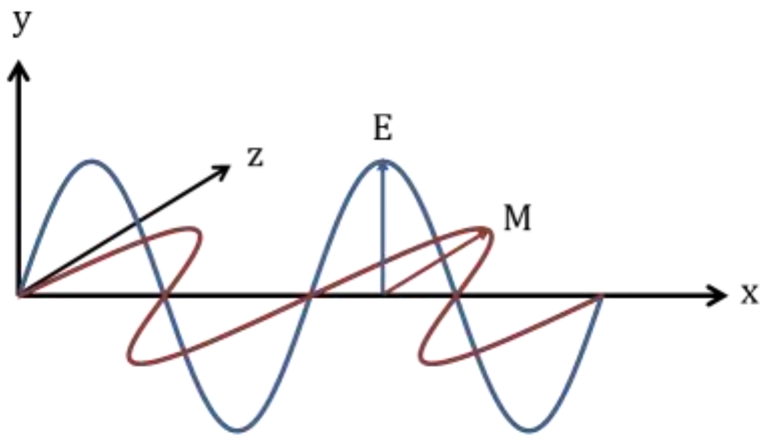


Abb. 1.4: Ausbreitung einer elektromagnetischen Welle mit den Komponenten des elektrischen und des magnetischen Felds (E bzw. M)

Dem Verständnis der damaligen Zeit entsprechend nahm man an, dass das Licht für seine Ausbreitung einen Träger benötigt. Dies entspricht der Übertragung des mechanischen Bildes, das sich für die Schallausbreitung in Medien ergibt. Hierbei werden Atome bzw. Moleküle zu Schwingungen angeregt. Der Mittelpunkt der Schwingungsbewegung bleibt hierbei konstant was bedeutet, dass die Atome bzw. Moleküle im Mittel sich nicht bewegen aber dass eine Energieübertragung erfolgt.

Erste Erkenntnisse hierzu stammen von Otto von Guericke (1602-1686). Er erfand 1649 die Kolbenvakuumpumpe und führte damit eine Vielzahl von Versuchen durch. Der wohl bekannteste ist die Demonstration der Kraftwirkung des Luftdrucks, für die er aus Kupfer zwei Halbkugeln (Durchmesser ca. 42 cm) anfertigen ließ. Auf dem Reichstag in Regensburg im Jahre 1657 ließ er in Anwesenheit von Kaiser Ferdinand III nach dem Zusammenlegen unter Nutzung einer Dichtung und anschließender Evakuation an jeder Seite acht Pferde anspannen, denen es nicht möglich war, die Halbkugeln auseinanderzuziehen. Die Versuchsvorrichtung wurde unter Nutzung des Namens seiner Heimatstadt als „Magdeburger Halbkugeln“ bekannt. Neben diesen spektakulären Versuchen führte er aber auch grundlegende Untersuchungen durch und konnte erstmalig zeigen, dass ein Vakuum keinen Schall leitet aber für Licht durchlässig ist.

Das Medium, dass den Kenntnissen dieser Zeit entsprechend zur Übertragung des Lichts erforderlich war wurde allgemein „Lichtäther“ oder einfach „Äther“ genannt. Der Begriff stammt ursprünglich aus der griechischen Mythologie und bezeichnet den (blauen) Himmel. Im Gegensatz zu den vier irdischen Elementen, die stetigen Veränderungen unterliegen (diese sind Erde, Wasser, Luft und Feuer, die interessanterweise den Aggregatzuständen fest, flüssig, gasförmig und ionisiert entsprechen), war der Äther das 5. himmlische Element und unveränderlich [4d].

Im Laufe der Jahrhunderte hat es viele verschiedene Theorien zur Natur des Äthers gegeben. Er musste alles durchdringen, durfte aber den sich in ihm bewegenden Objekten keinen Widerstand entgegensetzen da er sonst die physikalischen Gesetze beeinflusst hätte. Man war der Meinung, dass Lichtwellen sich im Äther ausbreiten, ähnlich wie Schallwellen in der Luft. Es waren aber zwei Beobachtungen aus Versuchen, die eine eindeutige Festlegung verhinderten, weil sie sich fundamental widersprechen:

1. Der erstmals von James Bradley (1693-1762) im Jahre 1725 entdeckte Effekt der stellaren Aberration.
2. Der in bewegten transparenten Medien (z. B. Glas oder Wasser) auftretende Effekt der teilweisen Mitführung des Lichts in Bewegungsrichtung. Dieser Effekt ist abhängig vom Brechungsindex des Mediums.

zu Punkt 1:

Unter stellarer Aberration versteht man in der Astronomie eine kleine scheinbare Ortsveränderung von Gestirnen, wenn ein Beobachter sich seitlich dazu bewegt. Die Erde bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von ca. 30 km/s um die Sonne; nach einem halben Jahr tritt also ein Messeffekt gegenüber dem nicht bewegten Himmel von 60 km/s auf, der beim Lichteinfall zu einem Versatz führt, der von Bradley mit Präzisionsmessungen eines Zenitteleskops nachgewiesen werden konnte. Ein solches Teleskop ist senkrecht stehend fest ausgerichtet. Bradley hatte dies in seinem Haus entlang des Kamins aufgebaut und verbrachte die meiste Zeit seiner Beobachtungen auf einer Bank liegend unter dem Gerät.

Eine wichtige Voraussetzung für das Auftreten eines Aberrationseffekts ist die Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit. Bradley berechnete für das Licht eine 10210-fach größere Geschwindigkeit als die Erdbewegung, was mit einer Genauigkeit von 2% tatsächlich der Fall ist. Außerdem zog er die Schlussfolgerung, dass ein vorhandener Äther nicht durch Massen wie z. B. die der Erde beeinflusst wird. Würde die Erde den lichttragenden Äther mitführen, so wäre grundsätzlich keine Aberration messbar.

Dieser Effekt ist nicht zu verwechseln mit der Messung der Parallaxe, d. h. der Winkelabhängigkeit eines relativ nahen Sterns in Abhängigkeit von der Stellung der Erde zur Sonne im Ablauf eines Jahres. Eine solche Messung gelang erstmals Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846) im Jahr 1838 beim Stern 61 Cygni, dessen Entfernung er aufgrund der Winkelbestimmung auf 10,28 Lichtjahre festlegte (heutiger Wert: 11,4 Lichtjahre). Dieser Effekt ist etwa 2 Größenordnungen kleiner als der der Aberration.

Entfernungsbestimmungen sind heute ein wesentlicher Bestandteil der Kosmologie. Die Messung der Parallaxe ist mit erdgebundenen Teleskopen jedoch nur bis zu Entfernungen von etwa 100 Lichtjahren möglich. Von Henrietta S. Leavitt (1868-1921) wurde dann im Jahr 1912 durch umfangreiche Untersuchungen an Sternen der Magellanschen Wolken festgestellt, dass der Absolutwert der maximalen Helligkeit bei periodisch veränderlichen Sternen direkt mit deren Periode zusammenhängt. Da es im erdnahen Bereich ausreichend veränderliche Sterne gibt konnte damit eine erste Kalibrierung vorgenommen und die Ausdehnung unsere Galaxis ermittelt werden (100.000 Lichtjahre) und folgend die Entfernungen zur großen und kleinen Magellanschen Wolke (163.000 bzw. 200.000 Lj.) sowie später durch Edwin Hubble (1889-1953) zur Andromeda Galaxie (2,5 Mio. Lj.).

zu Punkt 2:

Erstmals im Jahr 1810 wurde von Francois Arago (1786-1853) ein Versuch durchgeführt, bei dem er bei einer Aberrationsmessung ein Prisma benutzte und eine Veränderung des

Aberrationswinkels erwartete, die jedoch nicht auftrat. Bereits 1818 wurde von Augustin Jean Fresnel (1788-1827) die Theorie aufgestellt, dass das Licht vom Medium teilweise mitgeführt wird und der auftretende Effekt durch den Brechungsindex bestimmt wird. Im Jahr 1851 wurde von Hyppolyte Fizeau (1819-1896) ein Versuch zur Messung der Lichtgeschwindigkeit in bewegtem Wasser durchgeführt. Hierbei wurde festgestellt, dass die Lichtgeschwindigkeit im Wasser steigt, wenn das Licht sich in Bewegungsrichtung ausbreitet und im umgekehrten Fall sinkt und dass die auftretenden Messwerte den von Fresnel formulierten Gleichungen entsprechen. Hierdurch wurde nun dem Äther als Medium für die Lichtausbreitung die Eigenschaft zugesprochen von der Materie mitgeführt zu werden.

Wegen ihrer grundlegenden Bedeutung werden die Themen Aberration in Kap 2.1.2 und die Mitführung in bewegten Medien in Kap. 4.3 noch ausführlich behandelt.

Aufgrund der widersprüchlichen Versuche gab es insbesondere im 19. Jahrhundert eine Vielzahl von Äthertheorien, die einen Zusammenhang erklären sollten. Auch Einstein hatte in seiner wohl ersten Veröffentlichung noch als Jugendlicher hierzu Überlegungen angestellt. Zusammenfassend lässt sich sagen, dass keine Einigkeit über die Natur des Äthers bestand, dass aber die Existenz zunächst von niemandem ernsthaft in Frage gestellt wurde.

1.4 Elektromagnetismus

Die mit einer elektrostatischen Aufladung verbundenen Effekte waren bereits in der Antike bekannt. Wenn Bernstein (griechisch: Elektron) mit einem Fell oder Tuch gerieben wird so zeigen sich Effekte wie z. B. die Erzeugung von Funken. Auch der Magnetismus ist lange bekannt, wobei die beobachteten Effekte dabei stets an das Vorhandensein von Magneteisenstein gebunden waren. Der Begriff ist abgeleitet von der griechischen Landschaft Magnesia, in der Magneteisenstein schon früh gefunden wurde. Eine praktische Nutzung lag dabei ausschließlich bei der Verwendung als Kompass, der schon im vorchristlichen China und in Europa etwa ab dem Jahr 1200 verwendet wurde.

Dies veränderte sich erst mit der Erfindung des elektrostatischen Generators. Otto v. Guericke führte Experimente mit einer Schwefelkugel durch und wollte damit kosmische Wirkkräfte nachweisen. Der Versuchsaufbau wird als erste „Elektrisiermaschine“ beschrieben, wobei Guericke Anziehungen und Abstoßungen erkannte aber wohl keine genaue Vorstellung von den Ursachen hatte. Spätere Ausführungen mit Verwendung von Glaskörpern und Lederkissen konnten sehr hohe Spannungen erzeugen. Ein weiterer Fortschritt ergab sich durch die Entwicklung der „Leidener Flasche“. Hierbei handelte es sich um die Frühform eines Kondensators, mit der Ladungen erzeugt und auch gespeichert werden konnten. Obwohl verschiedene elektrische und magnetische Effekte bekannt waren, wurden sie jedoch hauptsächlich zur Belustigung eines interessierten Publikums genutzt. So war es sehr beliebt, einer Menschenmenge, die sich an den Händen hielt, mit einer Leidener Flasche Stromschläge zu versetzen.

Im 18. Jahrhundert ergaben sich jedoch auch weitere neue Erkenntnisse, z. B. das Froschschenkelexperiment von Luigi Galvani (1737-1798), bei dem er nach der Berührung mit einer Elektrisiermaschine Zuckungen an toten Fröschen beobachtet hatte. Außerdem sind die Untersuchungen von Benjamin Franklin (1706-1790) bezüglich der elektrischen Natur von Blitzen zu erwähnen. Aufgrund der experimentellen Einschränkungen waren dies jedoch Ausnahmen und von einer umfassenden wissenschaftlichen Forschung zu diesem Thema kann nicht gesprochen werden.

Ein Wendepunkt wurde erreicht, als es Alessandro Volta (1745-1827) im Jahre 1799 gelang eine stabile Spannungsquelle in Form einer Batterie zu entwickeln, die als „Volta´sche Säule" bekannt wurde. Es handelt sich hierbei sicher um eine der bedeutendsten Erfindungen aller Zeiten und wurde auch von seinen Zeitgenossen entsprechend gewürdigt. Volta fügte hierfür Elemente zusammen, die jeweils aus einer Kupfer- und Zinkplatte bestanden, die mit säuregetränkten Leder- oder Papierstücken voneinander getrennt wurden und so elektrochemische Zellen bildeten. Der Aufbau gestattete je nach Anzahl der Zellen die Herstellung von Spannungen von mehr als 100 Volt (eine physikalische Einheit die später nach ihm benannt wurde).

In der Folge kam es durch Nutzung von sich nun ergebenden neuen Experimentiermöglichkeiten zu wesentlichen Entdeckungen. Hier sind insbesondere die Versuche von Ørsted, Faraday, Ampère, Heaviside und Lorentz zu nennen, mit denen die Eigenschaften von Ladungen, elektrischem Strom und die Zusammenhänge mit dem Magnetismus entdeckt wurden. Von Ampère wurde dann erstmalig der Begriff des Feldes eingeführt, der in der weiteren Entwicklung der Wissenschaft von großer Bedeutung ist.

Weitere Erkenntnisse brachten insbesondere die theoretischen Überlegungen von James C. Maxwell (1831-1879), der zeigen konnte, dass die Existenz von elektrischen und magnetischen Feldern zusammenhängt (vgl. Details in Kap. 12). Von ihm wurde danach auch erstmals von elektromagnetischen Feldern gesprochen. Ein wichtiges Ergebnis der entwickelten Gleichungen war, dass diese nicht der Galilei-Transformation entsprechen; hierdurch kam es zum Bruch mit der klassischen Mechanik, für die das weiterhin unterstellt wurde. Maxwell kam darüber hinaus mit seinen Formeln zu dem Ergebnis, dass elektromagnetische Wellen existieren müssen und dass diese sich mit Lichtgeschwindigkeit fortbewegen. Er vermutete daher, dass auch Licht eine elektromagnetische Welle ist.

Die experimentellen Arbeiten von Heinrich Hertz (1857-1894) bestätigten dann, dass Licht tatsächlich als Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen interpretiert werden muss. Von 1889 bis zu seinem Tod im Jahre 1894 war er Professor für Physik in Bonn. Noch heute werden die von ihm gebauten Apparaturen in den Vorlesungen für Experimentalphysik benutzt und zeigen anschaulich den technischen Stand der damaligen Zeit. Mit den gewonnenen Ergebnissen gab es nun in der Naturvorstellung keinen Zweifel, dass ein Äther zum Transport von elektromagnetischen Wellen existieren muss. Dieses Verständnis wurde allgemein auch auf die Gravitation ausgedehnt.

1.5 Das Michelson-Morley Experiment und erste Deutungsversuche

Albert A. Michelson (1852-1931) war zum Ende des 19. Jahrhunderts einer der bedeutendsten Physiker. Er trat im Jahr 1869 in die US Naval Academy ein und graduierte im Jahr 1873. Nach 2 Jahren auf See wurde er Akademie-Instrukteur für Physik und Chemie, 1879 wurde er dann nach Washington versetzt. Ein Jahr später ließ er sich freistellen und setzte in Europa (Berlin, Heidelberg und Paris) seine Studien fort. Im Jahr 1877 heiratete er die Tochter eines vermögenden Börsenmaklers. Er war sehr interessiert an wissenschaftlichen

Untersuchungen, insbesondere bezüglich der Messung der Lichtgeschwindigkeit; hierbei waren seine erworbenen Kenntnisse als Marine-Artillerieoffizier sehr hilfreich, wo er sich intensiv mit optischer Entfernungsmessung befasst hatte. Im Jahr 1881 verließ er das Militär und begann seine wissenschaftliche Kariere. 1907 war er der erste Amerikaner, dem der Nobelpreis verliehen wurde.

Das erste von ihm 1881 zunächst am Helmholtz Labor in Berlin durchgeführte Experiment zum Nachweis eines Lichtäthers führte nicht zum Erfolg, weil die Einflüsse des Verkehrs zu groß waren. Es wurde dann an der Sternwarte in Potsdam wiederholt und ergab ein Nullresultat [6]. Aufgrund von experimentellen Unzulänglichkeiten wurde die Aussage dieses Experiments aber zunächst in Zweifel gezogen und allgemein von der Fachwelt abgelehnt.

Gemeinsam mit Eduard W. Morley (1838-1923) wurden dann die Apparaturen verfeinert und der Versuch im Jahr 1887 in Cleveland wiederholt [7]. Es war nun zweifelsfrei nachgewiesen, dass die Messung der Lichtgeschwindigkeit in allen Richtungen stets zu den gleichen Ergebnissen führt, und zwar unabhängig von der Eigenbewegung der Messvorrichtung gegenüber einem angenommenen Äther. Aufgrund seiner großen Bedeutung werden das Experiment und seine Interpretation im Folgenden noch ausführlich dargestellt (Kap. 9.1).

In den nächsten Jahren führte dieses Ergebnis zu einer Vielzahl von Veröffentlichungen, deren wichtigste hier kurz dargestellt werden sollen. Von George F. FitzGerald wurde bereits im Jahre 1889 die These aufgestellt, dass sich der Raum bei Geschwindigkeiten nahe der Lichtgeschwindigkeit kontrahieren muss [8]. Er nahm an, dass die Kontraktion quadratisch von der Geschwindigkeit des bewegten Beobachters abhängt. Von Hendrik A. Lorentz (1853-1928) wurde dies unabhängig davon ebenfalls postuliert [9]. Da es aber weitere Widersprüche gab, wurde von Lorentz und auch von Henri Poincaré (1854-1912) im Jahre 1900 der Begriff der „Ortszeit" eingeführt [10]. Dies bedeutet, dass aus Sicht eines ruhenden Beobachters die Uhren bewegter Versuchsteilnehmer abhängig von ihrem Abstand bei einer Synchronisation unterschiedliche Zeiten anzeigen.

Hiermit war es nun möglich, quantitative Bestimmungen zwischen unterschiedlich bewegten Systemen durchzuführen. Die zugrundeliegenden Gleichungen wurden durch Poincaré, der hierfür auch den Namen „Lorentz-Transformation" einführte, in ihre moderne Gestalt gebracht [11]. Er ordnete der Raumkontraktion und der Zeitdilatation den gleichen Faktor zu (er nannte ihn k, Einstein β, heute wird er allgemein mit γ bezeichnet).

Die Transformationsgleichungen lauten

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \tag{1.07}$$

$$x' = \gamma(x - vt) \tag{1.08}$$

mit

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{1.09}$$

Hierbei sind x und t die Koordinaten eines Referenzsystems und x' und t' die Koordinaten eines dazu gleichförmig bewegten Systems, y- und z-Koordinaten ändern sich nicht.

Diese Zusammenhänge werden heute üblicherweise als Lorentz-Transformation (LT) oder „Lorentz-boost“ bezeichnet. Der englischsprachige Begriff „boost“ impliziert eine Beschleunigung, die aber hier nicht vorhanden ist. Es handelt sich stattdessen um Transformationsgleichungen, die die Beziehungen zwischen gleichförmig zueinander bewegten Systemen beschreiben, die keiner Beschleunigung unterliegen.

Mit diesen Gleichungen wurde darüber hinaus ein vergleichbarer Formalismus gefunden, der für die durch die Maxwell-Gleichungen gegebenen Zusammenhänge in elektromagnetischen Feldern gilt.

Die Herleitung der Lorentz-Gleichungen wird im Weiteren noch detailliert vorgenommen. Es sei noch erwähnt, dass bei Geschwindigkeiten $v \ll c$ der Faktor $\gamma = 1$ wird und die Gleichungen in die Galilei-Transformation aus Gl. (1.01) übergehen.

1.6 Einsteins Spezielle Relativitätstheorie

Im Jahre 1905 wurde von Albert Einstein (1879-1955) die Spezielle Relativitätstheorie (SRT) formuliert. Zu einer exakten Darstellung ist dabei zunächst die Einführung des Begriffs eines Inertialsystems erforderlich. Inertialsysteme sind alle Systeme, die sich in beliebiger Geschwindigkeit zueinander bewegen aber nicht beschleunigt werden oder eine Drehbewegung aufweisen.

Grundlagen der SRT sind das Relativitätsprinzip und das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit. In der Originalfassung hat Einstein folgende Formulierung gewählt [12]:

> „Relativitätsprinzip: Die Gesetze, nach denen sich die Zustände der physikalischen Systeme ändern, sind unabhängig davon, auf welches von zwei relativ zueinander in gleichförmiger Translationsbewegung befindlichen Koordinatensystemen diese Zustandsänderungen bezogen werden.
> Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit: Jeder Lichtstrahl bewegt sich im „ruhenden“ Koordinatensystem mit einer bestimmten Geschwindigkeit *V*, unabhängig davon, ob dieser Lichtstrahl von einem ruhenden oder bewegten Körper emittiert ist. Hierbei ist
>
> $$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Lichtweg}}{\text{Zeitdauer}}$$
>
> wobei „Zeitdauer“ im Sinne der Definition des § 1 aufzufassen ist.“

Die Interpretation ist nicht einfach, auch weil Einstein hier von einem „ruhenden“ System spricht. Die Bedeutung, insbesondere des 2. Paragrafen, wird aber klar, wenn man die im weiteren Text gewählte Vorgehensweise betrachtet, insbesondere die Anwendung der Synchronisationsvorschrift (heute: Einstein-Synchronisation, vgl. Kap. 3.4 und 12.2). Aufgrund der Komplexität werden Details erst in den weiterführenden Kapiteln diskutiert.

Wichtig ist hier der radikale Bruch mit der bisherigen Vorgehensweise bei der Aufstellung einer physikalischen Theorie. Während Lorentz und Poincaré die verfügbaren Versuchsergebnisse interpretierten, daraus die Transformationsgleichungen ableiteten und dann das Relativitätsprinzip fanden, setzte Einstein dies an die Spitze und war in der Lage die Gleichungen auf relativ einfache Weise abzuleiten. Allgemein gesprochen handelt es sich um die Prinzipien Bottom-up (Lorentz, Poincaré) und Top-down (Einstein).

Von Lorentz wurde im Jahr 1892 zunächst angenommen, dass es ein absolut ruhendes Grundsystem geben müsste [9]; 1910 war er dann der Auffassung, dass man niemals in der Lage sein würde zwischen beiden Ansätzen zu unterscheiden [13]. Unabhängig davon begrüßte er jedoch die von Einstein formulierte Darstellung der Relativitätstheorie und wurde ihr Verfechter [14,15], insbesondere wegen der „Kühnheit" des Ansatzes [14].

Zu der Zeit der Entwicklung war nicht abzusehen, dass es jemals zu einer messtechnischen Überprüfung der Theorie kommen würde. In den folgenden Jahrzehnten kamen aber immer neue Experimente hinzu, als deren wichtigste die von Kennedy-Thorndike [16] sowie Ives-Stilwell [17,18] zu nennen sind, die noch ausführlich erörtert werden. Außerdem wurden die Messgenauigkeiten immer weiter verbessert; moderne Messungen mit sehr hoher Präzision haben u. a. die Gültigkeit der von Lorentz formulierten Zeitdilatation eindrucksvoll gezeigt [19,20,21]. Andererseits kann jedoch die spezielle Relativitätstheorie in ihrer allgemeinen Form prinzipiell nicht bewiesen werden. Jeder positiv ausgehende Versuch stärkt zwar die Theorie, ein einziges eindeutiges Gegenbeispiel würde aber dazu führen, dass sie als widerlegt gelten muss.

Im ersten Teil seiner Veröffentlichung „Zur Elektrodynamik bewegter Körper" werden von Einstein die Transformationsgleichungen aus den bereits genannten Prinzipien abgeleitet. Da diese jedoch bereits zuvor von Lorentz entdeckt worden waren, werden sie heute allgemein als „Lorentz-Gleichungen" bezeichnet. Einsteins Veröffentlichung enthält keinerlei Literaturangaben und so ist auf eine Parallelentwicklung zu Lorentz zu schließen. Es ist darüber hinaus eindeutig das Verdienst von Einstein, den photoelektrischen Effekt mit diesen Beziehungen kombiniert zu haben und dadurch in der Folge vollständig auf das Ätherkonzept zu verzichten zu können.

Bei weiterführenden Überlegungen zum Relativitätsprinzip wurde von Einstein außerdem ebenfalls bereits in Jahr 1905 der Effekt vorhergesagt, dass die kinetische Energie einer bewegten Masse bei höheren Geschwindigkeiten gemäß der Formel

$$E_{kin} = m_0 c^2(\gamma - 1) \tag{1.10}$$

ansteigen muss [22]. Dieser Effekt hat sich experimentell bestätigt und wird heute allgemein als relativistischer Massenanstieg bezeichnet. Es ist hier wichtig zu sehen, dass die Bezeichnungen unterschiedlich sind. Lorentz wählte x, t für das Referenzsystem, während Einstein m_0 nutzte.

	Lorentz-Gleichungen	Relativistischer Massenanstieg
Gleichungen	$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$ $x' = \gamma(x - vt)$	$m = \gamma m_0$ $\{E = mc^2 = \gamma m_0 c^2\}$
Referenzsystem	$x,\ t$	m_0
Bewegtes System	$x',\ t'$	m

Tab. 1.1: Unterschiedliche Bezeichnungen für Referenz- und Ruhesystem bei den verschiedenen Ansätzen

In der wohl bekanntesten Formel Einsteins

$$E = mc^2 \tag{1.11}$$

beinhaltet die Gesamtmasse m den in Gl. (1.10) definierten Teil der kinetischen Energie. Auch die Masse erhöht sich mit steigender Geschwindigkeit um den Faktor γ. Beide Darstellungen werden bis zum heutigen Tag parallel benutzt. Diese Beziehungen bilden gemeinsam die Grundlage für die Spezielle Relativitätstheorie.

Für die Beschreibung der von Einstein postulierten Prinzipien, heute vielfach als Einstein-Axiome bezeichnet, gibt es keine einheitliche Definition und sie wird in jeder Publikation anders gewählt. In einigen Fällen ist die Darstellung für beide Axiome beschreibender Art („es können bei Messungen keine Unterschiede festgestellt werden“), in anderen werden die Eigenschaften in den Vordergrund gestellt („die Lichtgeschwindigkeit ist in allen Inertialsystemen gleich“, „alle Inertialsysteme sind äquivalent“). Obwohl diese Ausdrücke dem ersten Anschein nach identisch sind, gibt es jedoch wichtige Unterschiede, die im Weiteren noch genauer diskutiert werden müssen. Der bereits erwähnte relativistische Massenanstieg wird nicht in den Axiomen aufgeführt, ohne diesen Effekt wäre aber die Aussage bezüglich des Relativitätsprinzips nicht möglich.

Ohne die generelle Aussage einzuschränken oder zu verändern, lässt sich das Relativitätsprinzip in folgende Detailaussagen aufteilen:

a) Werden von Beobachtern in verschiedenen Inertialsystemen identische Versuche durchgeführt, so führen diese zu den gleichen Ergebnissen.

b) Ein Beobachter kann die in einem anderen Inertialsystem stattfindenden Ereignisse mit den von Lorentz formulierten Transformationsgleichungen und der relativistischen Massenzunahme widerspruchsfrei beschreiben. Insbesondere ist die Beobachtung der zeitlichen Abfolge von Ereignissen in allen Fällen gleich.

c) Alle Inertialsysteme sind relativ zueinander gleichwertig und es existiert kein absolutes “Ruhesystem“.

Die Aussage in Punkt a) wird im Folgenden als „Identitätsprinzip“, die Aussage in Punkt b) als „Äquivalenzprinzip“ und in Punkt c) als „Prinzip der völligen Gleichwertigkeit von Inertialsystemen“ bezeichnet. Obwohl über die Gültigkeit der SRT innerhalb der physikalischen Forschungsgemeinschaft weitgehender Konsens herrscht, gibt es bis heute viele theoretische und experimentelle Versuche einzelne Punkte zu widerlegen. Dies betrifft insbesondere Messungen bezüglich geringfügiger Verletzungen der Lorentz-Gleichungen, die durch theoretische Überlegungen bezüglich einer generellen, vereinheitlichten Theorie aller in der Natur auftretenden Gesetze veranlasst worden sind. Außerdem wird weiterhin nach einer Möglichkeit gesucht, einen Zustand absoluter Ruhe zu integrieren.

Abschließend sollen noch interessante historische Fragen angesprochen werden. Einstein hat sich früh mit physikalischen Themen beschäftigt. Bereits im Alter von 16 Jahren schrieb er seinem Onkel einen Brief, in dem er mögliche Versuche zum Äthernachweis skizzierte [99]. Im Jahr 1901, also etwa 6 Jahre später, hatte er bereits weitergehende Vorstellungen und schrieb über sich und seine spätere Frau Mileva Marić, die er während des Studiums der Physik und Mathematik an der ETH in Zürich kennengelernt hatte: „Wie glücklich und stolz werde ich sein, wenn wir beide zusammen unsere Arbeit über die Relativitätstheorie siegreich zu Ende geführt haben". Sie war die einzige Frau in dieser damals von Männern dominierten Fachrichtung. Unklar ist aber ihr Anteil an der Entwicklung der Theorie, außerdem wird angezweifelt, ob zu dieser Zeit die Äthertheorie bereits überwunden war [85]. Im Nachwort seiner Arbeit bedankt sich Einstein nur bei seinem Freund und Kollegen M. Besso dafür, dass dieser ihm beim Arbeiten an den behandelten Problemen treu zur Seite stand und er ihm wertvolle Anregungen verdankt; seine Frau erwähnt er nicht [12].

Obwohl es keine eindeutigen Belege dafür gibt, erscheint es aber sehr plausibel, dass Einstein im Jahr 1905, im dem er neben seiner Arbeit im Patentamt seine Dissertation einreichte und weitere 4 Veröffentlichungen schrieb, die weitreichende Unterstützung seiner Frau hatte. Im Jahr 2005 wurde Mileva Marić offiziell als Mitbegründerin der Relativitätstheorie durch die ETH Zürich geehrt [84]. Allerdings gibt es eine große Zahl an Veröffentlichungen zu diesem Thema und auch abweichende Meinungen (z. B. [85]). Im Jahre 2003 wurde von Fernsehstationen in den USA die Dokumentation Einstein's wife übertragen. Während und nach der Sendung wurden die Zuschauer online nach ihrer Meinung gefragt und 75% der Zuschauer waren der Überzeugung, dass seine Frau tatsächlich mit ihm zusammengearbeitet hat. „Geschichte ist aber keine Angelegenheit für demokratische Abstimmungen" [85]. Aufgrund fehlender Quellen muss heute festgestellt werden, dass wir es einfach nicht genau wissen.

Dies gilt ebenfalls für Informationen über ihr erstes Kind. Mileva Marić brachte vor ihrer Hochzeit (diese fand im Jahr 1903 statt) im Jahre 1902 ein Mädchen zur Welt. Hierzu war sie allein zu ihren Eltern nach Novi Sad (heute Serbien, damals österreichische Monarchie) zurückgekehrt; es ist nicht klar, ob das Kind dort verstarb oder ob es zu Adoption freigegeben wurde. Trotz der Tatsache, dass Einstein als bekanntester Wissenschaftler seiner Zeit eine öffentliche Person war, liegen Geheimnisse auf dieser frühen Periode, die sich wahrscheinlich nie aufklären lassen.

1.7 Aktuelle Diskussionsthemen

Bereits zu Beginn der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts wurde deutlich, dass die zu dieser Zeit entdeckte Hintergrundstrahlung des Urknalls in allen Raumrichtungen völlig gleichmäßig verläuft. Hierdurch hat sich die Möglichkeit ergeben, eine Geschwindigkeit relativ dazu zu messen. Neueste Messungen mit extremer Genauigkeit haben ergeben, dass unsere Sonne sich mit $369{,}1 \pm 0{,}9$ km/s relativ hierzu bewegt [23]. Es sei hier angemerkt, dass die Eigenbewegung der Sonne um das Zentrum der Milchstraße ca. 220 km/s beträgt, und zwar fast entgegengesetzt dazu. Dies bedeutet, dass die Milchstraße eine Eigenbewegung von fast 600 km/s gegenüber dieser Hintergrundstrahlung aufweist [19].

Insbesondere aufgrund dieser Beobachtungen hat es Überlegungen gegeben, die spezielle Relativitätstheorie mit einem übergeordneten Ruhezustand in Einklang zu bringen (z. B. „Relativität ohne Relativität" [24]). Diese haben jedoch bisher nicht zu widerspruchsfreien Ergebnissen geführt. Details hierzu sind in Kap. 12.1 zusammengestellt.

Außerdem ist in letzter Zeit ein Problem durch die Messungen von Geschwindigkeiten größer als die des Lichts entstanden. Die bereits seit einigen Jahren von verschiedenen Forschungsgruppen durchgeführten Versuche zeigen, dass bei Tunnelexperimenten solche

Geschwindigkeiten gemessen werden können. Bei der Interpretation dieser Ergebnisse rtgeben sich jedoch große Unterschiede. Während einige Forscher der Überzeugung sind, dass trotz der Überlichtgeschwindigkeit keine Information mit dieser Geschwindigkeit übertragen werden kann, wird von anderen dies doch erwartet. Sollte letzteres der Falls sein, ist dies grundsätzlich nicht mit der Speziellen Relativitätstheorie kompatibel. Die Effekte werden im Detail erörtert.

Weitere theoretische Überlegungen führen zu einem großen Problem, das ein faszinierender Teil der heutigen Diskussionen innerhalb der Physik ist: Es besteht nämlich bereits seit längerem ein Konsens, dass die beiden fundamentalen physikalischen Theorien unserer Zeit, die (allgemeine) Relativitätstheorie und die Quantenmechanik sich widersprechen [20,25]. Insgesamt lässt sich feststellen, dass nach mehr als 110 Jahren seit der Präsentation der speziellen Relativitätstheorie noch viele Fragen offenbleiben. In dieser Ausarbeitung sollen daher einige Vorschläge zur Modifikation formuliert werden.

1.8 Inhalt dieser Zusammenstellung

Die Spezielle Relativitätstheorie stellt heute einen grundlegenden Standard innerhalb der Physik dar. Hierzu gibt es eine nahezu unüberschaubare Anzahl von Büchern, Literaturstellen und Vorlesungsskripten. Die hier vorliegende Ausarbeitung versteht sich als Ergänzung zu anderen Büchern zu diesem Thema, insbesondere dem hervorragenden Werk von Max Born (1882 -1970), einem Wegbegleiter und Freund Einsteins [26]. Das Buch erschien erstmals im Jahr 1920 und wird - versehen mit einigen notwendigen Ergänzungen - noch heute nachgedruckt. Neben dem theoretischen Teil, der zu Schulungszwecken bewusst einfach gehalten ist, sind hier auch die im 19. Jahrhundert erfolgten Entwicklungen der Physik sehr genau wiedergegeben. Dies gilt auch für das wichtige Thema Elektromagnetismus, das hier nur kurz gestreift wird.

Üblicherweise folgen Ausarbeitungen zur Speziellen Relativitätstheorie dem Schema, dass zunächst die Ergebnisse der klassischen Versuche dargestellt werden und darauf aufbauend die Theorie formuliert wird. Im vorliegenden Fall soll jedoch die Theorie als axiomatischer Rahmen gewählt und dann die sich daraus ergebenden Konsequenzen diskutiert werden. Wie sich zeigen wird, werden durch diese systematische Vorgehensweise auch zusätzliche Effekte erfasst, die sonst nicht im Fokus stehen aber für die Theorie eine große Bedeutung haben. Die sich ergebenden Berechnungen erfordern teilweise auch die Nutzung von numerischen Verfahren. Deren Ausführung ist jeweils in einer Anlage (A bis D) detailliert beschrieben.

Der zentrale Ansatz der dargestellten Untersuchungen ist dabei folgender: Es werden zunächst alle untersuchten Phänomene aus dem Blickwinkel eines ruhenden Beobachters dargestellt. Aufbauend hierauf wird untersucht, wie sich der gleiche Sachverhalt für einen bewegten Beobachter ergibt; hierzu wird ausschließlich der Formalismus der Lorentz-Transformation und der relativistischen Massenzunahme genutzt. Es wird sich zeigen, dass sich für eine Vielzahl von untersuchten Zusammenhängen die gleichen Ergebnisse für beide Beobachter einstellen.

Im Detail wird zunächst eine genaue Darstellung der Zusammenhänge innerhalb der Speziellen Relativitätstheorie wiedergegeben. Diese beginnt mit Untersuchungen zum

Signalaustausch zwischen zwei relativ zueinander bewegten Beobachtern. Danach wird die Lorentz-Transformation aus den Grundlagen der speziellen Relativitätstheorie (Konstanz der Lichtgeschwindigkeit und Gleichwertigkeit von allen Inertialsystemen) abgeleitet.

Es wird außerdem der wichtige Teilbereich der Synchronisation von Ereignissen genauer betrachtet. Dies erfolgt zunächst auf Basis einer Synchronisierung mittels Signalaustausch, später auch durch Austausch von Uhren. In der Folge sind die Relationen zwischen mehreren bewegten Beobachten Gegenstand von Überlegungen. Außerdem werden auch die Verhältnisse beim Signalaustausch in bewegten transparenten Medien untersucht. Bei allen Beispielen ist festzustellen, dass die Gültigkeit der von Lorentz entwickelten Gleichungen gewährleistet ist.

Die in Kapitel 5 ausführlich dargestellte Synchronisation mit langsamem Uhrentransport enthält einige neue Ansätze zum eindeutigen Nachweis eines Nullresultats.

In Kap. 6 und 7 werden Betrachtungen zu den relativistischen Einflüssen auf Masse, Impuls, Kraft und Energie vorgenommen. Es werden ebenfalls Untersuchungen durchgeführt, deren Gegenstand die Verhältnisse während und nach Beschleunigungen sind. Dazu werden die Verhältnisse beim elastischen und plastischen relativistischen Stoß untersucht, und daraus abgeleitet wird die Beziehung für eine relativistische Raketengleichung aufgestellt. Es zeigt sich auch hierbei in allen Fällen, dass sich für einen als ruhend oder als bewegt angenommenen Beobachter keine Unterschiede bei den Betrachtungen ergeben.

Weiterführend weisen Untersuchungen zu den Verhältnissen beim Austausch von Signalen mit konstanter Frequenz neue Aspekte zur Interpretation von klassischen Versuchen auf. Es wird sich zeigen, dass beim Übergang zwischen zueinander bewegten Systemen nicht die Lichtgeschwindigkeit, sondern die Phasengeschwindigkeit des Lichts die relevante Größe ist. Hieraus ergibt sich, dass klassische Versuche wie das Michelson-Morley-Experiment und auch das Kennedy-Thorndike-Experiment, obgleich deren prinzipielle Aussagen erhalten bleiben, neu bewertet werden müssen.

Des Weiteren wird der Fall diskutiert, wenn Überlichtgeschwindigkeiten auftreten, die im Zusammenhang mit Tunnelexperimenten beobachtet werden. Wenn es in diesem Fall möglich ist Informationen zu übertragen, werden hierbei zwischen Identitäts- und Äquivalenzprinzip Widersprüche auftreten.

Es wird ein Vorschlag entwickelt, wie sich diese aufheben lassen. Dabei wird, abweichend zu der von Einstein gewählten Vorgehensweise, nicht ein Top-down Ansatz mit vorgegebenen Prinzipien gewählt. Stattdessen werden als Basis die Lorentz-Gleichungen verwendet und darüber hinaus der von Einstein aus dem Relativitätsprinzip abgeleitete relativistische Massenanstieg bei steigenden Relativgeschwindigkeiten. Deren Kombination in eine „Erweiterte Lorentz Theorie“ erlaubt es, alle in der Natur auftretenden Phänomene in gleicher Weise wie die Spezielle Relativitätstheorie zu beschreiben. Hierbei wird vorausgesetzt, dass eine Informationsübertragung mit Lichtgeschwindigkeit erfolgt. Sollte dies jemals mit Überlichtgeschwindigkeit möglich sein, so lässt sich die SRT nicht mehr aufrechterhalten, für die Erweiterte Lorentz-Theorie würde sich dann die Gelegenheit ergeben, die Lage eines Systems absoluter Ruhe zu bestimmen.

Zum Abschluss werden auf Basis dieser Überlegungen Klärungsversuche vorgeschlagen. Mit deren Hilfe können dann eindeutige Aussagen zur Gültigkeit der vorgeschlagenen Theorie erfolgen.

2. Betrachtungen für zwei bewegte Beobachter

Wie bereits in der Einleitung ausgeführt wurde, wird im Folgenden die Spezielle Relativitätstheorie als grundlegendes Prinzip zur Betrachtung von physikalischen Gegebenheiten gewählt. Darauf basierend werden in diesem Kapitel verschiedene Konstellationen beim Signalaustausch zwischen zwei Beobachtern untersucht, die zunächst als punktförmig angenommen werden, anschließend werden dann räumlich ausgedehnte Objekte betrachtet. Im Anschluss wird eine Untersuchung der Winkelbeziehungen beim Austausch von Signalimpulsen durchgeführt.

Die sich dabei ergebenden Konsequenzen werden diskutiert und mit Auswertungen aus der Literatur verglichen. Es zeigt sich dabei, dass die Ergebnisse widerspruchsfrei sind. Zusätzlich ergeben sich ergänzende Erkenntnisse bei den Winkelberechnungen. Diese basieren hier auf geometrischen Betrachtungen und führen zunächst zu dem erwarteten Ergebnis, dass die Längenkontraktion berücksichtigt werden muss. Es zeigt sich hierbei aber außerdem, dass diese symmetrisch in Bewegungsrichtung und entgegengesetzt dazu aufgeteilt sein muss. Dieses Ergebnis wird wichtig bei der Diskussion von alternativen Theorien, wie sie im Kapitel 11.1 beschrieben werden.

Es wird in jedem Fall zunächst von „ruhenden“ und „bewegten“ Objekten ausgegangen. Bei den Berechnungen zeigt sich dann, dass dieser Ansatz durch den Begriff „relativ zueinander gleichförmig bewegt“ ersetzt werden kann. Diese Vorgehensweise wird nicht oft angewendet, ist aber auch noch in neuerer Literatur zu finden [21].

2.1 Austausch von Signalen zwischen punktförmigen Körpern

Obwohl die hier dargestellten Betrachtungen und die ersten daraus folgenden Ableitungen zunächst trivial erscheinen, werden schon bei diesen elementaren Ansätzen die Grenzen der klassischen Mechanik erkennbar. Um Widersprüche zu vermeiden, müssen bereits bei den einfachen Gegebenheiten, wie sie beim Austausch von Signalen zwischen als punktförmig angenommenen bewegten Körpern vorliegen, die Regeln der Lorentz-Transformation angewendet werden.

Im Folgenden wird dies an verschiedenen einfachen Beispielen demonstriert, bevor dann komplexere Betrachtungen vorgenommen werden.

2.1.1 Bewegung aufeinander zu oder voneinander weg

Wenn sich zwei Beobachter A und B gleichförmig voneinander wegbewegen, so lässt sich der Empfang von jeweils periodisch ausgesendeten Lichtsignalen bestimmen. Gemäß der klassischen Theorie nach Newton würde gelten, dass der sich bewegende Beobachter die Signale in größerem zeitlichem Abstand empfängt als der ruhende (vgl. Abb. 2.1).

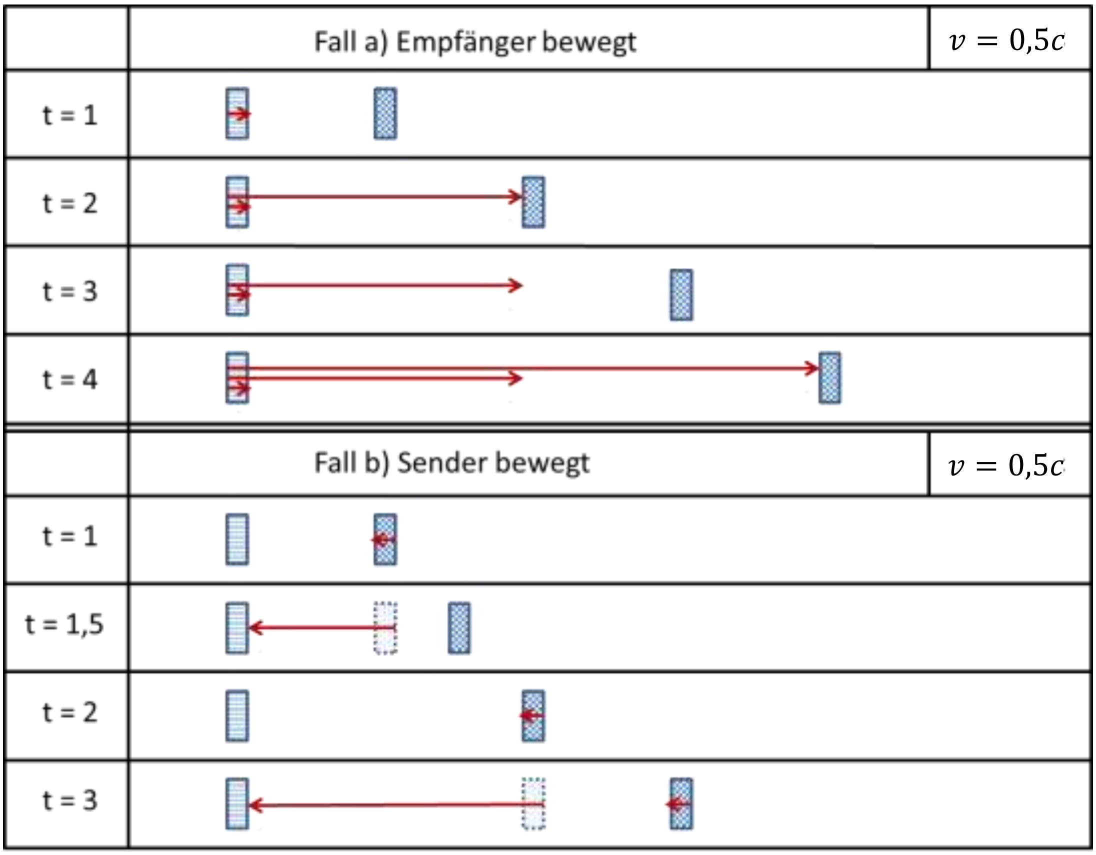


Abb. 2.1: Unterschiede in der zeitlichen Abfolge empfangener Signale für einen ruhenden und einen bewegten Beobachter gemäß klassischer Theorie.
Beobachter passieren bei $t = 0$,
Signalintervall mit $\varDelta t = 1\,ZE$ (Zeiteinheit),
Beispiel für $v = 0{,}5c$

Bei dem gewählten Beispiel mit $v = 0{,}5\,c$ würde der bewegte Beobachter alle 2 Zeiteinheiten (ZE) ein Signal empfangen, während sich beim ruhenden Beobachter ein Abstand von 1,5 ZE einstellt. Beide Beobachter könnten demnach anhand des Signaleingangs bestimmen mit welcher Geschwindigkeit sie sich bewegen. Dies steht jedoch im Widerspruch zu der experimentellen Beobachtung, dass die Messergebnisse eines solchen Versuchs unabhängig vom Bewegungszustand stets gleich sind.

In der Abb. 2.2 sind zusammenfassend die möglichen Varianten zwischen ruhenden und bewegten Beobachtern zusammengestellt. Darüber hinaus sind in Tab 2.1 auch die grundlegenden Beziehungen zwischen diesen wiedergegeben. Es handelt sich hierbei um einen Signalaustausch in Bewegungsrichtung bzw. entgegengesetzt dazu; das Verhalten in anderen Raumrichtungen wird später behandelt.

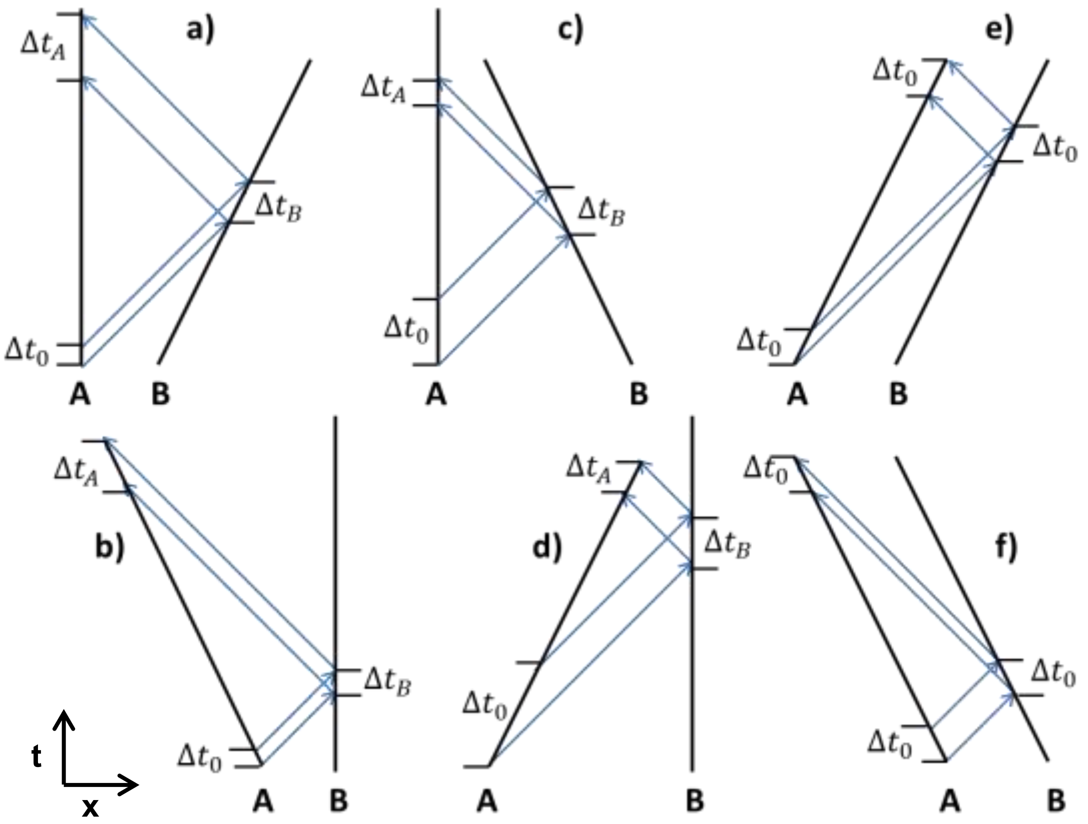


Abb. 2.2 Raum-Zeit-Schaubilder für Möglichkeiten beim Signalaustausch in Bewegungsrichtung

a)	$\Delta t_B = \Delta t_0 \frac{1}{1-\frac{v}{c}}$	c)	$\Delta t_B = \Delta t_0 \frac{1}{1+\frac{v}{c}}$	e)	$\Delta t_B = \Delta t_0$
	$\Delta t_A = \Delta t_0 \frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}$		$\Delta t_A = \Delta t_0 \frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}$		$\Delta t_A = \Delta t_0$
b)	$\Delta t_B = \Delta t_0 \left(1+\frac{v}{c}\right)$	d)	$\Delta t_B = \Delta t_0 \left(1-\frac{v}{c}\right)$	f)	$\Delta t_B = \Delta t_0$
	$\Delta t_A = \Delta t_0 \frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}$		$\Delta t_A = \Delta t_0 \frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}$		$\Delta t_A = \Delta t_0$

Tab. 2.1 Signalabstände für den Signalaustausch in Abb. 2.2

Im Folgenden sollen die Gegebenheiten für einen Signalaustausch von A nach B und umgekehrt von B nach A gemäß Abb. 2.1 in einem einfachen Raum-Zeit-Diagramm dargestellt werden (Abb. 2.3). Hierzu werden die Varianten a) und b) aus Abb. 2.2 kombiniert.

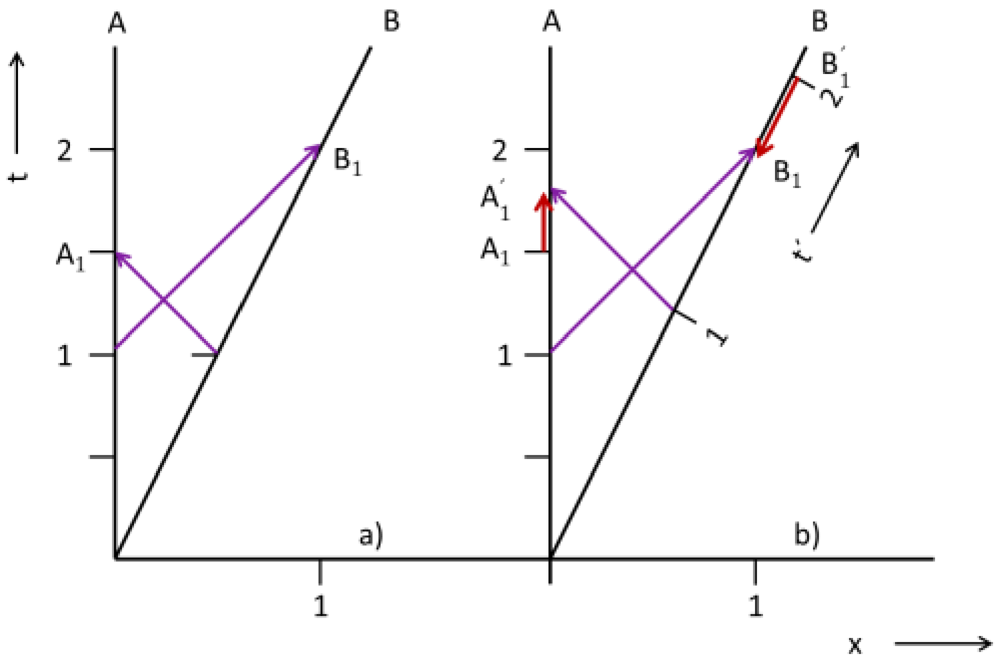


Abb. 2.3: Raum-Zeit-Diagramm für Signalaustausch zwischen Beobachter A (ruhend) und B (sich entfernend), Beispiel für $v = 0{,}5c$
a) konventionell (nach Newton)
b) relativistisch (nach Lorentz)

Hierbei ist im Teil a) die konventionell (nach Newton) zu erwartende Situation dargestellt. Die Signale werden zum Zeitpunkt $t = 1$ von beiden Beobachtern ausgesandt und treffen bei A_1 bzw. B_1 beim Versuchspartner ein. Dieses Diagramm ist z. B. beim Austausch von Schallimpulsen gültig, wenn A sich gegenüber dem Medium (z. B. Luft oder Wasser) in Ruhe befindet. Wie bereits ausgeführt, wird dies aber bei Versuchen mit Licht nicht festgestellt.

Von H. A. Lorentz wurde bereits im vorletzten Jahrhundert eine Lösung für dieses (innerhalb der klassischen von Newton entwickelten Mechanik) existierende Problem präsentiert. Hierzu wird vorausgesetzt, dass bei höheren Geschwindigkeiten der Effekt einer Zeitdilatation (d. h. Verlangsamung der Zeit) auftritt. Dies ist in Teildiagramm b) dargestellt. Für den Beobachter B vergeht die Zeit langsamer, also sendet er sein Signal aus Sicht von A etwas später aus; dieses trifft dann bei A_1' ein. Gleichzeitig nimmt B durch die für ihn wirksame Verlangsamung der Zeit den von A ausgesendeten Impuls subjektiv früher war. Dieser Effekt ist im Diagramm durch den Übergang von B_1 nach B_1' gekennzeichnet.

Der genaue Faktor der zugrundeliegenden Zeitverzögerung lässt sich leicht berechnen gemäß Abb. 2.2, Fälle a) und b). Für den Übergang von einem ruhenden auf einen bewegten Beobachter gilt die Beziehung für ein Zeitinterval Δt_0

$$\Delta t_{AB} = \Delta t_0 \frac{1}{1 - \frac{v}{c}} \tag{2.01}$$

In umgekehrter Richtung ist dies

$$\Delta t_{BA} = \Delta t_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right) \tag{2.02}$$

Um Δt_{AB} und Δt_{BA} gleichzusetzen müssen die Gleichungen (2.01) und (2.02) jeweils um einen Faktor γ korrigiert werden (Δt_{AB} verkürzt und Δt_{BA} verlängert) und es ergibt sich

$$\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{1}{1 - \frac{v}{c}} = \left(1 + \frac{v}{c}\right) \cdot \gamma \qquad (2.03)$$

mit

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (2.04)$$

Die hier bestimmte Größe γ entspricht demnach dem Lorentz-Faktor aus Gl. (1.03).

Es ist also für Beobachter A und B aufgrund dieser Messungen nicht zu unterscheiden, ob sie sich bewegen oder in Ruhe befinden. Dies bedeutet, dass auch B aufgrund der Signaleingänge die Feststellung trifft, dass bei A die Zeit langsamer abläuft.

Das hier dargelegte Beispiel für sich entfernende Versuchsteilnehmer lässt sich leicht auch für sich annähernde Beobachter darstellen (vgl. Abb. 2.4, größerer Maßstab als Abb. 2.3).

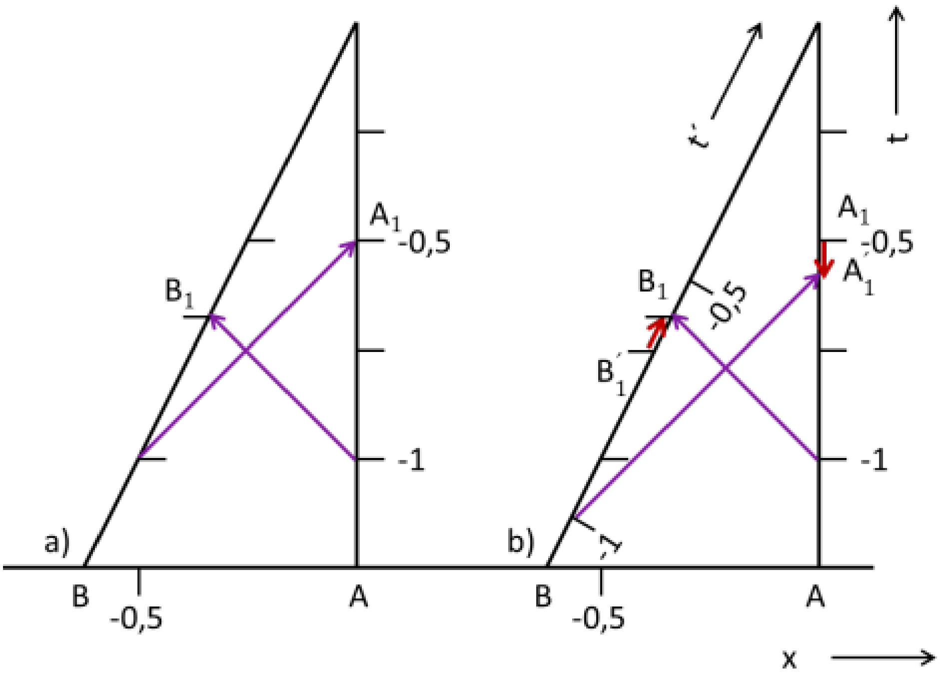


Abb. 2.4: Raum-Zeit-Diagramm für Signalaustausch zwischen Beobachter A (ruhend) und B (sich nähernd), Beispiel für $v = 0{,}5c$
a) konventionell (nach Newton)
b) relativistisch (nach Lorentz)

Für den Übergang von einem ruhenden auf einen bewegten Beobachter gilt hier die Beziehung für die Zeit Δt_0 gemäß Fall c) und d) aus Abb. 2.2

$$\Delta t_{AB} = \Delta t_0 \frac{1}{1 + \frac{v}{c}} \qquad (2.05)$$

In umgekehrter Richtung ist dies

$$\Delta t_{BA} = \Delta t_0 \,(1 - \frac{v}{c}) \tag{2.06}$$

Die Gleichungen (2.05) und (2.06) müssen wiederum jeweils um den Faktor γ korri-giert werden (Δt_{AB} verkürzt und Δt_{BA} verlängert) und es ergibt hier

$$\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{1}{1 + \frac{v}{c}} = \; (1 - \frac{v}{c}) \cdot \gamma \tag{2.07}$$

mit dem gleichen Endergebnis für γ wie in Gl. (2.04).

Es sei an dieser Stelle noch einmal festgehalten, dass die Zeitdilatation des bewegten Beobachters unerlässlich ist, damit es nicht zu Widersprüchen kommt. Ohne diesen Effekt wäre es stets möglich, einen bewegten von einem ruhenden Beobachter zu unterscheiden.

2.1.2 Bewegung in beliebigen Raumrichtungen

Es wurde bisher dargestellt, dass zwei gleichmäßig aufeinander zu oder voneinander weg bewegte Beobachter anhand von ausgetauschten Signalen nicht unterscheiden können, ob sie sich in Ruhe befinden oder sich bewegen. Wenn sich die Beobachter aber nicht direkt aufeinander zubewegen, sondern in einem definierten Abstand a passieren ändert sich die Situation und es ist ein größerer Aufwand erforderlich um nachzuweisen, dass die Beobachtungen der Versuchsteilnehmer äquivalent sind.

Es wird folgender Versuchsablauf gewählt:

1. Beide Versuchsteilnehmer senden im (subjektiven) Abstand von Δt Signale aus.
2. Bei den eingehenden Signalen wird der Winkel zur Bewegungsrichtung des jeweils anderen Versuchsteilnehmers gemessen.
3. Ist das eingehende Signal genau quer zur Bewegungsrichtung des Senders so wird ein besonders gekennzeichnetes Rücksignal ausgesendet.
4. Die Signale sind fortlaufend kodiert, so dass zum Abschluss des Versuchs und nach Austausch der Daten eine Auswertung darüber erfolgen kann, wann das Signal ausgesendet wurde, das beim anderen Teilnehmer als quer eintreffend gemessen wurde.

Betrachtet man zunächst den ruhenden Beobachter A und einen im Abstand a mit der Geschwindigkeit v passierenden Versuchsteilnehmer B, so wird A bei der geringsten Entfernung die von B (subjektiv) im Abstand von Δt ausgesendeten Signale im Abstand von $\gamma\Delta t$ wahrnehmen. B hat jedoch einen anderen Blickwinkel. Verursacht durch den Aberrationseffekt wird er aus Sicht A das Signal erst unter einem Winkel von

$$\delta = arcsin\left(\frac{v}{c}\right) = arctan\left(\gamma \cdot \frac{v}{c}\right) \tag{2 .10}$$

als quer eintreffend wahrnehmen (vgl. Abb. 2.5). Beim Beispiel von $v = 0{,}5c$·ist $\delta = 30°$. Für Winkel abweichend von der (subjektiven) Querrichtung von B sind besondere geometrische Betrachtungen erforderlich, die in Kap. 2.3 dargestellt sind.

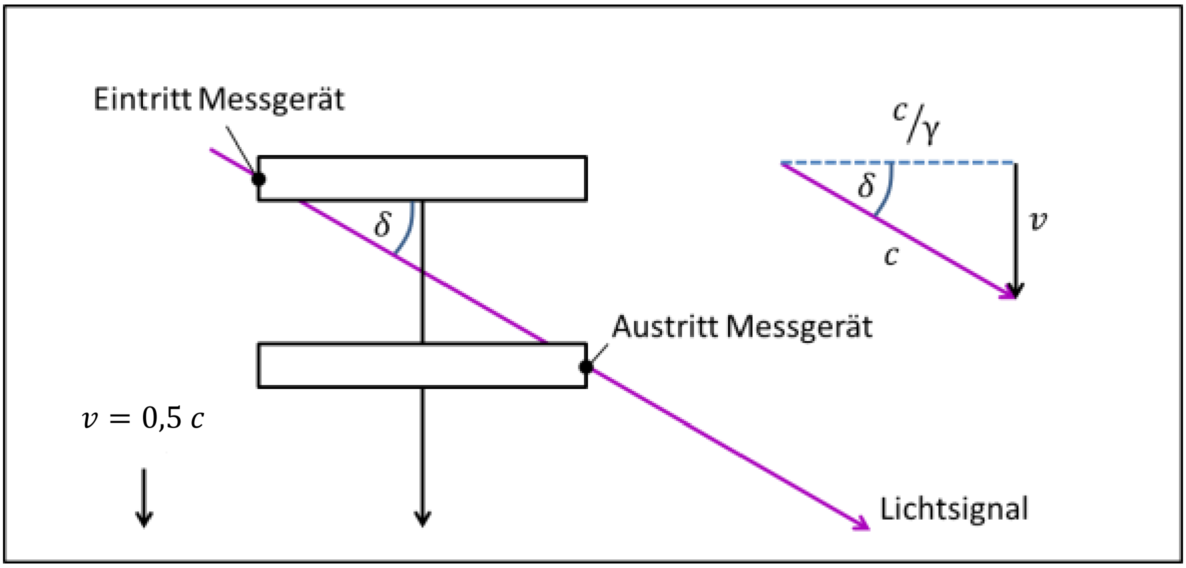


Abb. 2.5: Aberrationseffekt: Durch die Bewegung des Empfängers gegenüber einer ruhenden Signalquelle lässt sich der Winkel δ messen.

Im Folgenden soll gemäß der Darstellung in Abb. 2.6 untersucht werden, welche Werte sich für Δt (Signalabstand) und andere relevante Zeitmessungen für den bewegten und den ruhenden Beobachter ergeben.

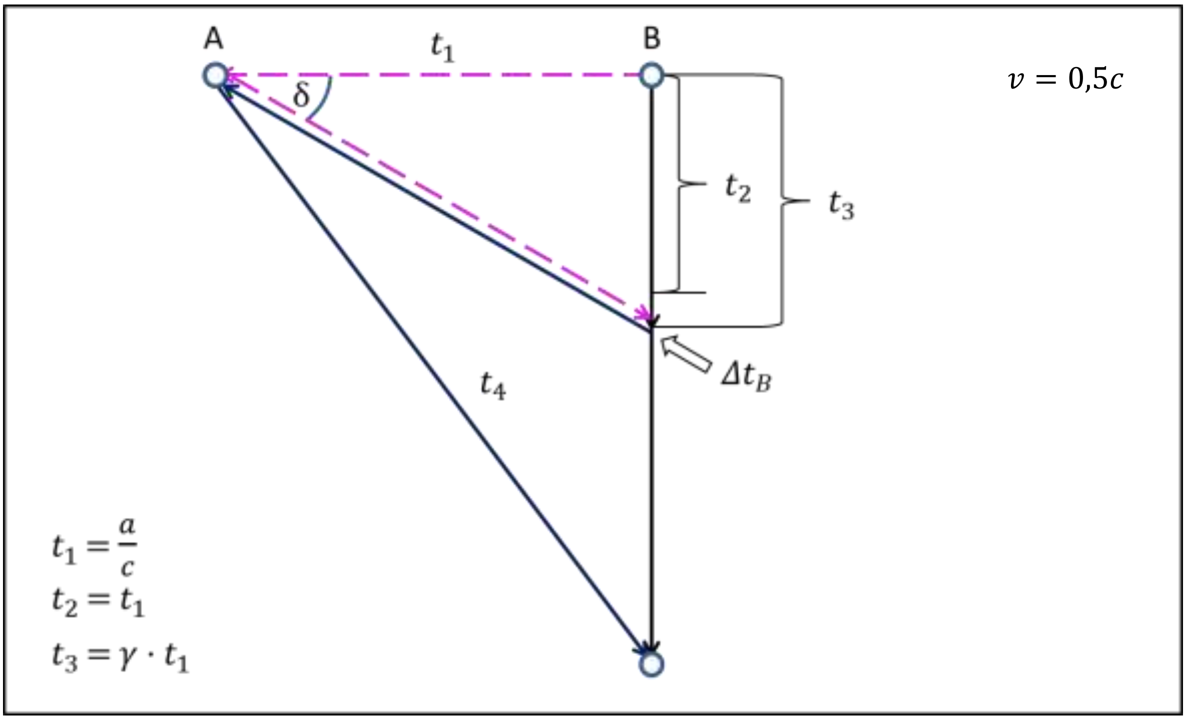


Abb. 2.6: Signalaustausch zwischen A und B am Beispiel $v = 0{,}5c$ und $\delta = 30°$; Detail Signalabstand Δt_B: vgl. Abb. 2.7; Gesamtlaufzeiten: vgl. Abb. 2.8

a) Messung des Signalabstands

Wie bereits erwähnt beträgt der vom ruhenden Beobachter gemessene Zeitabstand zwischen zwei von B in Querrichtung ausgesendeten Signalen (Zeit t_1) aufgrund der bei B wirksamen Zeitdilatation $\gamma\Delta t$.

Der von B gemessene Wert Δt_B kann mittels einer Näherungsrechnung gemäß dem Schema in Abb. 2.7 ermittelt werden. Zu Beginn wird von A ein Signal ausgesandt und am Punkt B_0 empfangen, das nächste Signal folgt dann im Abstand Δt_0. Trifft dieses bei B_0 ein, so hat sich der Beobachter aber bereits zum Punkt B_1 fortbewegt und die zusätzliche Zeit für den verlängerten Weg muss hinzuaddiert werden. Wird dabei vorausgesetzt, dass $\Delta t_0 \ll t_1$ ist, kann für die Berechnung angenommen werden, dass die von A ausgesandten Signale parallel in Richtung B_1 verschoben werden können ohne δ zu verändern. Trifft das Signal bei B_1 ein hat bereits eine erneute Fortbewegung zu B_2 stattgefunden und die Berechnungen sind entsprechend zu wiederholen.

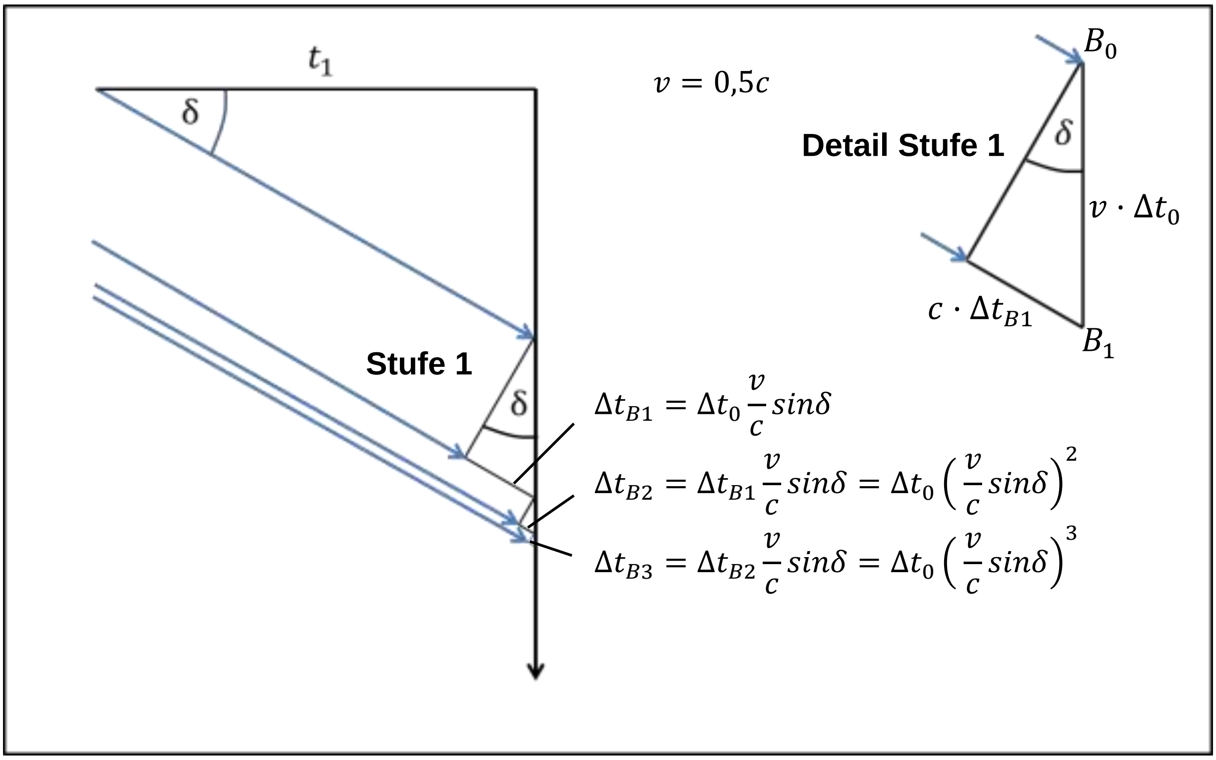


Abb. 2.7: Schema zur Berechnung des Signalabstands Δt_B (für $\Delta t_0 \ll t_1$). Darstellung der ersten 3 Stufen.

Die einzelnen Werte können zu

$$\Delta t_B = \Delta t_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \Delta t_{i-1} \frac{v}{c} sin\delta = \Delta t_0 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{v}{c} sin\delta\right)^i \tag{2.11}$$

aufsummiert werden. Bei der Summe handelt sich um eine geometrische Reihe

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} q^i \tag{2.12}$$

mit S_n als Grenzwert und

$$q = \frac{v}{c} sin\delta \tag{2.13}$$

Für $n \to \infty$ folgt mit $q < 1$

$$S_\infty = \frac{1}{1-q} \tag{2.14}$$

Da B den Signaleingang subjektiv in Querrichtung feststellt gilt hier Gl. (2.10)

$$sin\delta = \frac{v}{c} \tag{2.15}$$

Somit folgt

$$S_\infty = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \gamma^2 \tag{2.16}$$

Eingesetzt in die Gleichung (2.11) ergibt dies

$$\Delta t_B = \gamma^2 \cdot \Delta t_0 \tag{2.17}$$

Dies bedeutet, dass der bewegte Versuchsteilnehmer B subjektiv beim Empfang aus Querrichtung einen Wert von $\gamma\Delta t$ wahrnimmt, da er ja selbst der Zeitdilatation unterliegt. Damit ist gezeigt, dass die von A und B gemessenen Werte gleich sind.

b) Messung der Gesamtlaufzeit der Signale

Die Laufzeit des von A ausgesendeten und von B als quer zur Bewegungsrichtung gemessenen Signals beträgt γt_1 (vgl. Abb. 2.6).

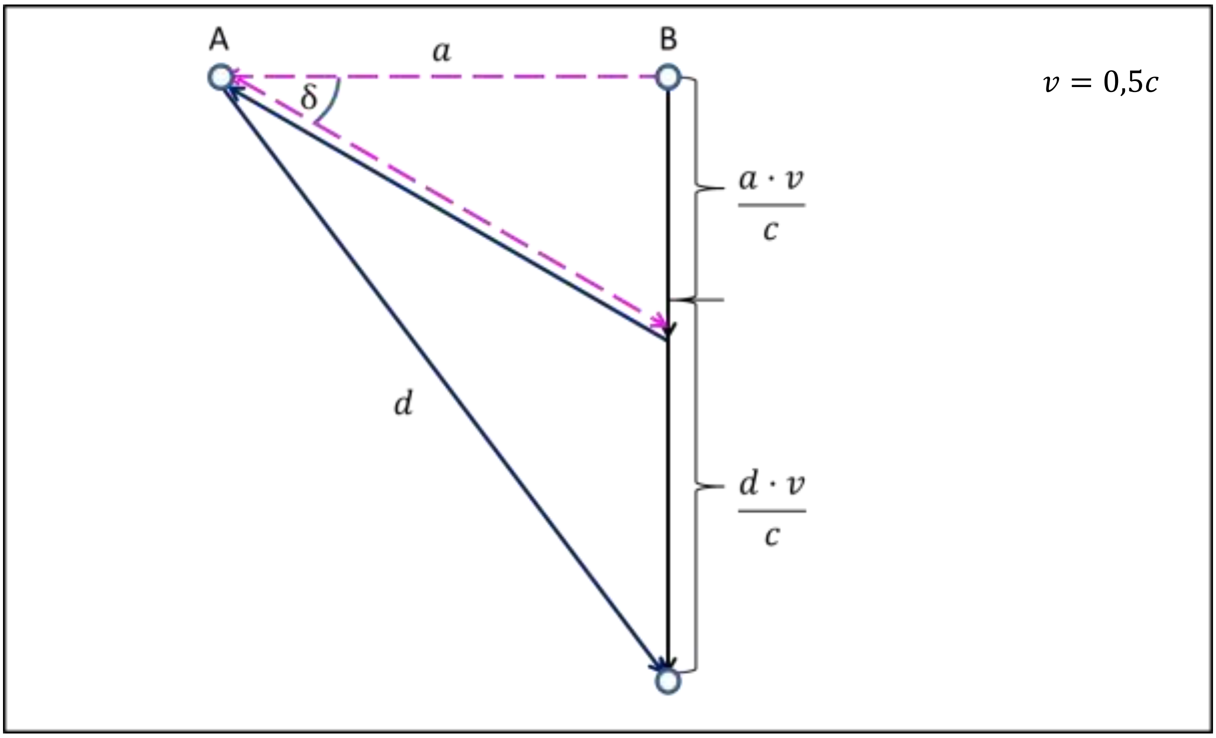


Abb. 2.8: Bezeichnung der Wegstrecken für das Signal B → A → B.

Da von B das Signal auf gleichem Weg zurückgeschickt wird ist die Gesamtzeit $2\gamma t_1$. Für B ergibt sich für den Weg a der Wert t_1, der Rückweg mit t_4 für d muss berechnet werden. Hierzu sind gemäß Abb.2.8 einige wesentliche Bezeichnungen festzulegen. Die Wegstrecke d (entsprechend der Zeit t_4) ergibt sich demnach aus

$$a^2 + \left(\frac{v}{c}a + \frac{v}{c}d\right)^2 = d^2 \tag{2.18}$$

nach quadratischer Ergänzung zu

$$a = d\left(-\frac{v^2}{c^2\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)} \pm \sqrt{\left(\frac{v^2}{c^2\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)}\right)^2 + \frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{1+\frac{v^2}{c^2}}}\right) \tag{2.19}$$

Werden nur positive Werte berücksichtigt, so folgt nach Vereinfachung

$$a = d\left(-\frac{v^2}{c^2\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)} + \sqrt{\frac{v^4}{c^4} + \left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\right) \tag{2.20}$$

$$= d\left(-\frac{v^2}{c^2\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)} + 1\right) = d\left(\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{1+\frac{v^2}{c^2}}\right) \tag{2.21}$$

und

$$d = a\left(\frac{1+\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}\right) \tag{2.22}$$

Zur Ermittlung des Gesamtwegs wird noch einmal a hinzuaddiert

$$d + a = a\left(\frac{1+\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}} + 1\right) = a\left(\frac{1+\frac{v^2}{c^2}+1-\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}\right) = 2a\gamma^2 \tag{2.23}$$

Es ergibt sich demnach eine Gesamtzeit von $2\gamma^2 t_1$ und damit ein Faktor von γ zwischen den Beobachtern A und B, der die Zeitdilatation für Beobachter B kompensiert. Die subjektiv gemessenen Werte sind also auch hier identisch.

2.2 Austausch von Signalimpulsen innerhalb von bewegten Körpern

Die bisher dargestellten Betrachtungen verdeutlichen die wesentlichen Beziehungen beim Signalaustausch zwischen Objekten mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten. Damit sind die Gegebenheiten jedoch zunächst nicht widerspruchsfrei zu beschreiben. Würde z. B. ein ruhender Beobachter Messungen der Lichtgeschwindigkeit zwischen zwei bewegten Objekten direkt beobachten, so wären für ihn ohne weitere Modifikationen Unterschiede zu seinen Ergebnissen feststellbar. Dies würde eine Verletzung der Tatsache darstellen, dass Messungen der Lichtgeschwindigkeit in Inertialsystemen stets zu konstanten Werten führen müssen. Dabei ergeben sich Unterschiede für Betrachtungen in Bewegungsrichtung und in anderen Raumrichtungen; diese werden im Folgenden separat behandelt.

Es wird hier ausschließlich der Austausch von Lichtimpulsen betrachtet. Die Untersuchung des Verhaltens von Licht als Welle und die damit verbundenen Besonderheiten erfordern eine gesonderte Betrachtungsweise, die in Kap. 8 dargestellt wird.

2.2.1 Signalaustausch in Bewegungsrichtung

Zur Darstellung dieses Sachverhalts wird die Zeit für den Signalaustausch zwischen den Objekten A und B untersucht. Während im Ruhezustand die Zeit für Hin- und Rückweg zwischen ihnen

$$t_{AB} + t_{BA} = 2t_0 \tag{2.30}$$

ist, gilt bei bewegten Objekten aus Sicht des ruhenden Beobachters (vgl. Gl. 2.01 und 2.05)

$$t_{AB} + t_{BA} = t_0 \frac{1}{1-\frac{v}{c}} + t_0 \frac{1}{1+\frac{v}{c}} \tag{2.31}$$

$$t_{AB} + t_{BA} = t_0 \left[\frac{\left(1+\frac{v}{c}\right)+\left(1-\frac{v}{c}\right)}{\left(1+\frac{v}{c}\right)\left(1-\frac{v}{c}\right)} \right] = 2\gamma^2 t_0 \tag{2.32}$$

Wie bereits dargestellt, läuft die Zeit für die bewegten Beobachter um den Faktor γ langsamer ab. Bei der hier durchgeführten Betrachtung ergibt sich aber eine Verlängerung in der Zeit um γ^2. Um diesen Widerspruch aufzulösen, muss daher zusätzlich eine Verkürzung des Wegs in Bewegungsrichtung um den Faktor γ angenommen werden. Diese Verkürzung wird auch als Raumkontraktion bezeichnet.

Werden die Effekte der Zeitdilatation und Raumkontraktion gemeinsam betrachtet so ergibt sich ein widerspruchsfreies Bild. Bemerkenswert ist hierbei, dass sich einzelnen Zeiten für die Strecken $A \to B$ und $B \to A$ zwar bei der Betrachtung durch den ruhenden Beobachter unterscheiden, dass die Summe der Zeiten aber (bei Berücksichtigung der Zeitdilatation) mit dem Ergebnis eines nicht bewegten Systems identisch ist.

Dies gilt nicht nur für die bereits dargestellten Zusammenhänge für den ruhenden Versuchsteilnehmer. Auch der bewegte Beobachter nimmt aufgrund der für ihn um den Faktor γ langsamer ablaufenden Zeit die Entfernungen im System des ruhenden Beobachters in Bewegungsrichtung als um den gleichen Betrag verkürzt war. Zeitdilatation und Raumkontraktion bedingen sich also gegenseitig, um zu einem widerspruchsfreien Bild zu gelangen.

Die Zusammenhänge sollen an einem einfachen Beispiel gezeigt werden. Dazu wird der Fall betrachtet, dass die Beobachter A und B im Abstand a voneinander entfernt sind. Zum Zeitpunkt 0 sendet A ein Signal aus, das bei B unmittelbar an A reflektiert wird. Wenn A und B sich in Ruhe befinden ist sofort klar, dass Hin- und Rückweg und damit die erforderlichen Zeiten für den Signaltransport gleich sind. Wenn sich aber beide Beobachter bezüglich eines anderen Inertialsystems gleichförmig bewegen, ist die Situation aus dessen Sicht völlig anders. Dieser Verlauf soll in einem Weg-Zeit-Diagramm dargestellt werden. Zur Vereinfachung der grafischen Darstellung werden alle Werte normiert; dies bedeutet, dass $a = 1$ gesetzt wird, außerdem wird die Zeit t als ct dargestellt und ebenso wie der Weg x auf 1 normiert. (Die Nutzung von ct anstatt t erfolgt häufiger; hierdurch erhalten x und ct die gleiche Dimension und aus dem Diagramm können Werte direkt abgelesen werden).

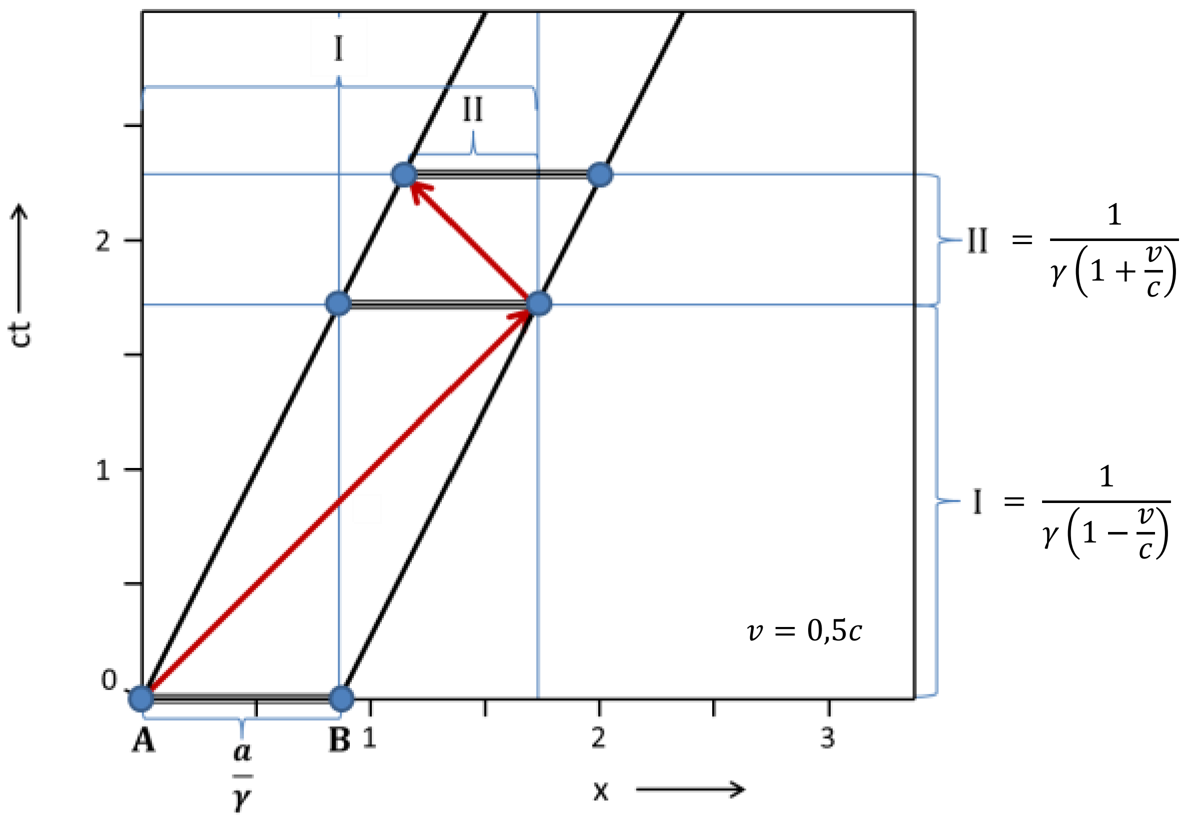


Abb. 2.9: Signalaustausch zwischen Beobachtern A und B (rote Pfeile) in einem bewegten System. Beispiel für $v = 0{,}5c$

Berechnungen analog Gl. (2.32) ergeben:

$$x_T = x_1 - x_2 = \frac{a}{\gamma\left(1-\frac{v}{c}\right)} + \frac{a}{\gamma\left(1+\frac{v}{c}\right)} = \frac{2\gamma v a}{c} \tag{2.33}$$

$$t_T = t_1 + t_2 = \frac{a}{c\gamma\left(1-\frac{v}{c}\right)} + \frac{a}{c\gamma\left(1+\frac{v}{c}\right)} = \frac{2\gamma a}{c} \tag{2.34}$$

Eingesetzt in die Lorentz-Gleichungen Gl. (1.07) und (1.08) folgt $x' = 0$ sowie $t' = 2\,a/c$ und damit das erwartete Ergebnis für ruhende Beobachter. Wie sich die Lorentz-Gleichungen ableiten lassen, ist an dieser Stelle noch nicht zu erkennen; im Kapitel 3.3 werden verschiedene Methoden gezeigt, wie dies möglich ist.

2.2.2 Signalaustausch beim Passieren von zwei Körpern

Wählt man einen komplexeren Ansatz für die Betrachtungen aus, z. B. indem man die Messungen zwischen identischen, aneinander vorbeibewegten Laboren mit jeweiligem Signalaustausch zwischen Anfang und Ende untersucht, so ergeben sich ebenfalls keine Unterschiede. Ein Beispiel ist im Folgenden wiedergegeben. Hierzu wird folgender Versuchsaufbau gewählt:

1. Zwei völlig identische Laboreinrichtungen mit den Beobachtern A, B, C sowie A′, B′, C′ werden aufgebaut. Die Ausrichtung ist in Abb. 2.10 dargestellt. C und C′ befinden sich genau in der Mitte der Labore.

2. Die Vorrichtung mit A′, B′, C′ wird gegenüber A, B, C bewegt.
3. Die bewegte Vorrichtung passiert die unbewegte in minimalem Abstand, um Aberrationseffekte möglichst gering zu halten.
4. Sobald sich die Beobachter der beiden Systeme bei A und A′ begegnen, werden von diesen Signale an C bzw. C′ abgeschickt. C bzw. C′ reflektieren die Signale an den jeweiligen Absender und speichern die entsprechenden Zeiten.

Zunächst treffen A und A′ aufeinander. Bei geringen Geschwindigkeiten (im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit) werden die Begegnungen B′ mit A und A′ mit B gleichzeitig erfolgen, bei relativistischen Geschwindigkeiten ist das nicht mehr der Fall. Hier weist dann das bewegte System eine Verkürzung in Bewegungsrichtung auf und die Kontakte erfolgen nacheinander. Abschließend erfolgt der Kontakt B′ mit B. Es entstehen demnach vier Kontaktsituationen, die in Abb. 2.11 in einem Raum-Zeit-Diagramm dargestellt sind.

Nach Versuchsende werden dann die gemessenen Zeiten aller Teilnehmer verglichen. Für das gewählte Beispiel mit $v = 0{,}5\ c$ ergeben sich für die Eintreffpunkte bei C bzw. C′ die in der nachfolgenden Tabelle dargestellten Werte. Neben den eigentlichen Beobachtungsergebnissen sind auch die berechneten Werte aufgrund der Lorentz-Transformation mit eingetragen. Zum exakten Vergleich werden anschließend die sich ergebenden Situationen für die Orts- und Zeitkoordinaten genauer betrachtet.

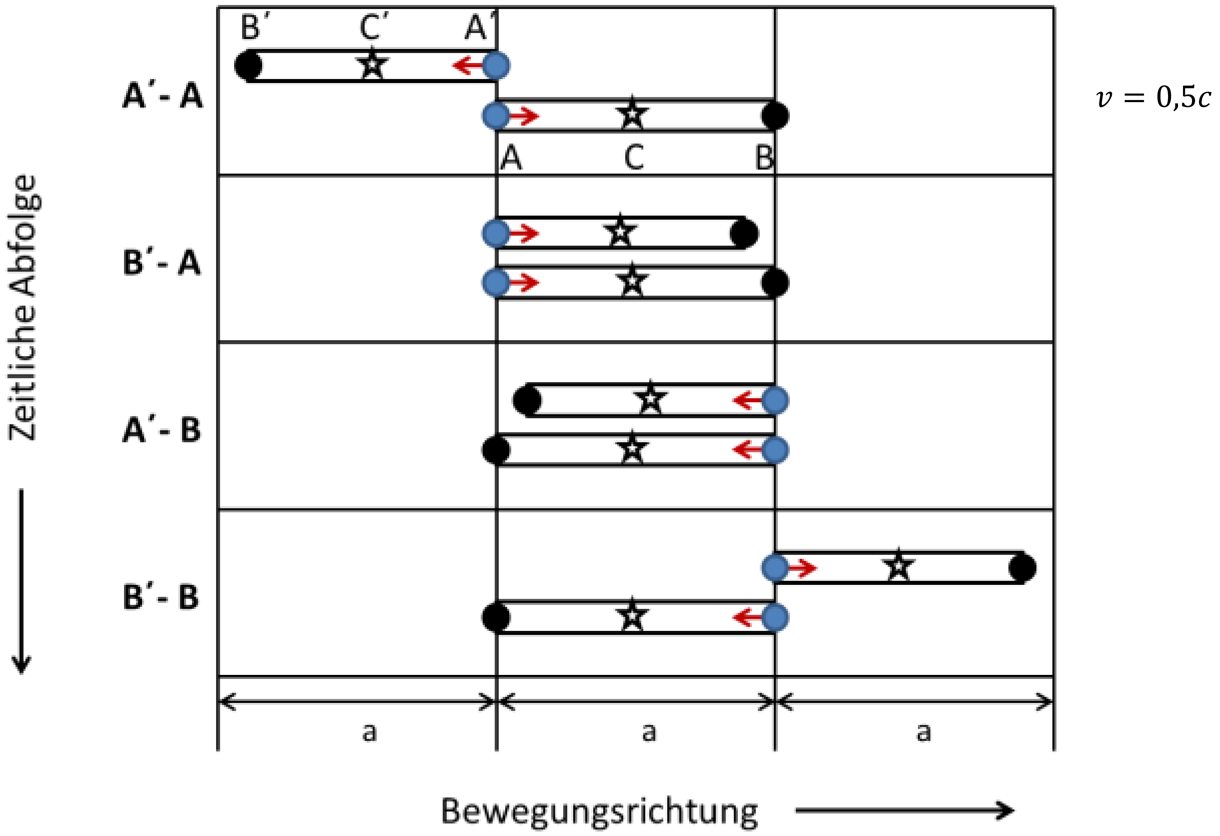


Abb. 2.10: Laboreinrichtung mit Beobachtern A und B zur Aussendung von Signalen und C zum Empfang. Ein identisches Labor mit A′, B′ und C′ bewegt sich mit Geschwindigkeit $v = 0{,}5\ c$ daran vorbei. Bei allen Kontakten von A und B mit A′ und B′ wird ein Signal ausgesandt und von C bzw. C′ empfangen.

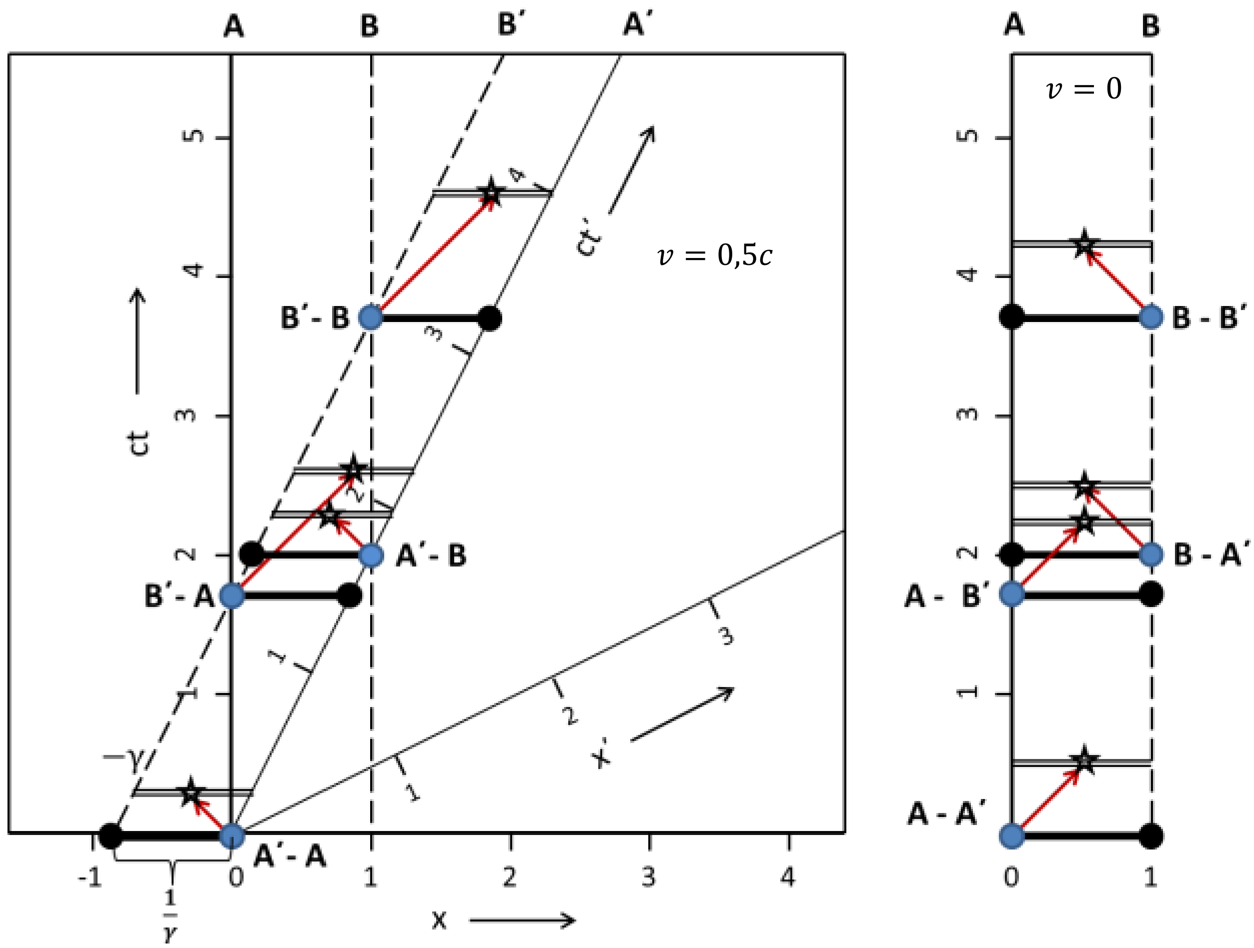


Abb. 2.11: Zeitliche Abfolge der Ankunft von Signalen in Labormitte, die beim Passieren von zwei identischen Laboren ausgelöst werden.
Links: Bewegtes Labor
Rechts: Ruhendes Labor

Fall	Beobachter	A/A'	A/B'	B/A'	B/B'
1	C	[0,5 ; 0,5]	[0,5 ; 2,232]	[0,5 ; 2,5]	[0,5 ; 4,232]
2	C	[-0,289 ; 0,289]	[0,866 ; 2,598]	[0,711 ; 2,289]	[1,866 ; 4,598]
3	C′	[-0,5 ; 0,5]	[-0,5 ; 2,5]	[-0,5 ; 2,232]	[-0,5 ; 4,232]

Tabelle 2.2: Koordinaten für Ort [Klammer links] und Zeit [Klammer rechts] für den Versuch gemäß Abb. 2.11
Zeile 1: Werte für ruhenden Beobachter
Zeile 2: Beobachtungen vom ruhenden Beobachter ins bewegte System
Zeile 3: Berechnete Werte für den bewegten Beobachter gemäß der Lorentz-Transformation

Ortskoordinaten

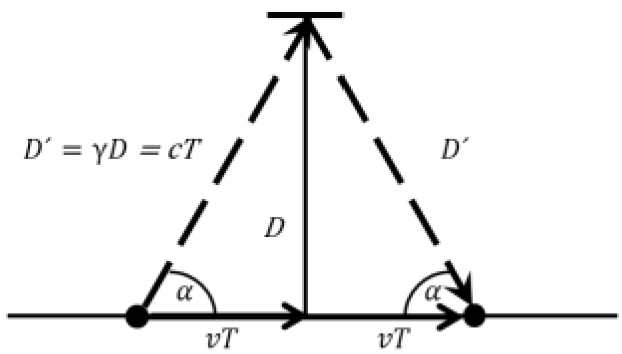
Zunächst ist klar, dass die Ortskoordinaten in der 1. Zeile konstant sein müssen. Unter den gewählten Versuchsbedingungen liegt der Punkt C ortsfest bei 0,5. Für das bewegte System variieren diese entsprechend den geometrischen Beziehungen gemäß Zeile 2. Die aus der Lorentz-Transformation berechneten Ortskoordinaten im bewegten System sind gleich denen des ruhenden Systems, allerdings ist das Vorzeichen wegen der anderen Bewegungsrichtung negativ. Dies bedeutet, dass der unbewegte und bewegte Beobachter subjektiv die gleichen Ortskoordinaten messen.

Zeitkoordinaten

Ähnliches gilt für die Zeitkoordinaten. Hier sind jedoch für C und C′ die festgestellten Werte A/B′ und B′/A vertauscht. Dies ist auch aufgrund der Relativitätsbetrachtung zwingend erforderlich, da die Beobachter C bzw. C′ zuerst beide Signale von den ihnen zugeordneten Beobachtern A bzw. A′ empfangen muss. Hierbei ist wichtig, dass aus Sicht des ruhenden Beobachters erst der Unterschied in den beobachteten Zeiten für die Signalübertragung von A′ und B′ nach C′ zu einer einwandfreien Zeitabfolge führt. Es sind somit zusammenfassend keinerlei Unterschiede für die sich ergebenden Messergebnisse der beteiligten Beobachter festzustellen.

2.2.3 Signalaustausch quer zur Bewegungsrichtung

Es sei der Fall betrachtet, dass ein Signal quer zur Bewegungsrichtung ausgesendet und reflektiert wird (z. B. in y-Richtung). Die auftretende Zeitdilatation mit dem Wert von γ für den bewegten Beobachter, der beim Erreichen des Lichtsignals am Reflektor den Weg $d = vT$ zurückgelegt hat, wird exakt durch den längeren Weg des Signals $D' = cT$ kompensiert und es sind daher für den bewegten Beobachter keine Unterschiede gegenüber dem Ruhezustand feststellbar (Abb. 2.12).



$$tan\alpha = \frac{D}{vT} = \frac{c}{\gamma v}$$

Abb. 2.12: Signalverlauf quer zur Bewegungsrichtung

Dies bedeutet, dass im Gegensatz zu den Effekten in Längsrichtung bei einem Signalaustausch quer zur Bewegungsrichtung für einen ruhenden Beobachter durch den Effekt der Aberration aus seiner Sicht eine Veränderung des Abstrahlwinkels auftritt. Dieser lässt sich gemäß der in Abb. 2.12 dargestellten Beziehung über den Tangens berechnen (vgl. auch Gl. (2.10) mit $\alpha = 90° - \delta$).

Nachdem zunächst die Verhältnisse beim Austausch von Signalen in Bewegungsrichtung untersucht wurden, wird damit das Verhalten quer dazu beschrieben. Es ergaben sich keine Abweichungen zu den erwarteten Gegebenheiten für die bewegten Versuchsteilnehmer und das Relativitätsprinzip ist damit gewahrt.

Um im nächsten Schritt eine Bestimmung der Verhältnisse beim Signalaustausch in beliebigen Raumrichtungen vornehmen zu können, sind zunächst grundlegende Betrachtungen der Winkelbeziehungen von ein- und ausgehenden Signalen unter Berücksichtigung des Aberrationseffekts erforderlich. Diese werden im Folgenden vorgenommen, bevor dann abschließend nachgewiesen werden soll, dass auch hierbei keine Abweichungen zwischen den subjektiven Beobachtungen eines ruhenden und eines relativ dazu bewegten Beobachters auftreten. Dieser Sachverhalt wird ausführlich in Kapitel 2.4 dargestellt und die Gültigkeit anhand einer Beispielrechnung nachgewiesen.

2.3 Winkelbeziehungen beim Austausch von Signalimpulsen

Im Folgenden wird untersucht, welche Auswirkungen aus unterschiedlichen Richtungen ein- oder ausgehende Signale auf die Winkelmessung beim Empfang in einem bewegten Körper haben. Dieser Effekt wird als Aberration bezeichnet (vgl. Abb. 2.5).

Wie bereits dargestellt wurde, muss bei relativistischer Betrachtung der Effekt berücksichtigt werden, dass ein Körper sich in Bewegungsrichtung verkürzt. Dieser Effekt wurde jedoch bisher nur für Hin- und Rückweg eines Signals in Bewegungsrichtung eingesetzt und sagt noch nichts über die Aufteilung in alle Raumrichtungen aus. Aus dem Relativitätsprinzip lässt sich ableiten, dass die Raumkontraktion symmetrisch um die Mittelachse des betrachteten Körpers gemäß der Darstellung in Abb. 2.13 verteilt ist. Es spielt dabei keine Rolle, in welche Richtung die Bewegung stattfindet.

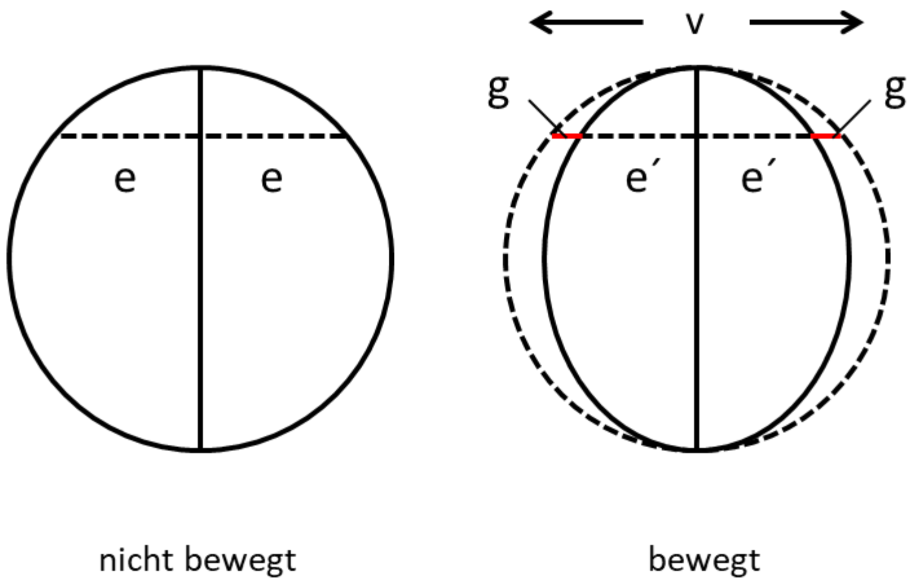


Abb. 2.13: Raumkontraktion im bewegten Körper

Dabei entspricht die Distanz e' im bewegten System dem Wert $e - g$ oder e/γ.

2.3.1 Empfang im bewegten Körper

Im Folgenden sollen die Werte für den Empfang in einem bewegten System bestimmt werden. Hierbei ist zunächst die Frage zu klären, wie eine solche Messung durchgeführt werden soll. Es wird folgende Anordnung gewählt:

Eine Kugel mit dem Radius a enthält ausreichend viele Bohrungen im Gesamtumfang, durch die gerichtete Lichtstrahlen eines Senders eindringen können (z. B. an der Stelle P_1, vgl. Abb. 2.14). Trifft ein solcher Lichtstrahl den Mittelpunkt (P_2), so sind aus Sicht des Empfängers über die Lage der Bohrung und dem gegebenen Radius a die Winkel definiert, da jeder dieser Bohrungen über geometrische Messungen ein Winkel α' bzw. β' zugeordnet werden kann.

Wird der Empfänger bewegt, so werden sich aus Sicht eines ruhenden Beobachters die Winkel ändern und betragen für ihn α bzw. β. Der durch das bewegte System verlaufende Lichtstrahl entspricht dann einer Länge von d. Bei den Berechnungen ist zu berücksichtigen, dass wie bereits ausgeführt durch die Längenkontraktion eine angenommene Kugel sich in Bewegungsrichtung verformt (vgl. Abb. 2.13). Dabei entsprechen für eingehende Signale die geometrischen Abhängigkeiten der Abb. 2.14. Für den Signaleingang von hinten (Teil a) gelten die Zusammenhänge

$$d^2 = f^2 + (e + b - g)^2 \tag{2.40}$$

und

$$f = d \cdot sin\alpha \qquad f = a \cdot sin\alpha' \tag{2.41}$$

Außerdem gilt

$$e = a \cdot cos\alpha' \tag{2.42}$$

$$\frac{b}{v} = \frac{d}{c} \tag{2.43}$$

$$e - g = \frac{e}{\gamma} \tag{2.44}$$

Hieraus folgt zunächst

$$a = d \cdot \frac{sin\alpha}{sin\alpha'} \tag{2.45}$$

Nach Umformung entwickelt sich Gl. (2.40) dann zu

$$d^2 = (d \cdot sin\alpha)^2 + \left(d\frac{v}{c} + d\frac{cos\alpha' \cdot sin\alpha}{\gamma \cdot sin\alpha'}\right)^2 \tag{2.46}$$

$$1 - sin^2\alpha = cos^2\alpha = \left(\frac{v}{c} + \frac{sin\alpha}{\gamma \cdot tan\alpha'}\right)^2 \tag{2.47}$$

$$tan\alpha' = \frac{sin\alpha}{\gamma\left(\pm\, cos\alpha - \frac{v}{c}\right)} \tag{2.48}$$

wobei aufgrund der geometrischen Gegebenheiten nur positive Werte für $cos\alpha$ zu berücksichtigen sind. Für den Signaleingang von vorn (Abb. 2.14b) gelten die Zusammenhänge

$$d^2 = f^2 + (e - b - g)^2 \tag{2.49}$$

Dies führt dann nach gleicher Rechnung wie zuvor zu

$$tan\beta' = \frac{sin\beta}{\gamma\left(cos\beta + \frac{v}{c}\right)} \qquad (2.50)$$

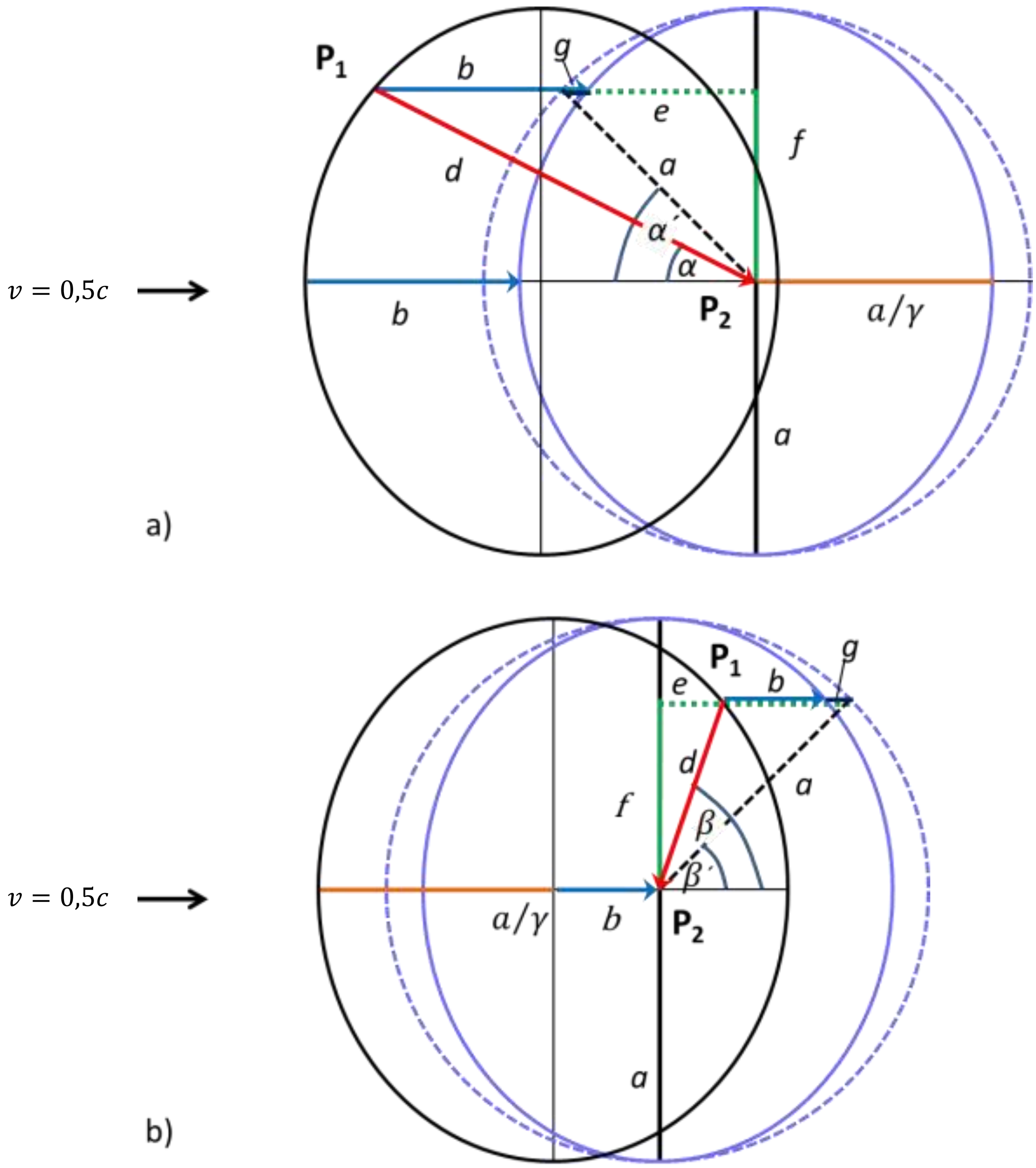


Abb. 2.14: Definition der Größen zur Bestimmung des subjektiven Eingangswinkelsfür einen bewegten Beobachter (Beispiele für $v = 0{,}5c$ und $\alpha', \beta' = 45°$)
a) Signaleingang in Bewegungsrichtung, b) Signaleingang von vorn

Bevor die Ergebnisse diskutiert werden, soll zunächst der umgekehrte Fall für ausgehende Signale untersucht werden.

2.3.2 Ausstrahlung vom bewegten Körper

Für die ausgehenden Signale gelten vergleichbare Beziehungen. Die für einen ruhenden Beobachter gültigen Zusammenhänge sind aus dem Diagramm 2.15 zu entnehmen. Hierbei wird das Lichtsignal vom Mittelpunkt ausgestrahlt (P_1) und trifft auf eine Bohrung in der Außenwand (P_2). Auch hierbei muss die Längenkontraktion des Beobachters berücksichtigt werden.

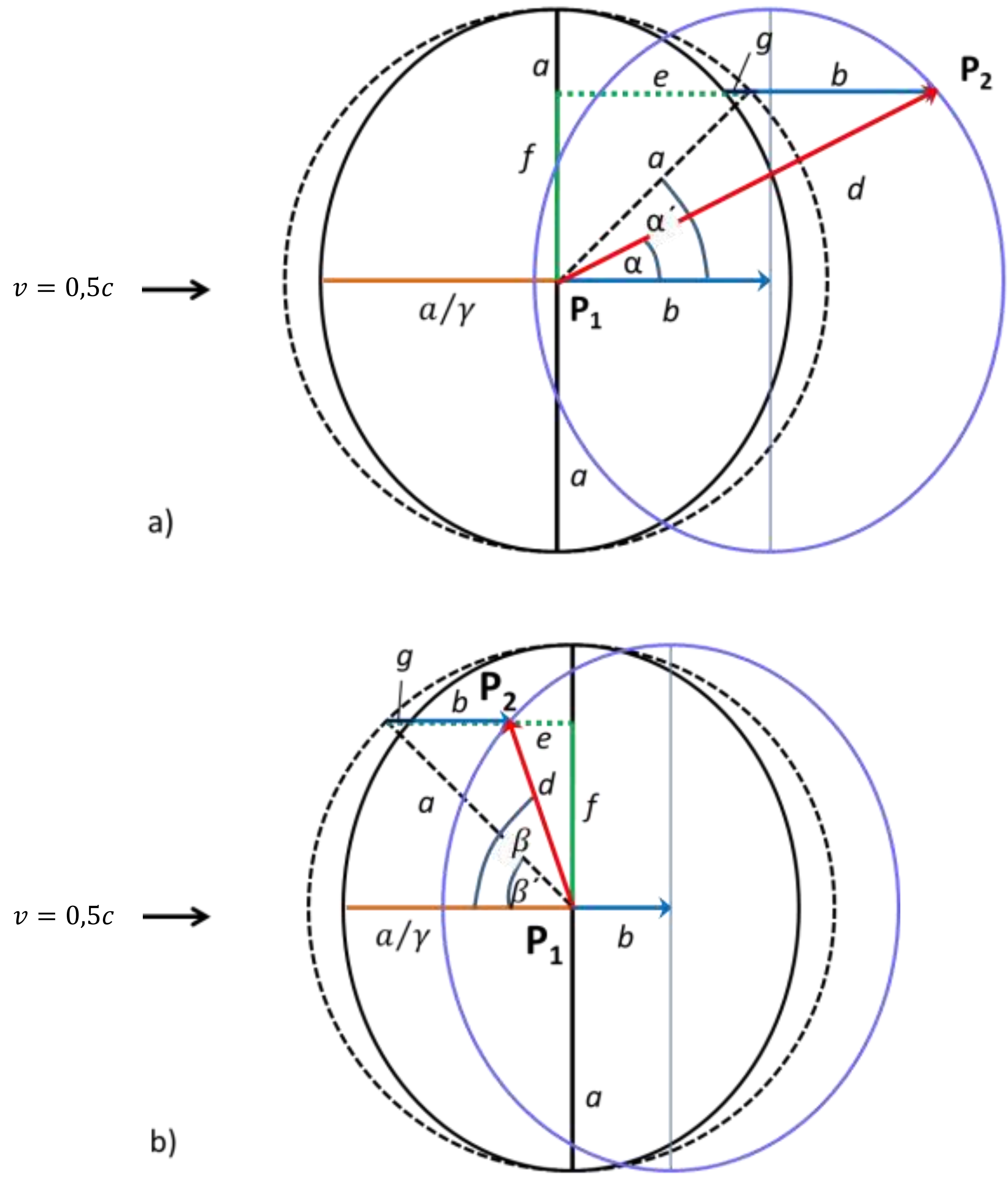


Abb. 2.15: Definition der Größen zur Bestimmung des subjektiven Ausgangswinkels für einen bewegten Beobachter (Beispiele für $v = 0{,}5c$ und $\alpha', \beta' = 45°$)
a) Signalausgang in Bewegungsrichtung, b) Signalausgang zurück

Für den Signalausgang in Bewegungsrichtung (Abb. 2.15a) ergeben sich exakt die gleichen Bedingungen wie beim Signaleingang entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung, die in den Gleichungen Gl. (2.40) bis Gl. (2.48) dargestellt sind. Für den Signalausgang nach hinten (Abb. 2.15b) gilt der umgekehrte Fall und es ergibt sich als Ergebnis Gl. (2.50).

2.3.3 Ergebnisse der Winkelbestimmungen

Zunächst sei an dem Beispiel aus Kapitel 2.1.2 gezeigt, dass die dort auftretenden Winkel für den unbewegten und den bewegten Beobachter übereinstimmen. Dazu werden die Signalverläufe mit den zugehörigen Winkeln betrachtet. Aus Sicht des unbewegten Beobachters A beginnt der Vorgang mit dem Aussenden des Signals 1, dann trifft Signal 2 ein und wird zurückgesendet, abschließend trifft das zurückgesendete Signal 1 ein. Die Winkel für ausgehende Signale werden mit ε, für eingehende mit δ gekennzeichnet.

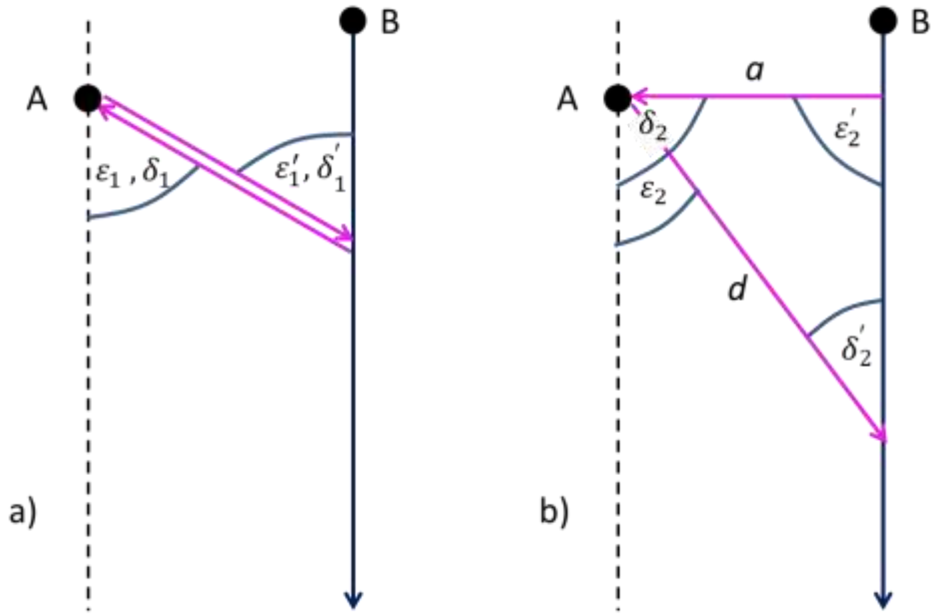


Abb. 2.16: Signalverlauf der in Kap. 2.1 dargestellten Situation mit entsprechenden Winkeln, Beispiel für $v = 0{,}5c$

Aufgrund der gewählten Situation lassen sich folgende Randbedingungen definieren:

- Die Eingangswinkel δ_2 und δ_1' betragen 90°.
- Eingangswinkel δ_1 und Ausgangswinkel ε_1 sind gleich.
- Der Ausgangswinkel ε_2 errechnet sich aus Gl. (2.23) zu

$$\varepsilon_2 = arcsin\left(\frac{a}{d}\right) = arcsin\left(\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{1+\frac{v^2}{c^2}}\right) = 36{,}87° \tag{2.51}$$

Hieraus ergeben sich für $v = 0{,}5c$ folgende Berechnungen:

	Ausgangswert	Formel	Ergebnis
1	$\delta_1' = 90°$	$tan\delta_1' = \frac{sin\varepsilon_1}{\gamma\left(cos\varepsilon_1 + \frac{v}{c}\right)}$	$\varepsilon_1 = 60°$
2	$\delta_2 = 90°$	$tan\varepsilon_2' = \frac{sin\delta_2}{\gamma\left(cos\delta_2 + \frac{v}{c}\right)}$	$\varepsilon_2' = 60°$
3	$\varepsilon_2 = 36{,}87°$	$tan\delta_2' = \frac{sin\varepsilon_2}{\gamma\left(cos\varepsilon_2 - \frac{v}{c}\right)}$	$\delta_2' = 60°$
4	$\delta_1 = 60°$	$tan\varepsilon_1' = \frac{sin\delta_1}{\gamma\left(cos\delta_1 + \frac{v}{c}\right)}$	$\varepsilon_1' = 36{,}87°$

Tab. 2.3: Berechnung der Winkel für die Situation gemäß Abb. 2.16

Es ist klar zu erkennen, dass A und B die gleichen Winkel für ausgehende (60°, 36,87°) und eingehende (90°, 60°) Signale feststellen. Es ist damit gezeigt, dass das Relativitätsprinzip auch für Winkelmessungen anwendbar ist und dass die symmetrische Aufteilung der Raumkontraktion um die Mittelachse korrekt sein muss.

2.3.4 Literaturvergleich und Bewertung

Folgende einfache Form einer Ableitung der Aberrationsformel im relativistischen Bereich wurde von D. Giulini dargestellt [19], bei der die Abstrahlung eines Lichtimpulses von einem Beobachter mit den Koordinaten x_0 und y_0 in einem unbewegten System bzw. x_0' und y_0' bezogen auf ein hierzu mit der Geschwindigkeit v bewegtes System auf den jeweiligen Koordinatenursprung betrachtet wird. Dabei sind δ und δ' die jeweiligen Winkel zur x-Achse. Zum Zeitpunkt $t = t_0 = t_0'$ treffen die Systeme im Nullpunkt aufeinander. Dann gilt für die Geschwindigkeitskomponente u_x im unbewegten System

$$u_x = -c \cdot cos\delta \tag{2.60}$$

und im bewegten System

$$u_x' = -c \cdot cos\delta' \tag{2.61}$$

Eingesetzt in die relativistische Gleichung der Geschwindigkeitsaddition

$$u_x' = \frac{u_x + v}{1 + \frac{u_x \cdot v}{c^2}} \tag{2.62}$$

ergibt sich die Form

$$cos\delta' = \frac{cos\delta - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c} \cdot cos\delta} \tag{2.63}$$

Umfassendere Darstellungen der Herleitung kommen zum gleichen Ergebnis (z. B. von R. K. Pathria [27]). Aus der Literatur sind weitere Ableitungen bekannt, z. B. [28,89a] mit

$$\sin\delta' = \frac{\sin\delta}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c}\cdot\cos\delta\right)} = \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}\sin\delta}{1 - \frac{v}{c}\cdot\cos\delta} \tag{2.64}$$

Eine weitere nützliche Darstellung [19,28] erreicht man unter Verwendung der allgemeingültigen Halbwinkelformel für den Tangens mit

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta} \tag{2.65}$$

Werden hier die Formeln aus Gl. (2.63) und Gl. (2.64) eingesetzt, so ergibt sich

$$\tan\left(\frac{\delta'}{2}\right) = \frac{\sin\delta}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c}\right)(1 + \cos\delta)} \tag{2.66}$$

$$\tan\left(\frac{\delta'}{2}\right) = \left(\frac{c - v}{c + v}\right)^{1/2}\tan\left(\frac{\delta}{2}\right) \tag{2.67}$$

Diese Formel erlaubt es, durch einfache Umstellung der Gleichung Werte von δ in Abhängigkeit von δ' zu bestimmen. Im Folgenden werden Ergebnisse aus allen Formeln berechnet und miteinander verglichen. Hierbei ist zu berücksichtigen, dass Umkehrfunktionen (arc) für Winkel zwischen 0 und 180° nicht exakt definiert sind, wenn sie einen Sinus enthalten. Dies liegt daran, dass anders als beim Kosinus, der in diesem Intervall monoton fallend ist, die sinusförmige Welle bei 90° ein Maximum aufweist und daher die Umkehrfunktion 2 mögliche Lösungen hat. Aus diesem Grund wurden Ergebnisse für Werte >90° entsprechend den Angaben in Tab. 2.4 bzw. 2.5 angepasst. (Der Tangens ist zwischen 0 und 90° monoton steigend, was gemäß der Halbwinkelformel ausreichend ist).

1: $\alpha' = \arctan\left(\frac{\sin\alpha}{\gamma\left(\cos\alpha - \frac{v}{c}\right)}\right)$	**2**: $\alpha' = \arccos\left(\frac{\cos\alpha - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}\cdot\cos\alpha}\right)$
3: $\alpha' = \arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c}\cdot\cos\alpha\right)}\right)$	**4**: $\alpha' = 2\cdot\arctan\left[\left(\frac{c + v}{c - v}\right)^{1/2}\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]$

α		1		2		3		4	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,523599	30	0,869038	49,79	0,869038	49,79	0,869038	49,79	0,869038	49,79
0,785398	45	1,244669	71,31	1,244669	71,31	1,244669	71,31	1,244669	71,31
1,047198	60	1,570796	90,00	1,570796	90,00	1,570796	90,00	1,570796	90,00
1,570796	90	-1,047198	120,00	2,094395	120,00	1,047198	120,00	2,094395	120,00
2,094395	120	-0,643501	143,13	2,498092	143,13	0,643501	143,13	2,498092	143,13
2,356194	135	-0,469475	153,10	2,672117	153,10	0,469475	153,10	2,672117	153,10
2,617994	150	-0,306968	162,41	2,834625	162,41	0,306968	162,41	2,834625	162,41
3,141593	180	0	180,00	3,141593	180,00	0	180,00	3,141593	180,00

Tab. 2.4: Werte für α' in Abhängigkeit von α gemäß Formeln 1 bis 4, $v = 0{,}5c$
Winkelangabe im Bogenmaß und in Grad [°] (grau unterlegt).
Felder mit Rahmen: 180°+Winkel (für 1) und 180°-Winkel (für 3)

5: $\beta' = arctan\left(\frac{sin\beta}{\gamma\left(cos\beta + \frac{v}{c}\right)}\right)$	**6**: $\beta' = arccos\left(\frac{cos\beta + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c} \cdot cos\beta}\right)$
7: $\beta' = arcsin\left(\frac{sin\beta}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c} \cdot cos\beta\right)}\right)$	**8**: $\beta' = 2 \cdot arctan\left[\left(\frac{c-v}{c+v}\right)^{1/2} tan\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]$

β		5		6		7		8	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,523599	30	0,306968	17,59	0,306968	17,59	0,306968	17,59	0,306968	17,59
0,785398	45	0,469475	26,90	0,469475	26,90	0,469475	26,90	0,469475	26,90
1,047198	60	0,643501	36,87	0,643501	36,87	0,643501	36,87	0,643501	36,87
1,570796	90	1,047198	60,00	1,047198	60,00	1,047198	60,00	1,047198	60,00
2,094395	120	1,570796	90,00	1,570796	90,00	1,570796	90,00	1,570796	90,00
2,356194	135	-1,244669	108,69	1,896924	108,69	1,244669	108,69	1,896924	108,69
2,617994	150	-0,869038	130,21	2,272555	130,21	0,869038	130,21	2,272555	130,21
3,141593	180	0	180	3,141593	180	0	180	3,141593	180

Tab. 2.5: Werte für β' in Abhängigkeit von β gemäß Formeln 5 bis 8, $v = 0{,}5c$
Winkelangabe im Bogenmaß und in Grad [°] (grau unterlegt).
Felder mit Rahmen: 180°+Winkel (für 5) und 180°-Winkel (für 7)

Die bisherigen Betrachtungen der Gleichungen 1 - 8 waren ausschließlich gerichtet auf den Abstrahlungswinkel für einen Lichtimpuls, der für einen ruhenden Beobachter messbar ist und dann für die Bedingungen in einem bewegten System umgerechnet wurde. Dabei tragen definitionsgemäß in Bewegungsrichtung ausgerichtete Winkel die Bezeichnung α (für das unbewegte System) und α' (bewegt), während β und β' entgegengesetzt dazu liegen. Wie bereits in Kap. 2.3.2 ausgeführt, entsprechen bei der Betrachtung dieses umgekehrten Falls die für einen bewegten Beobachter messbaren Winkel bezogen auf ein ruhendes System exakt den entgegengesetzten Werten. Dies bedeutet, dass Messungen in Bewegungsrichtung mit Winkel α formal das Ergebnis entsprechend für β' aufweisen und dies für β und α' ebenfalls der Fall ist.

Dies gilt zunächst nur für die vorgenommene Ableitung der Gleichung 1. Das gleiche Ergebnis erhält man aber darüber hinaus auch sofort für Gleichung 4, die sich leicht nach α umstellen lässt.

Während die Beziehungen für eingehende Signale oft behandelt werden, ist dies für ausgehende Signale nur in wenigen Fällen der Fall. Von R. Göhring [47] werden dazu die für den eingehenden Fall gewonnenen Gleichungen nach α' aufgelöst und es zeigt sich, dass die auf diese Weise gewonnenen Ergebnisse mit den nachfolgenden Gleichungen übereinstimmen. Von W. Rindler [28] wird darüber hinaus ausgeführt, dass in den jeweiligen Formeln der Wert für c durch $-c$ ersetzt werden muss und sich dann die entsprechenden Beziehungen ergeben. Wird dies für alle der untersuchten Varianten überprüft, so ergibt sich auch hier eine völlige Übereinstimmung.

Die Ergebnisse lassen sich also folgendermaßen darstellen:

1: $\alpha = arctan\left(\frac{sin\alpha'}{\gamma\left(cos\alpha' + \frac{v}{c}\right)}\right)$	**2**: $\alpha = arccos\left(\frac{cos\alpha' + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c} \cdot cos\alpha'}\right)$
3: $\alpha = arcsin\left(\frac{sin\alpha'}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c} \cdot cos\alpha'\right)}\right)$	**4**: $\alpha = 2 \cdot arctan\left[\left(\frac{c - v}{c + v}\right)^{1/2} tan\left(\frac{\alpha'}{2}\right)\right]$

Die gleiche Umstellung gilt auch für den entgegengesetzten Fall:

5: $\beta = arctan\left(\frac{sin\beta'}{\gamma\left(cos\beta' - \frac{v}{c}\right)}\right)$	**6**: $\beta = arccos\left(\frac{cos\beta' - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c} \cdot cos\beta'}\right)$
7: $\beta = arcsin\left(\frac{sin\beta'}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c} \cdot cos\beta'\right)}\right)$	**8**: $\beta = 2 \cdot arctan\left[\left(\frac{c + v}{c - v}\right)^{1/2} tan\left(\frac{\beta'}{2}\right)\right]$

Abschließend kann zusammengefasst werden, dass der abgeleitete Formalismus eine Berechnung der relativistischen Aberration von unbewegten Systemen in bewegte und umgekehrt gestattet. Dabei treten für Beobachter in bewegten und unbewegten Systemen die gleichen Werte für die gemessenen Aberrationswinkel auf womit das Relativitätsprinzip gewahrt ist. Voraussetzung dafür ist, dass der Effekt der Längenkontraktion berücksichtigt wird und dass dieser symmetrisch in Bewegungsrichtung und entgegengesetzt dazu aufgeteilt ist.

In der praktischen Umsetzung ist für Berechnungen Variante 2 oder 4 vorzuziehen, weil diese keine Sinusfunktion enthalten und daher keine Interpretation des Resultats für Winkel >90° erforderlich ist. Der eigentliche Vorteil der hier vorgenommenen geometrischen Ableitung (d. h. Gleichungen 1 und 5) zeigt sich erst, wenn statt Lichtsignalen die Bewegung mit Unterlichtgeschwindigkeiten untersucht wird. In diesem Fall kann die Variante 1 bzw. 5 durch einfachen Austausch von c durch die Geschwindigkeit v des zweiten bewegten Objekts modifiziert werden, was mit den anderen Ableitungen nicht möglich ist. Dies wird wichtig bei Untersuchungen zum Impulsaustausch, die in Kap. 7 behandelt werden.

2.4 Signalaustausch in beliebigen Raumrichtungen

Nachdem nun die grundsätzlichen Gegebenheiten für den Signalverlauf in beliebigen Raumrichtungen abgeleitet wurden, kann abschließend der Nachweis erfolgen, dass ein Signal in einem bewegten System (hier in Form einer Kugel mit dem normierten Radius $a = 1$) vom Zentrum zur Außenschale und zurück subjektiv die gleiche Zeit benötigt wie im ruhenden System. Hierzu werden folgende Randbedingungen definiert:

1. Es wird ein beliebiger Winkel α' (bezogen auf die Bewegungsrichtung) für das bewegte System festgelegt, unter der das Lichtsignal vom Mittelpunkt der Kugel abgestrahlt wird. Danach erfolgen die folgenden Berechnungen:
2. Der zugehörige Winkel α_1 des (ruhenden) Referenzsystems,

3. Die Weglänge d_1 bis zum Erreichen der Außenkugel,
4. Der Winkel α_2 für den Rückweg zur Mitte mit gleichem Winkel α',
5. Die Weglänge d_2,
6. Bestimmung von $d_T = d_1 + d_2$. Der Wert von d_T muss exakt $2a\gamma$ sein, damit subjektiv für Messungen aus beiden Referenzsystemen das Relativitätsprinzip gewahrt ist.

Zur Berechnung werden die Gleichungen (2.45) und (2.67) genutzt und es ergeben sich folgende Zusammenhänge:

2: $\alpha_1 = 2 \cdot arctan\left[\left(\frac{c-v}{c+v}\right)^{1/2} tan\left(\frac{\alpha'}{2}\right)\right]$	**3**: $d_1 = \frac{sin\alpha'}{sin\alpha_1}$
4: $\alpha_2 = 2 \cdot arctan\left[\left(\frac{c+v}{c-v}\right)^{1/2} tan\left(\frac{\alpha'}{2}\right)\right]$	**5**: $d_2 = \frac{sin\alpha'}{sin\alpha_2}$

In der Tabelle 2.6 sind Berechnungen für das Beispiel $v = 0{,}5c$ zusammengestellt. Für die Werte $\alpha' \to 0°$ und 180° ergibt sich bezüglich α_1 und α_2 eine Division von 0 durch 0 und es müsste extrapoliert werden, zur Vereinfachung wurden nur Werte zwischen 1° bis 179° ausgewählt. Die Werte in Bewegungsrichtung bzw. entgegengesetzt dazu, d. h. bei 0 und 180° wurden bereits auf andere Weise in Kapitel 2.1 ermittelt.

Für alle Werte d_T ergibt sich ein Ergebnis von 2γ (hier für $v = 0{,}5c \Rightarrow 2\gamma = 2{,}309401..$). Dies bedeutet, dass der aus Sicht des ruhenden Beobachters zurückgelegte Weg des Impulses genau um diesen Faktor länger ist und damit auch die erforderliche Zeit für die Impulsübertragung. Alle Werte zeigen eindeutig, dass keine Abweichungen zwischen den subjektiv bestimmten Ergebnissen eines ruhenden und bewegten Beobachters festzustellen sind, da die Zeit im bewegten System genau um diesen Faktor langsamer abläuft. Auch hier wird also das Relativitätsprinzip nicht verletzt.

α' [°]	α'	α_1	α_1 [°]	d_1	α_2	α_2 [°]	d_2	d_T
1	0,017453	0,010077	0,577360	1,731963	0,030228	1,731963	0,577438	2,309401
15	0,261799	0,151727	8,693343	1,712378	0,448391	25,69090	0,597023	2,309401
30	0,523599	0,306968	17,58795	1,654701	0,869038	49,79218	0,654701	2,309401
45	0,785398	0,469475	26,89895	1,562949	1,244669	71,31426	0,746452	2,309401
60	1,047198	0,643501	36,86990	1,443376	1,570796	90	0,866025	2,309401
75	1,308997	0,834062	47,78826	1,304130	1,851500	106,0831	1,005271	2,309401
90	1,570796	1,047198	60	1,154701	2,094395	120	1,154701	2,309401
105	1,832596	1,290093	73,91689	1,005271	2,307530	132,2117	1,304130	2,309401
120	2,094395	1,570796	90	0,866025	2,498092	143,1301	1,443376	2,309401
135	2,356194	1,896924	108,6857	0,746452	2,672117	153,1010	1,562949	2,309401
150	2,617994	2,272555	130,2078	0,654701	2,834625	162,4120	1,654701	2,309401
165	2,879793	2,693202	154,3091	0,597023	2,989865	171,3067	1,712378	2,309401
179	3,124139	3,111364	178,2680	0,577438	3,131516	179,4226	1,731963	2,309401

Tab. 2.6: Berechnung der Werte für $d_T = d_1 + d_2$ gemäß Gl. 2 bis 5, $v = 0{,}5c$.
Die Werte entsprechen exakt $2\gamma = 2{,}309401$

3. Transformationsformalismus und Synchronisation

Die bisher dargestellten Zusammenhänge zwischen Zeit- und Ortskoordinaten sind zum vollständigen Verständnis des Sachverhalts noch nicht ausreichend. Von H. Poincaré wurde hierzu bereits im Jahre 1900 der Begriff der „Ortszeit" und die sich daraus ergebenden Folgerungen diskutiert [10]. Von A. Einstein wurde dann die generelle Aussage getroffen, dass die Ortzeiten von bewegten Beobachtern stets durch Synchronisierungen miteinander verknüpft werden müssen [12].

Innerhalb der speziellen Relativitätstheorie nimmt die Betrachtung der Synchronisierung von Ereignissen einen sehr prominenten Raum ein. In jedem Lehrbuch wird diese beschrieben; außerdem gibt es gibt eine Vielzahl von Veröffentlichungen hierzu, die hier nur zu einem kleinen Teil betrachtet werden können.

Generell lässt sich das Thema in zwei Rubriken unterteilen:

1. Die Synchronisierung von Ereignissen mittels Signalaustausch
2. Die Synchronisierung von Ereignissen durch Austausch von Uhren

Die Ergebnisse entsprechen nicht dem intuitiven menschlichen Verständnis von Gleichzeitigkeit und sind daher nicht einfach zu verstehen. Dies liegt an der Tatsache, dass ein Signalaustausch zwischen zwei Beobachtern stets mit Lichtgeschwindigkeit erfolgt und dies in die Betrachtungen mit einbezogen werden muss. Im Folgenden werden zunächst die Zusammenhänge bei der Synchronisierung von Ereignissen mittels Signalaustausch betrachtet, die Synchronisierung mittels Austausches von Uhren wird in Kapitel 5 behandelt.

3.1 Ortszeit und Synchronisation mittels Signalaustausch

Es sei ein Versuchsaufbau betrachtet, bei dem ein Labor mit der Länge a sich in Ruhe befindet und von einem Körper mit der Geschwindigkeit v passiert wird (Abb. 3.1). An den beiden Enden A und E befindet sich jeweils eine Uhr. Beim Eintreffen des bewegten Körpers bei A (Fall a) wird die Uhr gestellt, und zwar auf den Wert

$$t = -\frac{a}{v} \tag{3.01}$$

Nach dem Erreichen des Punktes E (Fall b) hat dann die Uhr am Punkt A den Wert 0 erreicht. Auf diese Weise sind die beiden Sender synchronisiert. Zu diesem Zeitpunkt wird von A und E gleichzeitig ein Signal ausgesendet, das zum Zeitpunkt

$$t = \frac{a}{c} \tag{3.02}$$

beim jeweiligen anderen Partner eintrifft (Fall c).

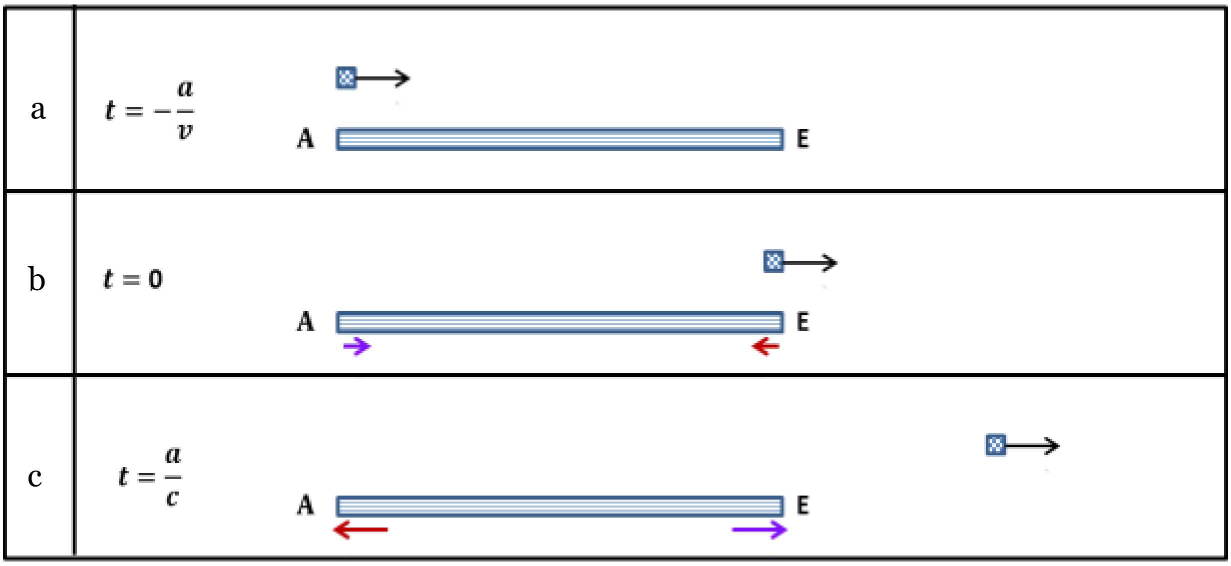


Abb. 3.1 Versuchsaufbau zur Synchronisation eines unbewegten Körpers durch Uhren an den Enden A und E

Wegen des Relativitätsprinzips müssen alle Versuchsteilnehmer zu den gleichen Ergebnissen kommen, wenn statt des Labors der in Abb. 3.1 bewegte Körper als ortsfest betrachtet wird. Werden diese Gegebenheiten aufgetragen, so entsteht ein völlig anderes Schaubild. In Abb. 3.2 ist ein solches Raum-Zeit-Diagramm dargestellt.

Zunächst trifft A auf den ruhenden Körper (dargestellt als A_0). Nun beginnt die Wartezeit, bei der aus Sicht des ruhenden Beobachters die Zeitdilatation berücksichtigt ist. Teilnehmer E passiert den ruhenden Beobachter bei E_1 (bei dieser Darstellung ist berücksichtigt, dass das bewegte Labor aus Sicht des ruhenden Beobachters um den Faktor γ verkürzt ist). Nun wird ein Signal an A gesendet das bei A_4 dort ankommt. Nach Ablauf der Wartezeit sendet A beim Punkt A_2 ebenfalls sein Signal aus, das dann bei E_3 eintrifft.

Es ist hier klar erkennbar, dass aus Sicht des unbewegten Beobachters die Zeiten bei den bewegten Laborenden A und E nicht gleich sind. Der Zeitpunkt „0“ ist hierbei abhängig von der Entfernung zum ruhenden Beobachter und verläuft auf einer Linie, die im Diagramm mit x' gekennzeichnet ist.

Generell handelt es sich hierbei um einen der wesentlichen Effekte der Speziellen Relativitätstheorie. Dieser wird auch als „Relativität der Gleichzeitigkeit“ bezeichnet.

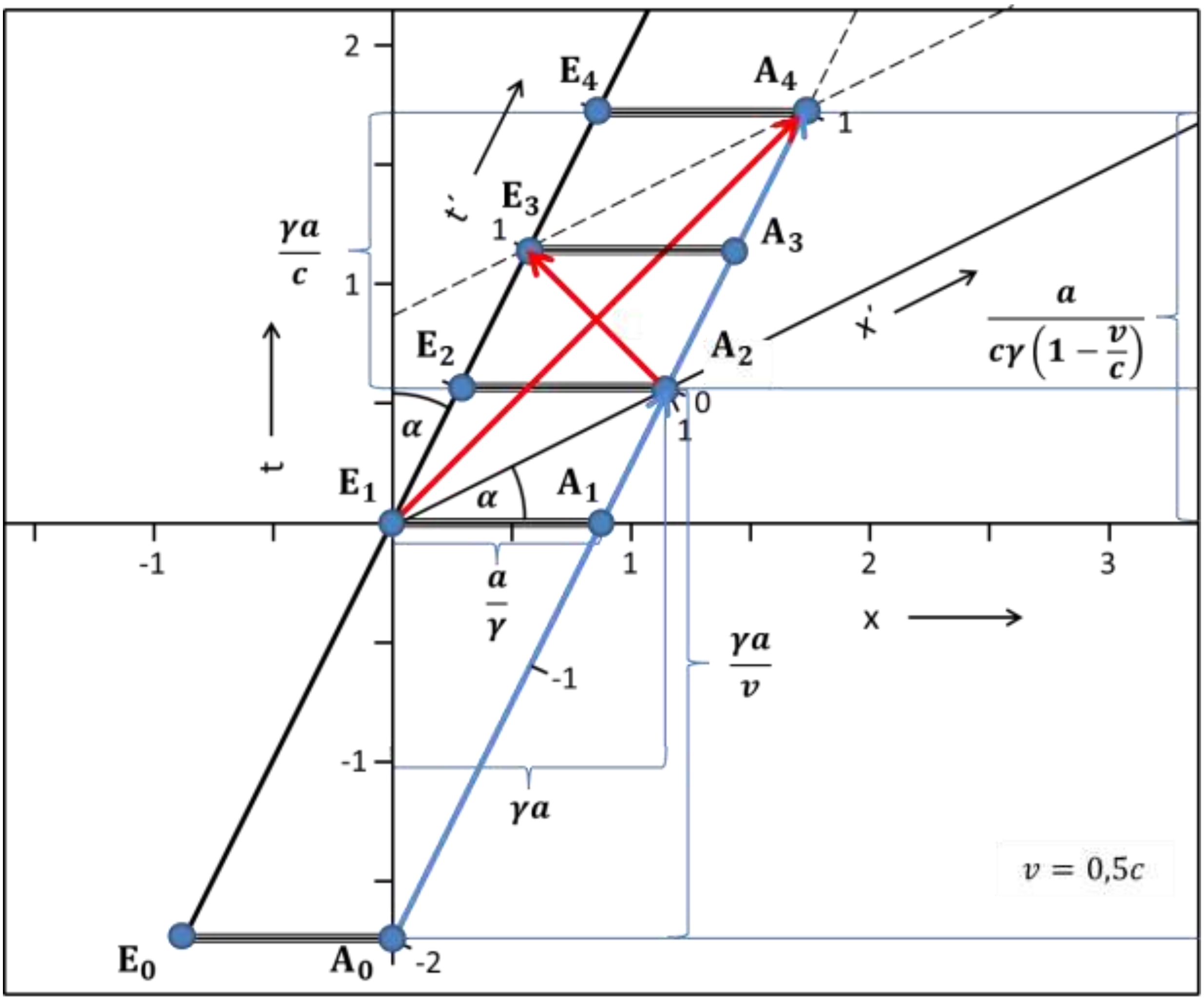


Abb. 3.2 Versuchsaufbau zur Synchronisation eines bewegten Körpers durch Uhren an den Enden A und E.

Die Synchronisationsdifferenz Δt_S lässt sich leicht ermitteln und beträgt

$$\Delta t_S = \frac{a}{c\gamma\left(1-\frac{v}{c}\right)} - \frac{\gamma a}{c} = \frac{\gamma a}{c}\left(1+\frac{v}{c}\right) - \frac{\gamma a}{c} \tag{3.03}$$

$$\Delta t_S = \frac{\gamma a v}{c^2} \tag{3.04}$$

Der Winkel zwischen der x'- und der x-Achse wird berechnet aus der Synchronisationsdifferenz dividiert durch γa

$$\tan\alpha = \frac{c \cdot \Delta t_S}{\gamma a} = \frac{v}{c} \tag{3.05}$$

und ist damit identisch mit dem Winkel zwischen den ct'- und ct-Achsen.

Das hier entwickelte Diagramm weist interessante Besonderheiten auf, die im Folgenden diskutiert werden sollen.

3.2 Minkowski-Diagramm

Das oben dargestellte Diagramm wurde in die Relativitätstheorie von H. Minkowski (1864-1909) eingeführt, der neben vielen wichtigen wissenschaftlichen Beiträgen auch diese nach ihm benannte Darstellung entwickelt hat [15c].

Minkowski-Diagramme zeigen eine Reihe von Besonderheiten. Zunächst wird üblicherweise nicht die Darstellung von t sondern von ct über x gewählt. Hierdurch erhalten beide Achsen die gleiche Dimension und es können direkte Ableitungen daraus erfolgen. Nach Normierung entsteht das in Abb. 3.3 dargestellte Aussehen. In dieser Form zeigt das Diagramm eine Spiegelsymmetrie bezüglich der 45°-Achse, die durch den Ursprung verläuft.

Es ist möglich aus diesen Diagrammen direkt die Koordinaten zu ermitteln, die sich für den ruhenden (x, ct) und für den bewegten Beobachter (x', ct') für den gleichen Sachverhalt ergeben. Im Diagramm Abb. 3.4 ist hierzu beispielhaft der Punkt $\mathrm{P}_{\mathrm{x,ct}}$ mit den Koordinaten $x = 3$ und $ct = 2$ dargestellt. Dies ist der Wert, an der sich ein bewegter Beobachter aus Sicht des ruhenden Systems in einer Entfernung von 3 Längeneinheiten (LE) nach 2 Zeiteinheiten (ZE) bezogen auf den Ursprung aufhält.

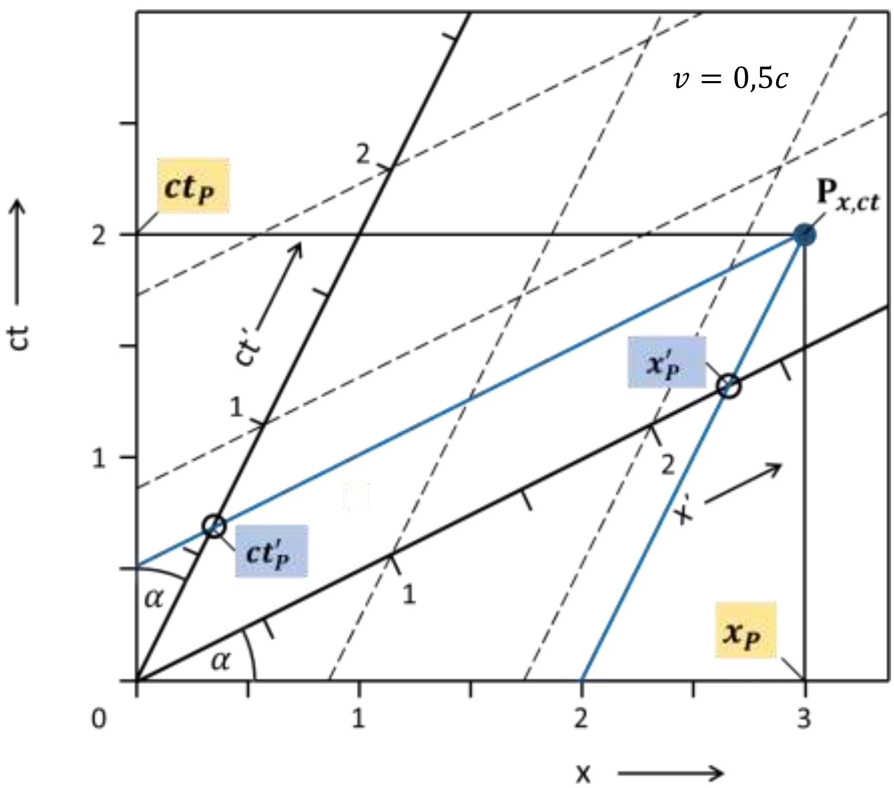


Abb. 3.3: Minkowski-Diagramm: Beispiel mit Punkt $x = 3$ und $ct = 2$.
Grafische Bestimmung der Koordinaten im bewegten System x', ct'

Das x'/ct' – Koordinatensystem ist nicht rechtwinklig sondern weist die Winkel α zum System x/ct auf. Daher werden auch die Koordinaten unter diesem Winkel abgelesen. Es werden Parallelen zur x′ und ct' Achse gebildet. Die Werte für x'_P und ct'_P können dann wie dargestellt an den Schnittpunkten mit den Achsen $ct' = 0$ bzw. $x' = 0$ abgelesen werden.

Es wird im nächsten Kapitel gezeigt, dass eine rein grafisch/geometrische Ableitung in der Folge zu den Lorentz-Transformationsgleichungen führt. Dies ist zwingend erforderlich, da es sonst zu Widersprüchen innerhalb der Theorie kommen würde.

3.3 Lorentz-Transformation

Zur Ableitung der Lorentz-Transformation gibt es eine Vielzahl von Ansätzen, die hier nur beispielhaft erwähnt werden können. Gemäß der von M. Born [26] eingeführten und auch heute noch genutzten Klassifizierung [47] gibt es grundsätzlich den grafischen und den algebraischen Ansatz. Während die grafische Herleitung nur selten genutzt wird [z. B. 26a] gibt es für den algebraischen Ansatz eine Vielzahl von Varianten. Diese reichen neben der klassischen Darstellung [12,29] von der „schnellsten" Ableitung [30] über konventionelle Ansätze [31,32] bis zur Verwendung des Tensor Kalküls [27,28,33]. Darüber hinaus lassen sich auch Teile des grafischen und algebraischen Ansatzes verbinden [19]. Da die Lorentz Transformation zu den wichtigsten Elementen der speziellen Relativitätstheorie gehört soll deren Ableitung an dieser Stelle auch an ausgewählten Beispielen gezeigt werden.

Grundsätzlich gilt, dass die vorliegenden Beziehungen linear sein müssen. Gäbe es z. B. quadratische Terme, dann würden Ableitungen nach Ort oder Zeit von dem Ort oder der Zeit selbst abhängen. Alle physikalischen Gesetze, die Ableitungen nach Ort oder Zeit enthalten (z. B. Geschwindigkeit, Beschleunigungen) wären dann bei nicht linearen Beziehungen vom Nullpunkt des entsprechenden Orts- oder Zeitmaßstabs abhängig. In einem solchen Fall könnte dies aber Gegenstand direkter Messungen sein und widerspricht somit der allgemeinen Vorstellung von der Homogenität des Raums und der Zeit. Ein weiterer Punkt ist, dass die zu ermittelnden Beziehungen im Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten in die Galilei-Transformation der klassischen Mechanik übergehen müssen.

Im Folgenden wird zunächst eine grafische Ableitung der Lorentz-Transformation aus dem Minkowski-Diagramm vorgenommen. Im Gegensatz zum Ansatz von M. Born [26a], bei dem mit Proportionsrelationen und Satz des Pythagoras gearbeitet wird, werden hierbei Winkelfunktionen und geometrische Ansätze genutzt und es entsteht dabei eine besonders anschauliche Darstellung. Im Anschluss wird ein ausgewählter algebraischer Ansatz präsentiert.

Es soll an dieser Stelle noch kurz auf einen wichtigen Punkt eingegangen werden. Gemäß des Prinzips der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen werden für das Referenzsystem („ruhend") und für einen dazu bewegten Beobachter Messungen der Lichtgeschwindigkeit zum gleichen Ergebnis führen (Kap. 1.6). Dies ist subjektiv korrekt. Bei den im Folgenden diskutierten Ableitungen wird aber ausschließlich die Lichtgeschwindigkeit des Referenzsystems zugrunde gelegt und damit die hieraus getroffenen Beobachtungen beschrieben, aus denen sich im Endeffekt die Lorentz Transformation ergibt.

3.3.1 Ableitung der Lorentz-Transformation aus dem Minkowski Diagramm

Wie bereits ausgeführt wurde, kann die Darstellung des Minkowski-Diagramms ausschließlich aus der Zeitdilatation, Längenkontraktion und Synchronisationsdifferenz abgeleitet werden. Darüber hinaus ist nur die Annahme der Isotropie von Zeit und Raum sowie die

Konstanz der Lichtgeschwindigkeit (im unbewegten System) erforderlich. Im Folgenden wird gezeigt, dass sich beim Übergang zwischen den dargestellten Systemen dieses Diagramm zwangsläufig Beziehungen entsprechend der Lorentz-Transformation ergeben müssen.

Betrachtet man in dieser Darstellung einen beliebigen Punkt $\mathrm{P}_{\mathrm{x,ct}}$ (Abb. 3.4), so lassen sich die Koordinaten mit Hilfe der gelb markierten Werte errechnen.

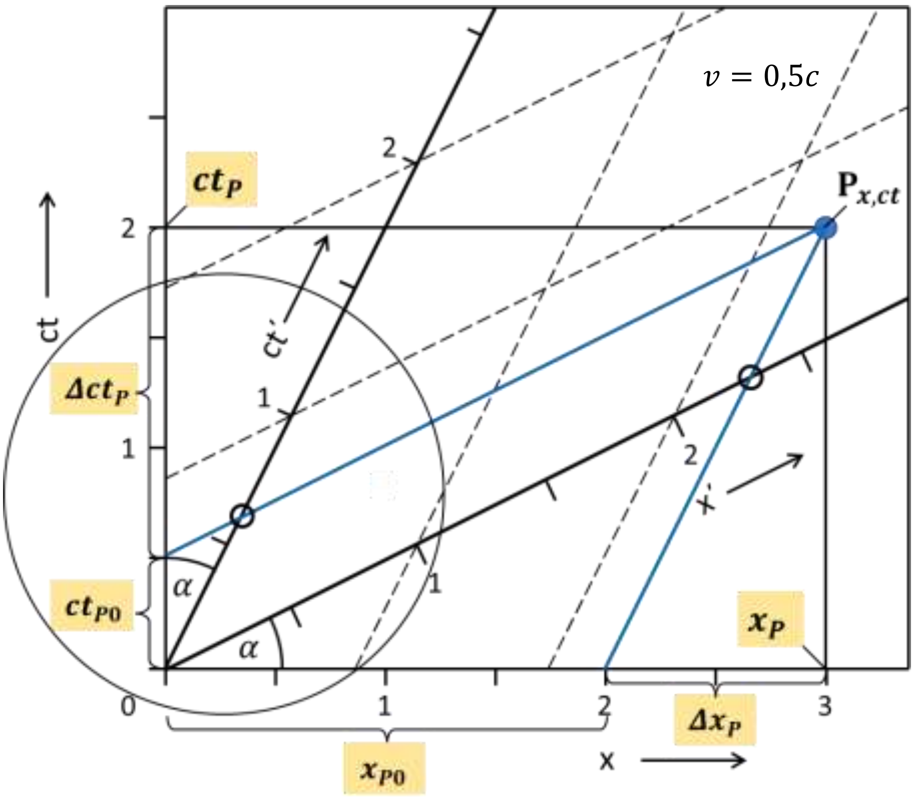


Abb. 3.4 Minkowski-Diagramm mit Koordinatenbestimmung von Punkt $\mathrm{P}_{\mathrm{x,ct}}$ im bewegten System. Für die Berechnung relevante Größen sind gelb eingefärbt.

Zunächst werden Parallelen zu den x'- und ct'-Achsen gebildet und deren Schnittpunkte mit dem ct/x-Koordinatensystem bestimmt. Die sich dabei ergebenden Werte ct_{P0} und x_{P0} können in x_P' und ct_P' umgewandelt werden. Dazu ist im Bereich um 1 eine Zwischenrechnung erforderlich. Hierzu ist in Abb. 3.4 ein Kreis eingezeichnet, dessen Inhalt in Abb. 3.5 in höherer Auflösung dargestellt ist.

In diesem Diagramm Abb. 3.5 sind alle Werte auf 1 normiert. Im dargestellten Fall tritt keine Ortsveränderung innerhalb des bewegten Labors auf, d. h. die Bewegung erfolgt auf der ct'- Achse. Dann gilt wie bereits in Kap. 2 dargestellt für den Fall $ct = 1$ die Abhängigkeit $d = \gamma \cdot ct_1$. Es folgt

$$\tan\alpha = \frac{v}{c} = \frac{b}{d} = \frac{e}{b} \tag{3.10}$$

und daraus

$$e = d\frac{v^2}{c^2} \tag{3.11}$$

Wegen $f = d - e$ folgt nach dem Einsetzen von Gl. (3.11)

$$f = d - d\frac{v^2}{c^2} = d\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{d}{\gamma^2} = \frac{ct_1}{\gamma} \tag{3.12}$$

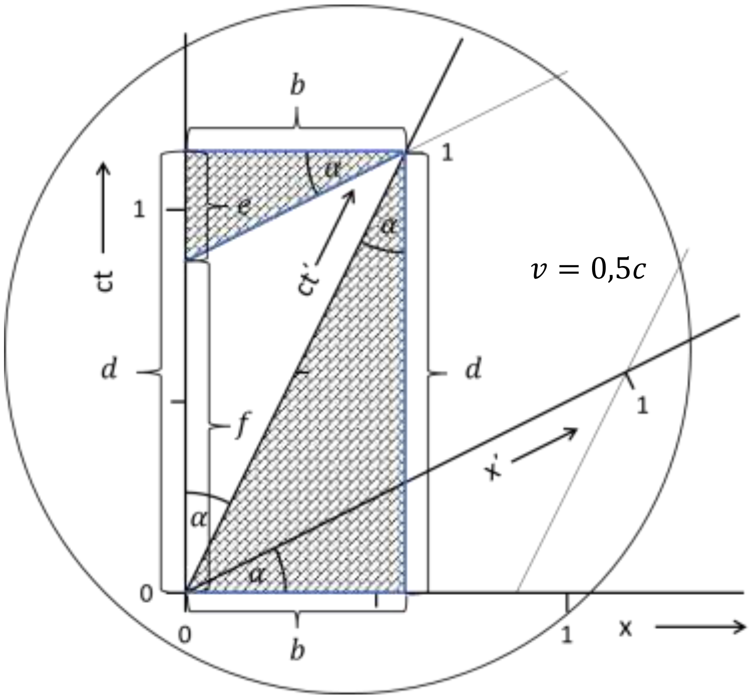


Abb. 3.5: Detail aus Abb. 3.4, Bestimmung des Wertes f entsprechend ct_{P0} aus Abb. 3.4

Für die x'-Achse gilt aus Symmetriegründen der gleiche Zusammenhang. Es folgt zunächst für den Wert ct'_P:

$$ct'_P = \gamma \cdot ct_{P0} \tag{3.13}$$

Aus den geometrischen Gegebenheiten in Abb. 3.4 ergibt sich

$$ct'_P = \gamma\,(ct_P - \Delta ct_P) \tag{3.14}$$

Wegen

$$\tan\alpha = \frac{\Delta ct_P}{x_P} = \frac{v}{c} \tag{3.15}$$

gilt abschließend

$$t'_P = \gamma\left(t_P - \frac{v}{c^2}x_P\right) \tag{3.16}$$

Für x'_P ergibt sich in gleicher Weise

$$x'_P = \gamma \cdot x_{P0} \tag{3.17}$$

$$x'_P = \gamma\,(x_P - \Delta x_P) \tag{3.18}$$

$$\tan\alpha = \frac{\Delta x_P}{ct_P} = \frac{v}{c} \tag{3.19}$$

$$x'_P = \gamma\,(x_P - v\,t_P) \tag{3.20}$$

Bei der Berechnung ergeben sich folgende Werte

Ruhendes System	Bewegtes System
$x_P = 3$	$x'_P = 2{,}309$
$ct_P = 2$	$ct'_P = 0{,}577$

Die Gleichungen (3.16) und (3.20) entsprechen genau den Beziehungen der Lorentz-Transformation, wie sie bereits in Gl. (1.01) und (1.02) dargestellt wurden. Damit ist also gezeigt, dass diese Gleichungen durch Aufstellung von einfachen geometrischen Beziehungen aus einem Minkowski-Diagramm abgeleitet werden können.

3.3.2 Algebraisches Konzept zur Ableitung der Lorentz-Transformation

Zur Vervollständigung der Überlegungen zur Lorentz-Transformation soll hier auch eine „klassische", d. h. eine in der Literatur übliche algebraische Ableitung dargestellt werden. Es wurde hier eine Darstellung von H. J. Lüdde und T. Rühl gewählt [34], da diese sehr allgemein gehalten ist und bei der Ableitung keine Annahmen getroffen werden müssen, die sich erst im Nachhinein als sinnvoll erweisen. Auch Einstein hat bereits 1905 eine vergleichbare Ableitung genutzt, allerdings spricht er nur von „einfacher Rechnung" ohne diese näher zu erläutern [12b].

Zunächst werden zwei Systeme betrachtet, die sich relativ zueinander bewegen. Es handelt sich dabei um Inertialsysteme, d. h. Beschleunigungen und Rotation sind ausgeschlossen. Die Koordinaten werden jeweils durch drei Raum- und eine Zeitkoordinate beschrieben. Für System S sind dies x, y, z, t und System S′ enthält $x', y,' z', t'$. Es wird angenommen, dass diese Systeme sich bezogen auf die x-Koordinaten mit der Geschwindigkeit v gegeneinander bewegen, in y- und z-Richtung findet keine Bewegung statt.

Zunächst wird die Situation betrachtet, dass die Ursprungskoordinaten (d. h. die „Nullpunkte") beider Systeme sich zum definierten Zeitpunkt

$$t = t' = 0 \tag{3.40}$$

treffen. Daraus ergibt sich wegen der vorausgesetzten Linearität eine Beziehungskombination der Form

$$x' = Ax + Bt, \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = Cx + Dt \tag{3.41}$$

Dies bedeutet, dass t nicht mehr als invariant zum Raum und x nicht mehr als invariant gegenüber der Zeit angesehen werden darf. Daraus folgt für eine beliebige Kugelschale mit einer Lichtquelle im Zentrum die Gültigkeit folgender Beziehungen

$$S: \quad x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \tag{3.42}$$

$$S': \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2 \tag{3.43}$$

Daraus folgt

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 \tag{3.44}$$

Zur Auflösung wird zunächst die Systemgeschwindigkeit betrachtet. Vom System S′ wird die Geschwindigkeit des Systems S als

$$v = \frac{x}{t} \tag{3.45}$$

bestimmt. Betrachtet man die Situation, dass sich die Systeme im Ursprung passieren, so entsteht aus Gl. (3.41)

$$0 = Avt + Bt \tag{3.46}$$

bzw.

$$B = -Av \tag{3.47}$$

Setzt man die in Gl. (3.44) definierten Beziehungen ein, so ergibt sich

$$(Ax + Bt)^2 - c^2(Cx + Dt)^2 = x^2 - c^2t^2 \tag{3.48}$$

mit

$$x^2(A^2 - c^2D^2 - 1) + 2xt(AB - c^2CD) + t^2(B^2 - c^2D^2 + c^2) = 0 \tag{3.49}$$

Da die Gleichungen (3.48) und (3.49) für beliebige Orte und Zeiten gelten, erhält man die folgenden Beziehungen:

$$A^2 - c^2C^2 - 1 = 0 \tag{3.50}$$

$$AB - c^2CD = 0 \tag{3.51}$$

$$B^2 - c^2D^2 + c^2 = 0 \tag{3.52}$$

Die Lösung dieses Systems aus 4 Gleichungen mit 4 Unbekannten [Gl. (3.47) sowie die Gl. (3.50) - (3.52)] führt zum Ergebnis

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \tag{3.53}$$

$$x' = \gamma(x - vt) \tag{3.54}$$

Die y- und z-Komponenten ändern sich nicht.

Die hier dargestellte Ableitung entspricht ebenfalls den bekannten Zusammenhängen der Lorentz-Transformation. Die Resultate bezüglich Zeitdilatation, Längenkontraktion und asynchroner Ortszeit ergeben sich in der Folge als Konsequenz aus den Zusammenhängen. Dies steht im Gegensatz zu den zuvor abgeleiteten Beziehungen, bei denen ein grafischer Ansatz benutzt wurde. Zeitdilatation und Längenkontraktion waren hier Voraussetzungen und keine Ergebnisse der Berechnungen.

Es ist abschließend die Frage zu beantworten, welche Bedeutung das Ergebnis für die Interpretation der Gegebenheiten hat. In Kap. 2.2 wurde bereits ausführlich dargestellt, dass es für ruhende und bewegte Beobachter unmöglich ist aufgrund eines Signalaustauschs auf ihren Bewegungszustand zu schließen. Dies wird durch das gleichzeitige Auftreten von Zeitdilatation und Längenkontraktion hervorgerufen.

Es ist jedoch keineswegs der Fall, dass ein ruhender Beobachter für das bewegte System eine veränderte Lichtgeschwindigkeit feststellt und er wird dort auch weiterhin die Lichtgeschwindigkeit seines Systems zugrunde legen. Die Tatsache, dass der bewegte Beobachter bei einem Signalaustausch innerhalb seines Systems zu den gleichen Ergebnissen kommt wie im Ruhezustand, ist ausschließlich auf die Synchronisationsdifferenz zwischen den Systemen zurückzuführen. Diese Frage wird im Kap. 11 erneut aufgegriffen.

3.4 Einstein Synchronisation

Erstmalig wird diese Form der Synchronisation in der bahnbrechenden Veröffentlichung von Albert Einstein im Jahre 1905 genutzt [12]. Zur Verdeutlichung ist hier in Abb. 3.5 ein Auszug aus der Originalliteratur wiedergegeben, in dem die Lorentz-Transformation abgeleitet wird. Hierbei ist insbesondere die Gleichung

$$\frac{1}{2}(\tau_0 + \tau_2) = \tau_1 \tag{3.60}$$

von Bedeutung. Die Zeiten im bewegten System werden heute üblicherweise mit t' und nicht mit τ gekennzeichnet (außerdem wird heute die Lichtgeschwindigkeit mit c bezeichnet, nicht V). Eine aktuelle Darstellung für Gl. (3.60) erhält somit die Form

$$\frac{1}{2}(t'_0 + t'_2) = t'_1 \tag{3.61}$$

Eine Besonderheit der hier gewählten Beziehung ist die Tatsache, dass die Synchronisation ausschließlich aufgrund der ausgetauschten Signale erfolgt.

Eine sich daraus ergebende Synchronisationsvorschrift lässt sich allgemein folgendermaßen formulieren:

> In einem gegebenen Inertialsystem befindet sich im Koordinaten-Ursprung eine ruhende Uhr U(0). An einem anderen Punkt x befindet sich eine gleichartige Uhr U(x). In dem Augenblick, da U(0) die Zeit t_0 anzeigt, wird von dort ein Lichtsignal ausgesandt das zum Punkt x läuft, dort reflektiert wird und dann wieder im Koordinaten-Ursprung bei der Uhr U(0) ankommt, wenn diese die Zeit t_2 anzeigt. U(x) gilt als synchronisiert mit U(0), wenn U(x) im Augenblick der Reflektion die folgende Zeit anzeigt:

$$t_1 = t_0 + \frac{1}{2}(t_2 - t_0) \tag{3.62}$$

Das Ergebnis der Gleichung Gl. (3.62) ist identisch mit Gl. (3.60) bzw. (3.61). Dies gilt auch unabhängig davon, ob die Uhren unbewegt oder bewegt sind (d. h. es ist eine Darstellung mit t oder t' möglich).

Zu jedem Wertsystem x, y, z, t, welches Ort und Zeit eines Ereignisses im ruhenden System vollkommen bestimmt, gehört ein jenes Ereignis relativ zum System k festlegendes Wertsystem ξ, η, ζ, τ, und es ist nun die Aufgabe zu lösen, das diese Größen verknüpfende Gleichungssystem zu finden.

Zunächst ist klar, daß die Gleichungen *linear* sein müssen wegen der Homogenitätseigenschaften, welche wir Raum und Zeit beilegen.

Setzen wir $x' = x - vt$, so ist klar, daß einem im System k ruhenden Punkte ein bestimmtes, von der Zeit unabhängiges Wertsystem x', y, z zukommt. Wir bestimmen zuerst τ als Funktion von x', y, z, und t. Zu diesem Zwecke haben wir in Gleichungen auszudrücken, daß τ nichts anderes ist als der Inbegriff der Angaben von im System k ruhenden Uhren, welche nach der in § 1 gegebenen Regel synchron gemacht worden sind.

Vom Anfangspunkt des Systems k aus werde ein Lichtstrahl zur Zeit τ_0 längs der X-Achse nach x' gesandt und von dort zur Zeit τ_1 nach dem Koordinatenursprung reflektiert, wo er zur Zeit τ_2 anlange; so muß dann sein:

$$\frac{1}{2}(\tau_0 + \tau_2) = \tau_1$$

oder, indem man die Argumente der Funktion τ beifügt und das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit im ruhenden System anwendet:

$$\frac{1}{2}\left[\tau(0,0,0,t) + \tau\left(0,0,0,\left\{t + \frac{x'}{V-v} + \frac{x'}{V+v}\right\}\right)\right]$$
$$= \tau\left(x', 0,0, t + \frac{x'}{V-v}\right)$$

Hieraus folgt, wenn man x' unendlich klein wählt:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{V-v} + \frac{1}{V+v}\right)\frac{\partial\tau}{\partial t} = \frac{\partial\tau}{\partial x'} + \frac{1}{V-v}\frac{\partial\tau}{\partial t}$$

oder

$$\frac{\partial\tau}{\partial x'} + \frac{v}{V^2 - v^2}\frac{\partial\tau}{\partial t} = 0$$

Es ist zu bemerken, daß wir statt des Koordinatenursprunges jeden anderen Punkt als Ausgangspunkt des Lichtstrahles hätten wählen können und es gilt deshalb die eben erhaltene Gleichung für alle Werte von x', y, z.

Abb. 3.5 Auszug aus der Originalliteratur von Albert Einstein [12a]

Die in diesen Gleichungen getroffene Festlegung sagt noch nichts darüber aus, ob sie auch bei einem späteren Zeitpunkt erhalten bleibt oder nur einmalig gilt. Prinzipiell können folgende Konstellationen auftreten:

a) U(x) verbleibt unbewegt gegenüber U(0)

b) U(x) passiert U(0) in nächster Nähe, synchronisiert und entfernt sich dann wieder

c) U(x) passiert U(0) in weiter Entfernung ohne direkten Kontakt

Für Situation a) gilt, dass der Faktor γ für beide Uhren identisch ist, daher ist die Synchronisation beliebig mit gleichem Ergebnis wiederholbar. Die Fälle b) und c) entsprechen den Situationen in Kap. 2.1.1 bzw. Kap. 2.1.2. In beiden Fällen wurde festgestellt, dass sich unabhängig vom Abstand keine Unterschiede feststellen lassen. Die einzige Voraussetzung ist die Zugrundelegung der Lorentz-Gleichungen.

Bei genauer Interpretation der Situation wird klar, dass für einen Beobachter, dem diese Informationen mit Überlichtgeschwindigkeit übermittelt würden, Unterschiede feststellbar wären. Da dies aber gemäß den Annahmen unmöglich ist, kann ein solcher Fall nicht auftreten und Synchronisationsunterschiede sind prinzipiell nicht feststellbar. Wie bereits erwähnt wird dies auch als „Relativität der Gleichzeitigkeit" bezeichnet.

Neuere Darstellungen zur Ableitung der Lorentz-Gleichungen enthalten die im Jahr 1905 von Einstein gewählte Form meistens nicht mehr. Stattdessen wird oft eine Darstellung unter Nutzung der Gl. (3.42) und (3.43) verwendet (vgl. auch Kap. 3.3.2)

$$S: \quad x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \tag{3.42}$$

$$S': \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \tag{3.43}$$

Das Gleichungssystem lässt sich so interpretieren, dass der Übergang von Gl. (3.42) auf Gl. (3.43) der Einstein-Synchronisation entspricht und diese implizit enthält. Einstein selbst hat in seinem „gemeinverständlichen" Buch über die Relativitätstheorie, mit erster Auflage von 1916, die Erklärung über den Systemvergleich vorgenommen [29]; offensichtlich hat auch er diesen Ansatz für leichter verständlich gehalten.

Bei der später allgemein als Einstein-Synchronisation bezeichneten Vorschrift in Gl. (3.62) handelt es sich um eine Definition, keine Beobachtung. Die Einstein-Synchronisation ist von außerordentlicher Bedeutung für die Spezielle Relativitätstheorie und wird vielfach diskutiert [z. B. 19,20,35]. Nach Darstellung weiterer wichtiger Gesichtspunkte wird sie daher auch in dieser Ausarbeitung in Kap. 11.2 noch genauer betrachtet.

4. Weiterführende Betrachtungen für bewegte Beobachter

Die bisher diskutierten Zusammenhänge lassen sich von zwei auf mehrere Beobachter erweitern. Hierbei ist zunächst die Geschwindigkeitsaddition zu betrachten, die im relativistischen Fall nicht der einfachen Aufsummierung gemäß der Galilei-Transformation folgt. Außerdem gibt es besondere Zusammenhänge für Ausbreitungsarten unterhalb der Lichtgeschwindigkeit, wie sie z. B. in transparenten Medien und bei der Schallübertragung auftreten. Allgemein gilt dies auch bei der Beschleunigung von Körpern, da diese nicht als absolut starr angesehen werden dürfen.

Des Weiteren wird noch der Fall diskutiert, wenn eine Signalübertragung innerhalb eines bewegten Körpers nicht nur in Längsrichtung, sondern zusätzlich auch quer dazu erfolgt.

4.1 Relativistische Geschwindigkeitsaddition

Das Additionstheorem von Geschwindigkeiten im relativistischen Fall wurde bereits im Jahre 1905 von A. Einstein abgeleitet [12]. Hierbei wird die Annahme gemacht, dass sich in einem System S', dass mit der Geschwindigkeit v entlang der x-Achse gegenüber einem Referenzsystem S ein Körper gemäß den Gleichungen

$$x' = w_x' t' \tag{4.01}$$

$$y' = w_y' t' \tag{4.02}$$

$$z' = 0 \tag{4.03}$$

bewegt, wobei w_x' und w_y' die Geschwindigkeitskomponenten in x' bzw. y'-Richtung sind. Gesucht wird nun die Bewegung zum Ursprungs-Referenzsystem S. Das Koordinatensystem wird dabei so gewählt, dass alle Punkte auf der $x - y$ Ebene liegen und die Koordinate z' unberücksichtigt bleiben kann.

Die Lorentz-Gleichungen lauten demnach

$$x' = \gamma(x - vt) \tag{4.04}$$

$$y' = y \tag{4.05}$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \tag{4.06}$$

Verhalten in x-Richtung

Werden Gl. (4.04) und Gl. (4.06) in Gl. (4.01) eingesetzt folgt sofort

$$\gamma(x - vt) = w_x' \cdot \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \tag{4.07}$$

mit

$$x = \frac{w_x' + v}{1 + \frac{vw_x'}{c^2}} \cdot t \tag{4.08}$$

Verhalten in y-Richtung

Zur Ermittlung werden nacheinander die Gleichungen (4.02), (4.06) und (4.08) in Gl. (4.05) eingesetzt

$$y = y' = w_y'\gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \tag{4.09}$$

$$y = w_y'\gamma\left(t - \frac{v}{c^2} \cdot \frac{w_x' + v}{1 + \frac{vw_x'}{c^2}} \cdot t\right) \tag{4.10}$$

und daraus ergibt sich

$$y = w_y'\gamma \, \frac{1 + \frac{vw_x'}{c^2} - \frac{vw_x'}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}}{1 + \frac{vw_x'}{c^2}} \cdot t \tag{4.11}$$

$$y = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{vw_x'}{c^2}} \, w_y' t \tag{4.12}$$

Wegen der Linearität der Beziehungen folgt auf einfache Weise aus den Gleichungen (4.08) und (4.12) die Abhängigkeit für die Geschwindigkeiten

$$\frac{dx}{dt} = w_x = \frac{w_x' + v}{1 + \frac{vw_x'}{c^2}} \tag{4.13}$$

$$\frac{dy}{dt} = w_y = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{vw_x'}{c^2}} \, w_y' \tag{4.14}$$

In einem abschließenden Schritt werden die Winkel der Komponenten in Bezug auf die x-Achse eingesetzt:

$$w'_x = w \cdot cos\,\alpha \tag{4.15}$$

$$w'_y = w \cdot sin\,\alpha \tag{4.16}$$

und über die Beziehung

$$v_T = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} \tag{4.17}$$

vektoriell addiert. Es ergibt sich

$$v_T = \sqrt{\left(\frac{w\,cos\,\alpha + v}{1 + \frac{v\,w\,cos\,\alpha}{c^2}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v\,w\,cos\,\alpha}{c^2}}\,w\,sin\,\alpha\right)^2} \tag{4.18}$$

für die Gesamtgeschwindigkeit v_T im System S und nach Umformung unter Nutzung der Beziehung

$$cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1 \tag{4.19}$$

folgt das Endergebnis

$$v_T = \frac{\sqrt{v^2 + w^2 + 2\,v\,w\,cos\alpha - \left(\frac{v\,w\,sin\alpha}{c}\right)^2}}{1 + \frac{v\,w\,cos\alpha}{c^2}} \tag{4.20}$$

Liegen die Geschwindigkeiten v und w in einer Richtung, d. h. Winkel $\alpha = 0$, dann vereinfacht sich Gl. (4.20) zu

$$v_T = \frac{v + w}{1 + \frac{v\,w}{c^2}} \tag{4.21}$$

Wird diese Situation mit ausgesendeten Signalen und deren Empfang grafisch in einem Weg-Zeit-Diagramm dargestellt, so ergibt sich die in Abb. 4.1 abgebildete Situation. Dabei ist auf der linken Seite der Fall wiedergegeben, bei dem sich der Sender in Ruhe befindet. Die Empfänger, die außerdem die Signale unmittelbar reflektieren, bewegen sich jeweils mit gleicher Geschwindigkeit (hier: $v = w = 0{,}5c$) von diesem fort. Auf der rechten Seite wird dargestellt, wie sich dieser Sachverhalt aus der Sicht eines der zuvor als bewegt angenommenen Versuchsteilnehmers darstellt (hier B). Der Sender entfernt sich in diesem Fall mit gleicher Geschwindigkeit, der dritte Versuchsteilnehmer hat eine Geschwindigkeit gemäß der Gleichung (4.21) von $v_T = 0{,}8c$. Eine vergleichbare Situation ergibt sich, wenn Beobachter C als ruhend angenommen wird.

Zur Verdeutlichung des Sachverhaltes sind für die Zeiten $t = 1\,ZE$ und $t = 2\,ZE$ die sich ergebenden Verläufe im Weg-Zeit-Diagramm (Abb. 4.1) durch Schattierung gekennzeichnet. In dieser Darstellung ist klar erkennbar, dass aus Sicht des Senders, unabhängig von der Geschwindigkeit eines Beobachters stets die gleichen Messergebnisse ermittelt werden.

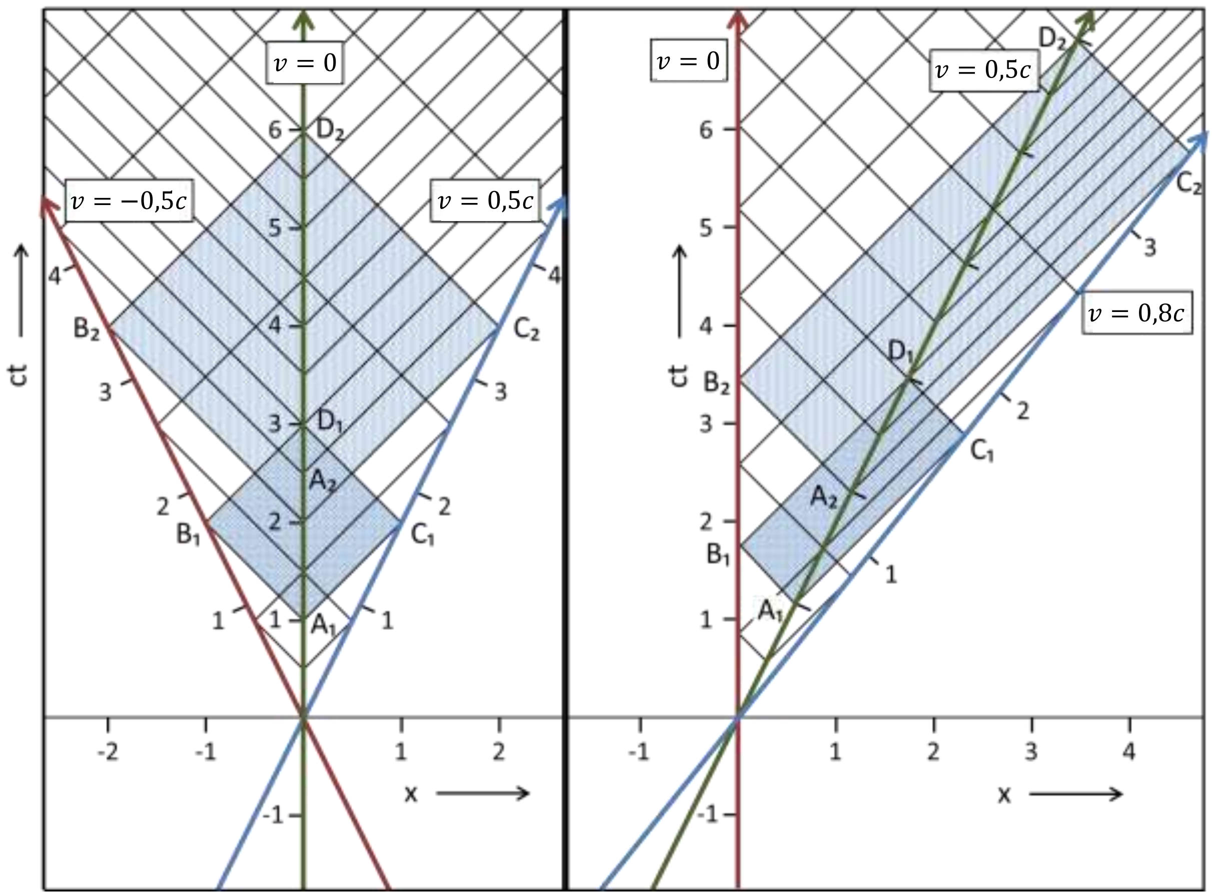


Abb. 4.1: Weg-Zeit-Diagramm für ruhende und bewegte Beobachter

4.2 Experimente mit Licht in transparenten bewegten Medien

Im Folgenden wird zunächst eine weitere Variante des Falls in Kapitel 2.2.2 diskutiert. Hierbei wird statt eines Lichtimpulses ein Körper in und entgegengesetzt zur ursprünglichen Bewegungsrichtung bewegt. Zusammen mit einem Lichtimpuls ergeben sich folgende mögliche Kombinationen:

A: Lichtimpuls hin und zurück,

B: Körper bewegt sich hin, Lichtimpuls zurück,

C: Lichtimpuls hin, Körper bewegt sich zurück,

D: Körper bewegt sich hin und zurück.

In der Abb. 4.2 sind die sich ergebenden Zusammenhänge für den Fall $v = 0{,}5\ c$ dargestellt. Wie bereits gezeigt wurde werden Geschwindigkeiten im relativistischen Bereich gemäß Gleichung (4.21) addiert. Für die gewählte Systemgeschwindigkeit von $v_1 = 0{,}5\ c$ und einer zusätzlichen Geschwindigkeit des Körpers von $v_2 = 0{,}5\ c$ ergibt sich somit $v_T = 0{,}8\ c$.

Es ist bereits an diesem Schaubild qualitativ zu erkennen, dass die Fälle B und C, d. h. die Kombinationen von bewegtem Körper und Lichtimpuls zum gleichen Zeitpunkt enden. Die weiterführenden Auswertungen zeigen, dass dies auch quantitativ gezeigt werden kann.

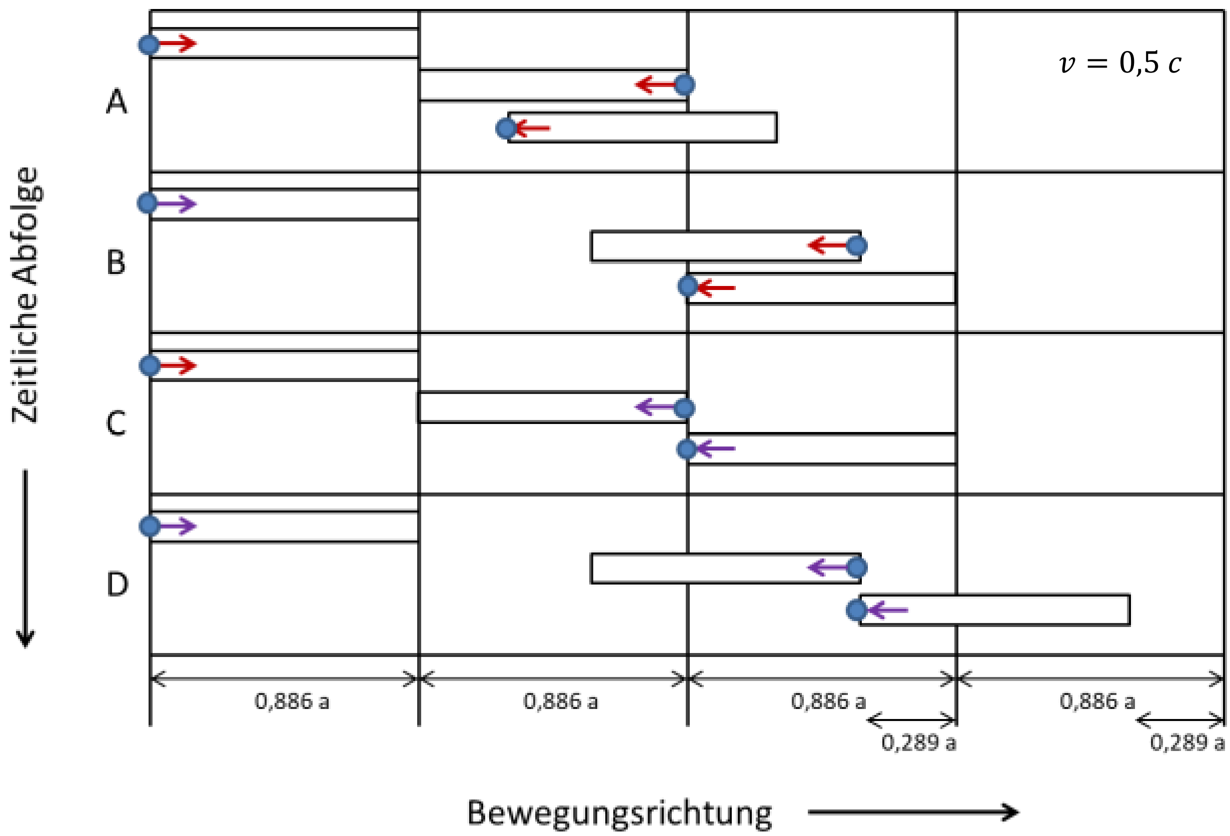


Abb. 4.2: Signalaustausch sowie Körperbewegungen in bewegtem System
A: Lichtimpuls hin und zurück,
B: Körper bewegt sich hin, Lichtimpuls zurück,
C: Lichtimpuls hin, Körper bewegt sich zurück,
D: Körper bewegt sich hin und zurück.

Eine Versuchsdurchführung mit bewegten Körpern in Kombination mit dem Austausch von Lichtimpulsen wäre aufgrund der erforderlichen hohen Geschwindigkeiten kaum realisierbar. Eine experimentelle Überprüfung kann jedoch mit optischen Hilfsmitteln durchgeführt werden. Die Lichtgeschwindigkeit in Medien c_n ist gegeben durch

$$c_n = \frac{c}{n} \tag{4.30}$$

mit n als Brechungsindex. Von Augustin Jean Fresnel wurde bereits im Jahr 1812 die Hypothese aufgestellt, dass die Lichtgeschwindigkeit in einem bewegten Medium sich gemäß dem später nach ihm benannten Mitführungskoeffizienten verhält. In einem bewegten Lichtleiter beträgt demnach die Lichtgeschwindigkeit gegenüber einem ruhenden Beobachter

$$c_T = \frac{c}{n} + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \tag{4.31}$$

Dieser Sachverhalt wurde dann im Jahr 1851 von H. Fizeau (1819-1896) experimentell bestätigt. Nach der Entwicklung der Lorentz-Transformation konnte gezeigt werden, dass sich die Addition der Geschwindigkeiten eines bewegten Mediums und die darin erfolgende Lichtausbreitung c_n wie die Addition relativistischer Geschwindigkeiten verhält [36].

Diese berechnet sich gemäß Gl. (4.21)

$$v_T = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \tag{4.32}$$

Mit $v_1 = c_n$ ergibt sich

$$v_T = \frac{\frac{c}{n} + v_2}{1 + \frac{v_2}{nc}} = \frac{c^2 + ncv_2}{nc + v_2} \tag{4.33}$$

Eine Taylorentwicklung nach v_2 ergibt

$$v_T = \frac{c}{n} + v_2\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) - \frac{v_2^2}{nc}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + \frac{v_2^3}{n^2c^2}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) - +\ldots \tag{4.34}$$

Für Größen erster Ordnung ist diese Gleichung identisch mit der in Gl. (4.31) angegebenen Beziehung.

Eine Berechnung mit den Lorentz-Transformationsgleichungen gemäß der Situation in Abb. 4.2 führt zu dem in Tab. 4.1 dargestellten Ergebnis. In Abb. 4.3 sind diese Daten grafisch zusammengestellt. Wie zu erwarten, liegen alle Werte nach Abschluss der Aktion auf der ct'- Linie. Es ist darüber hinaus zu erkennen, dass die Transformationsgleichungen die erwarteten Zusammenhänge exakt beschreiben und es zu keinem Widerspruch kommt.

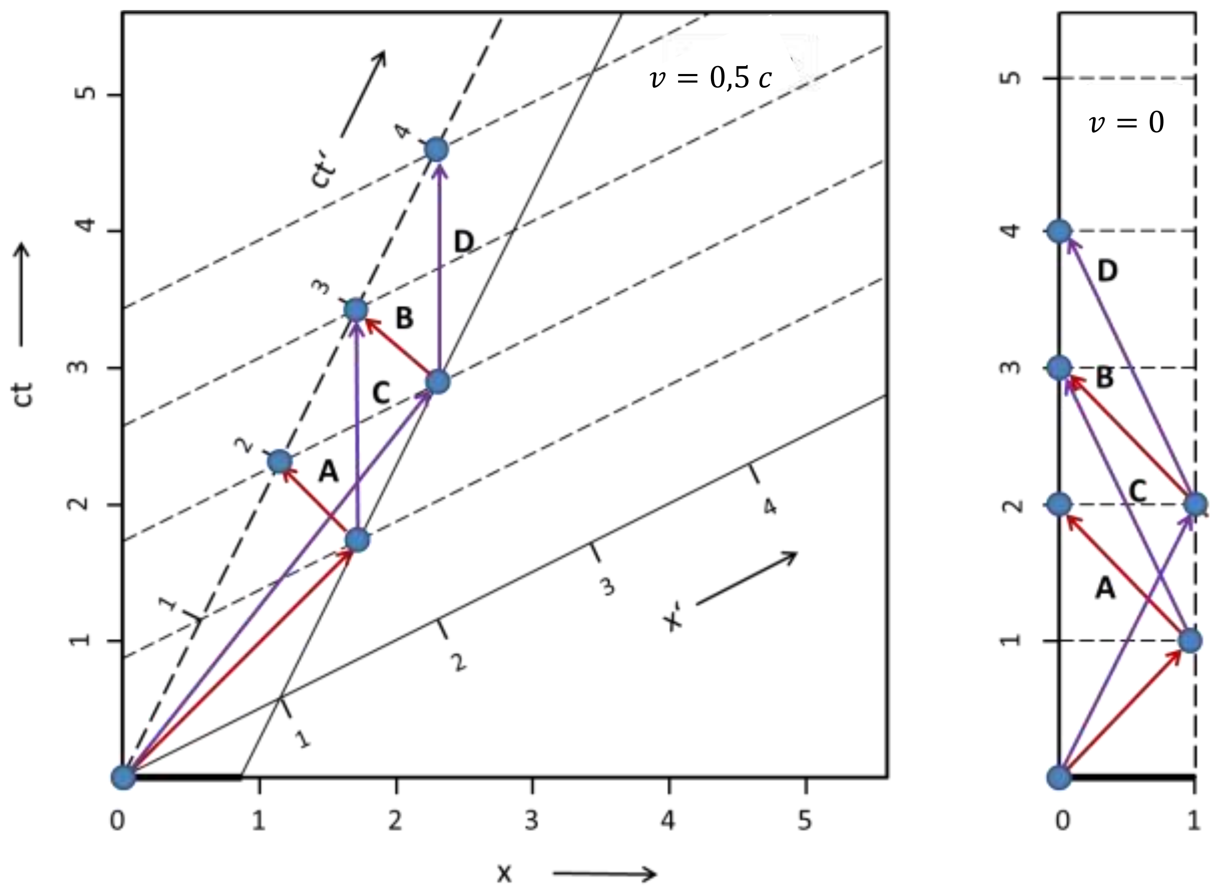


Abb. 4.3: Minkowski-Diagramm für Fälle A, B, C und D gemäß Abb. 4.2. Links: bewegt ($v = 0{,}5\,c$), rechts: unbewegt ($v = 0$)

Fall	E_0	E_0'	E_1	E_1'	E_2	E_2'
A	$[0;0]$	$[0;0]$	$[1{,}73;1{,}73]$	$[1;1]$	$[1{,}15;2{,}31]$	$[0;2]$
B	$[0;0]$	$[0;0]$	$[2{,}31;2{,}89]$	$[1;2]$	$[1{,}73;3{,}46]$	$[0;3]$
C	$[0;0]$	$[0;0]$	$[1{,}73;1{,}73]$	$[1;1]$	$[1{,}73;3{,}46]$	$[0;3]$
D	$[0;0]$	$[0;0]$	$[2{,}31;2{,}89]$	$[1;2]$	$[2{,}31;4{,}62]$	$[0;4]$

Tab. 4.1 Berechnete Werte für den in Abb. 4.2 dargestellten Signalaustausch

Die Gültigkeit der Gleichungen Gl. (4.34) bzw. Gl. (4.31) wurde vielfach experimentell überprüft, zunächst von H. Fizeau mit strömendem Wasser und später u. a. von R. V. Jones an rotierenden transparenten Scheiben [37,38]. Der hier dargestellte Effekt gehört heute zu den wichtigen Grundlagen der Optik und auch der Relativitätstheorie.

4.3 Ansteuerung von Aggregaten nach Synchronisation

Wie bereits ausführlich dargestellt und mit verschiedenen Beispielen belegt wurde, sind bei rein kinematischer Betrachtung innerhalb eines Systems nach einer „Einstein-Synchronisation“ keine Widersprüche festzustellen. Ähnlich sieht dies aus, wenn die verwendeten Signale nicht nur zum Synchronisieren von Uhren, sondern auch zum Ansteuern von Aggregaten genutzt werden, die auf die Bewegung des Labors Einfluss haben. Hierzu sei die folgende Situation gewählt:

1. Von der Mitte eines Labors werden gleichzeitig Signale in beide Richtungen (A und B) ausgesendet.
2. Bei Empfang des Signals wird über ein Triebwerk unmittelbar eine Beschleunigung quer zur Signalrichtung ausgelöst. Die Beschleunigungsrichtung für A und B liegt in der gleichen Ebene.
3. Die Versuche werden im ruhenden und im bewegten Zustand durchgeführt.

Zunächst ist klar ersichtlich, dass A und B im Ruhezustand (Abb. 4.4, rechtes Bild) gleichzeitig die Triebwerke starten werden. Dies ist für das bewegte System jedoch nicht der Fall. Während der bewegte Beobachter nach einer zuvor durchgeführten Synchronisierung von einer gleichen Startzeit ausgehen muss, wird aus Sicht des ruhenden Beobachters aufgrund der längeren Laufzeit zum Punkt A´ als zum Punkt B´ das Triebwerk bei B´ zuerst starten. Durch die gewählte Beschleunigung quer zur Bewegungsrichtung wird nach dieser Betrachtung ein Moment erzeugt und das Labor müsste sich drehen.

In der Literatur sind derartige Fälle schön häufiger diskutiert worden. Von M. Born wurde als erster hierzu ein ähnlicher Ansatz gemacht und im Rahmen von Überlegungen zur Elektrodynamik angenommen, dass ein zu betrachtender Körper (hier das Labor) unendlich starr sein müsste und es so zu Konflikten kommt [39]. Diese auch als „Born´-sche Starrheit“ bezeichnete Voraussetzung kann jedoch nicht als gegeben angesehen werden, da z. B. alle realen Körper endliche Schallgeschwindigkeiten aufweisen. Von A. Sommerfeld wurde dies ausführlich dargestellt [15d].

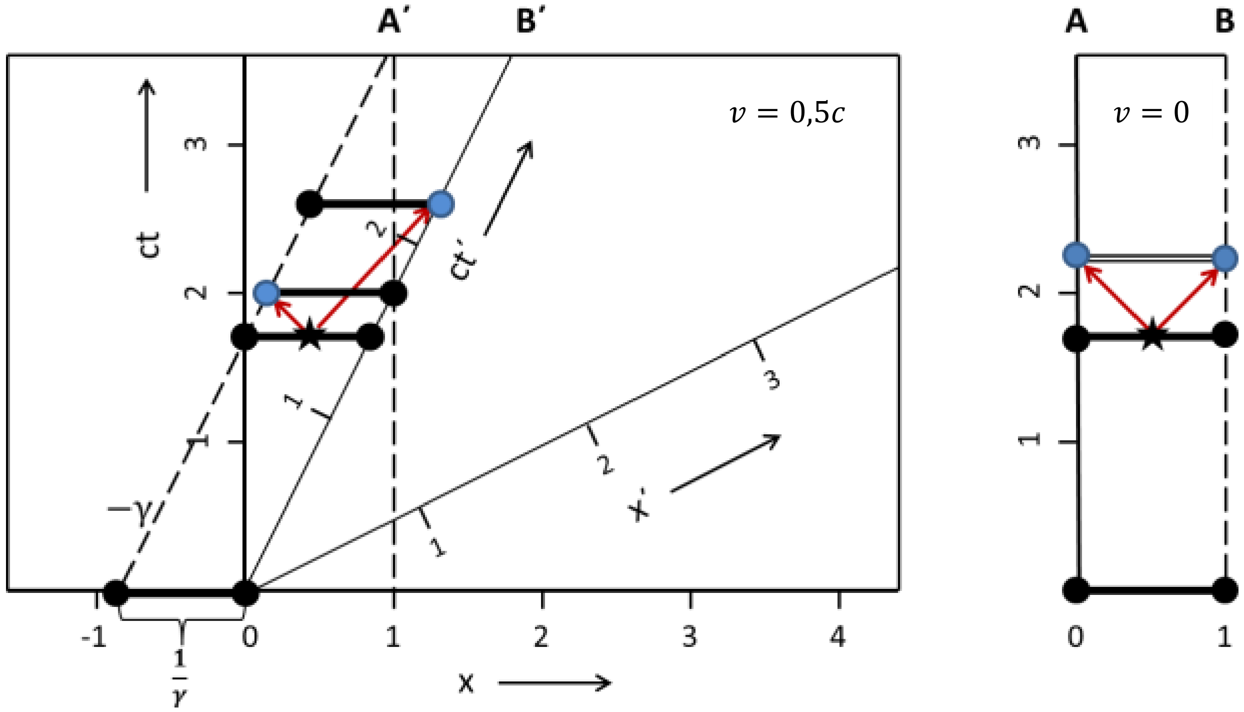


Abb.: 4.4: Signalverlauf zur Ansteuerung eines Triebwerks quer zum eingehenden Signal (hier: $v = 0{,}5\ c$). Links bewegtes System, rechts unbewegt

Betrachtet man daher die Ausbreitung der Bewegung in der Form, dass sie mit Schallgeschwindigkeit (oder auch mit einer beliebigen anderen Geschwindigkeit bis hin zu c) erfolgt, so ergibt sich durch die Geschwindigkeitsaddition ein vergleichbarer Fall, wie er auch in Kap. 4.2 betrachtet wird. Die quer zur Bewegungsrichtung erfolgenden Bewegungsänderungen kommen gleichzeitig in der Mitte an und es wird daher kein Drehmoment auftreten.

4.4 Signalaustausch zwischen räumlich ausgedehnten Körpern

Bisher wurde der Signalaustausch zwischen Körpern betrachtet, die nur eine Ausdehnung in Bewegungsrichtung aufwiesen. Ein neuer Versuchsaufbau erfolgt vergleichbar zu den in Kap. 2.2.2 dargestellten Bedingungen. Allerdings haben hier die beteiligten Labore keine lineare Ausdehnung, sondern die Form von gleichseitigen Dreiecken.

Die Signale werden somit nicht in Längsrichtung, sondern in einem Winkel von 60° dazu ausgesandt (vgl. Abb. 4.5). Sobald sich die Beobachter der beiden Systeme bei A, B, bzw. A′ und B′ begegnen, werden von hier Signale an C bzw. C′ abgeschickt. C bzw. C′ reflektieren die Signale an den jeweiligen Absender und alle Zeiten werden aufgezeichnet. Für einen ruhenden Beobachter ist die Situation des bewegten Systems nach den in Abb. 4.6 gegebenen Zusammenhängen bestimmt. Zunächst ist bedeutsam, dass die Grundlinie des gleichseitigen Dreiecks mit der Länge a sich durch die Bewegung um den Faktor γ verkürzt, was zu dem Effekt führt, dass es 4 Kontakte zwischen den Ecken der Dreiecke gibt (Abb. 4.6, links). Dabei stellen die gestrichelten Linien die Sichtweise des bewegten Beobachters dar, während der ruhende Beobachter den Signalverlauf entsprechend der Länge d wahrnimmt (Abb. 4.6, rechts).

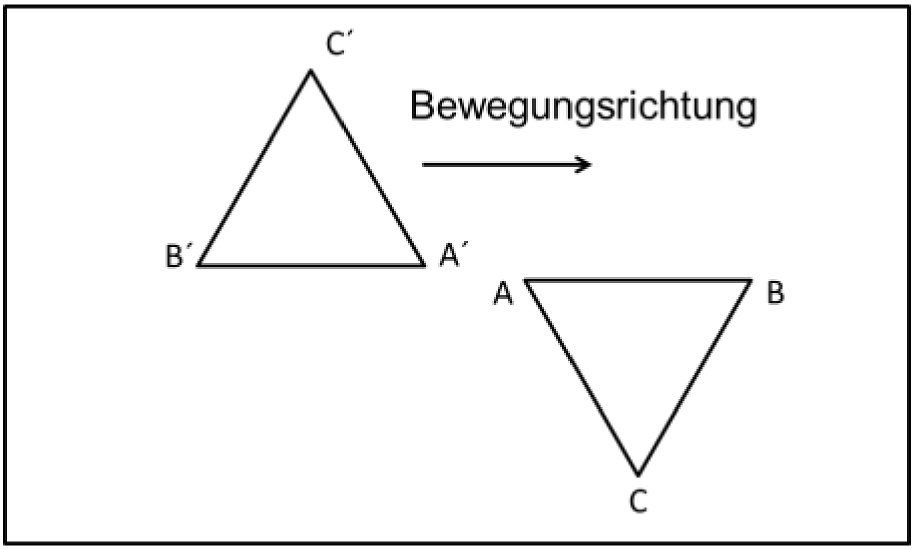


Abb. 4.5: Aufbau für Versuche mit räumlich ausgedehnten Körpern

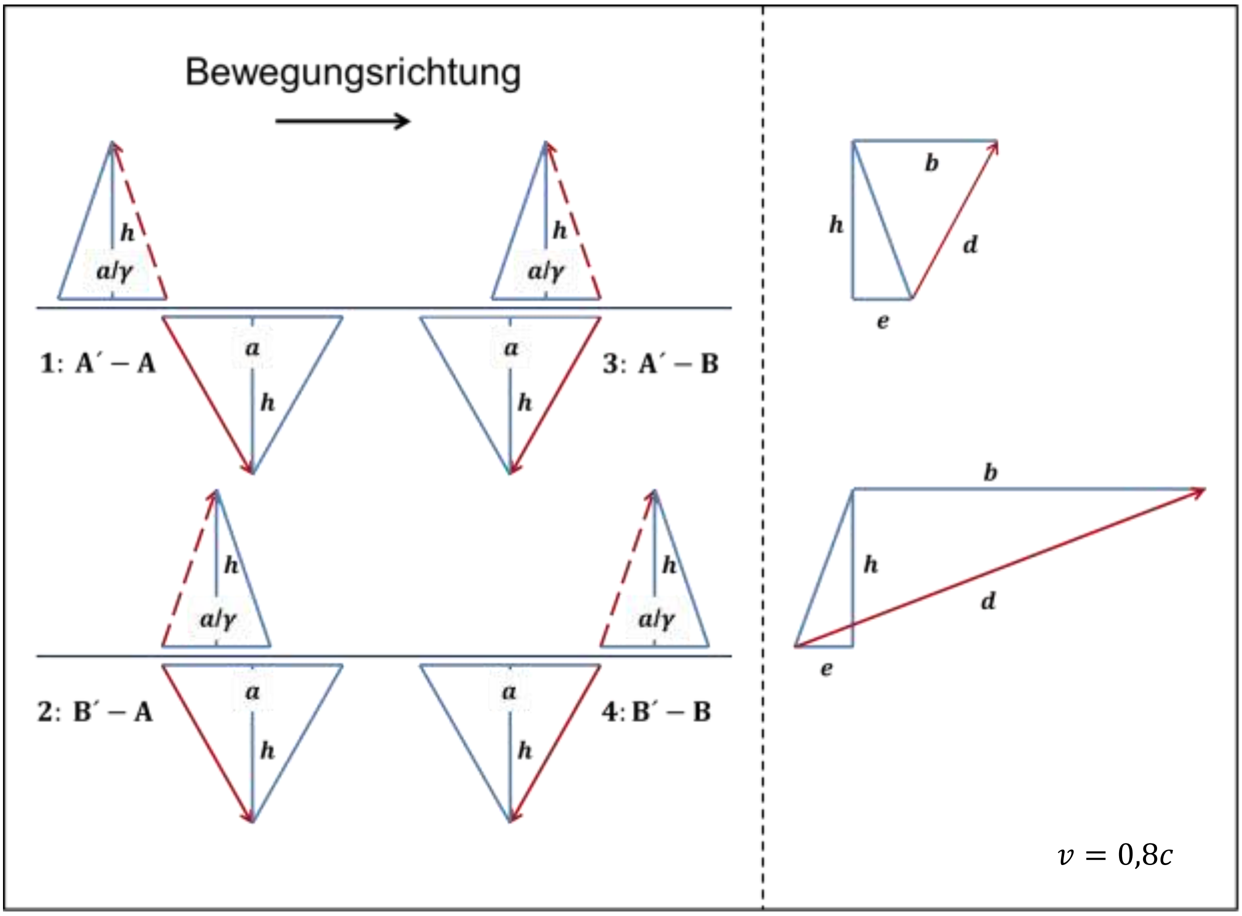


Abb. 4.6: Kontaktsituationen und daraus folgende geometrische Abhängigkeiten.

Zur Berechnung des Wegs d für die Abstrahlung von A′ nach C′ (Fälle 1 und 3) wird der Satz des Pythagoras verwendet

$$(b-e)^2 + h^2 = d^2 \tag{4.40}$$

und es gilt die zusätzliche Beziehung

$$\frac{b}{d} = \frac{v}{c} \tag{4.41}$$

Daraus folgt

$$\left(d\frac{v}{c} - \frac{a}{2\gamma}\right)^2 + \frac{3}{4}a^2 = d^2 \tag{4.42}$$

und nach Umformung

$$d_{1/2} = -a\gamma\left(\frac{v}{2c} \pm 1\right) \tag{4.43}$$

Für den Fall, dass das Signal von B′ nach C′ abgestrahlt wird (Fälle 2 und 4) ergibt sich

$$(b + e)^2 + h^2 = d^2 \tag{4.44}$$

und

$$d_{1/2} = a\gamma\left(\frac{v}{2c} \pm 1\right) \tag{4.45}$$

Es werden nur Ergebnisse mit positivem Vorzeichen berücksichtigt, daher gilt

$$\mathrm{A}' \to \mathrm{C}': \qquad \frac{d}{a} = \gamma\left(1 - \frac{v}{2c}\right) \tag{4.46}$$

$$\mathrm{B}' \to \mathrm{C}': \qquad \frac{d}{a} = \gamma\left(1 + \frac{v}{2c}\right) \tag{4.47}$$

Wir die Zeit auf 1 normiert, so ergeben sich die Zeiten

$$t_{\mathrm{A}' \to \mathrm{C}'} = \gamma\left(1 - \frac{v}{2c}\right) \tag{4.48}$$

$$t_{\mathrm{B}' \to \mathrm{C}'} = \gamma\left(1 + \frac{v}{2c}\right) \tag{4.49}$$

Für die Berechnung von zurückgesendeten Signalen folgt sofort aus Symmetriegründen

$$t_{C' \to B'} = t_{\mathrm{A}' \to \mathrm{C}'} = \gamma\left(1 - \frac{v}{2c}\right) \tag{4.50}$$

$$t_{\mathrm{C}' \to A'} = t_{\mathrm{B}' \to \mathrm{C}'} = \gamma\left(1 + \frac{v}{2c}\right) \tag{4.51}$$

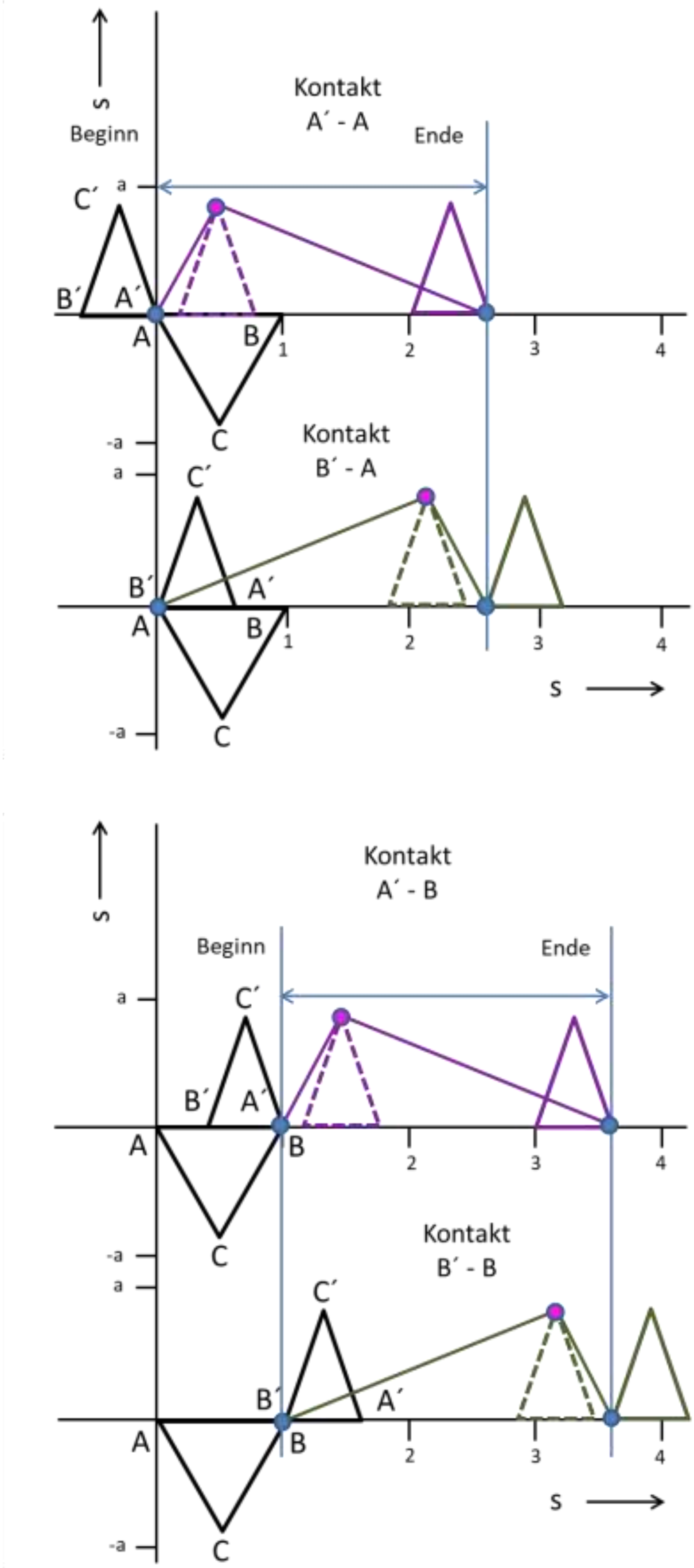
Zur Durchführung einer vollständigen Berechnung müssen zusätzlich noch die Zeiten zwischen den Kontakten berechnet werden. Wird die Zeit beim ersten Kontakt A − A′ zu Null gesetzt so ergibt sich für die weiteren Zeitabstände

$$\text{Fall1} \to \text{Fall2}: \qquad t_{1 \to 2} = \frac{c}{\gamma v} \tag{4.52}$$

$$\text{Fall1} \to \text{Fall3}: \qquad t_{1 \to 3} = \frac{c}{v} \tag{4.53}$$

$$\text{Fall1} \to \text{Fall4}: \qquad t_{1 \to 4} = \frac{c}{\gamma v} + \frac{c}{v} \tag{4.54}$$

Mit einer geeigneten Kombination aus den hier abgeleiteten Beziehungen lassen sich alle möglichen Versuchskonstellationen berechnen.



$v = 0{,}8c$

A´ – A	System	System´
t_0	0	0
t_1	1	1
t_2	2	3,33

B´ – A	System	System´
t_0	0,75	0,75
t_1	1,75	3,08
t_2	2,75	4,08

A´ – B	System	System´
t_0	1,25	1,25
t_1	2,25	2,25
t_2	3,25	4,58

B´ – B	System	System´
t_0	2	2
t_1	3	4,33
t_2	4	5,33

Abb. 4.7: Signalabfolge für die 4 möglichen Kontakte des Systems.

In Abb. 4.7 ist die grafische Darstellung für die Versuchssituation mit einer Geschwindigkeit von $v = 0{,}8\ c$ wiedergegeben. Diese hohe Geschwindigkeit wurde gewählt, damit sich die Situation gut visualisieren lässt, sie stellt aber keine Beschränkung der Allgemeinheit dar.

Für die 4 verschiedenen Kontakte sind die Zeiten eingetragen, bei denen aus Sicht C die Signale von A′ bzw. B′ bei C′ und nach Reflexion beim jeweiligen Ausgangspunkt eintreffen. Außerdem sind die entsprechenden Messungen für das System A, B, C wiedergegeben. Zur Vereinfachung der Betrachtung wird die Zeit so normiert, dass der Durchlauf der Strecke $a = 1$ gesetzt wird. Damit die Messungen miteinander verglichen werden können, wurden zu den jeweiligen Laufzeiten zwischen den Punkten die Zeiten bis zum Aussenden des ersten Signals entsprechend der Gleichungen Gl. (4.52) – (4.54) hinzuaddiert. Das erste Signal beim Kontakt von A′/A bildet hierbei den Nullpunkt, gefolgt von B′/A, dann A′/B und zum Schluss B′/B als letzte mit dem Abstand $t = 2$.

Gemäß den Aussagen der speziellen Relativitätstheorie müssen hier das „Identitätsprinzip“ und nach Nutzung der Transformationsgleichungen das „Äquivalenzprinzip“ gelten. Zunächst ist festzustellen, dass die Zeit für einen Durchlauf A→ C→ A und B→ C→ B jeweils in der Zeit $t = 2$ abläuft, während für die Strecken A′→ C′→ A′ und B′→ C′→ B′ jeweils $t = 2{,}333 = 2\gamma$ benötigt werden. Dies entspricht genau den Erwartungen bezüglich der subjektiv langsamer ablaufenden Zeit im bewegten System.

Betrachtet man die Zeiten, die bei C und C′ zwischen den einzelnen Signalen gemessen werden, so tritt der gleiche Effekt auf wie auch bereits in Kap. 2.2.2 diskutiert. Es sind für C und C′ die festgestellten Werte von A/B′ und B′/A vertauscht. Dies ist auch aufgrund der Relativitätsbetrachtung zwingend erforderlich, da der Beobachter C bzw. C′ zuerst die Signale des in seinem System befindlichen Beobachters A bzw. A′ empfangen muss, damit jeweils die gleiche Abfolge eingehalten wird.

Es ist demnach auch in diesem Fall bei einer Kombination von Signalen in Längs- und Querrichtung das Relativitätsprinzip gewahrt.

4.5 Signalaustausch bei Rotation (Sagnac-Effekt)

Im Gegensatz zu translatorischen Bewegungen treten bei rotierenden Systemen messbare Effekte zwischen Hin- und Rückweg auf. Dies steht nicht im Widerspruch zum Relativitätsprinzip, da es sich hier definitionsgemäß nicht um Inertialsysteme handelt. Die ersten erfolgreichen Versuche hierzu wurden von Georges Sagnac (1860-1926) im Jahr 1913 durchgeführt [100]. Der schematische Versuchsaufbau ist in Abb. 4.8 wiedergegeben. Im Teil a) ist dargestellt, dass von einer Lichtquelle monochromatisches Licht ausgesendet wird, das an einem halbdurchlässigen Spiegel teilweise reflektiert und in 2 gegenläufige Richtungen aufgeteilt wird. Nach vollständigem Umlauf und Austritt wird ein Interferometer genutzt, um kleine Laufzeitunterschiede zwischen den Lichtstrahlen zu detektieren. Zunächst wird die Apparatur im Ruhezustand kalibriert, anschließend erfolgen Messungen während der Drehung des Systems. Hierbei werden alle Elemente des Versuchsaufbaus, d. h. Lichtquelle, Spiegel und Detektor mitgedreht. Wie in Abb. 4.8 b) dargestellt, legen die in Drehrichtung ausgesendeten Lichtstrahlen einen längeren Weg zurück als die im gegenläufigen Sinn bewegten und dieser Unterschied lässt sich messen.

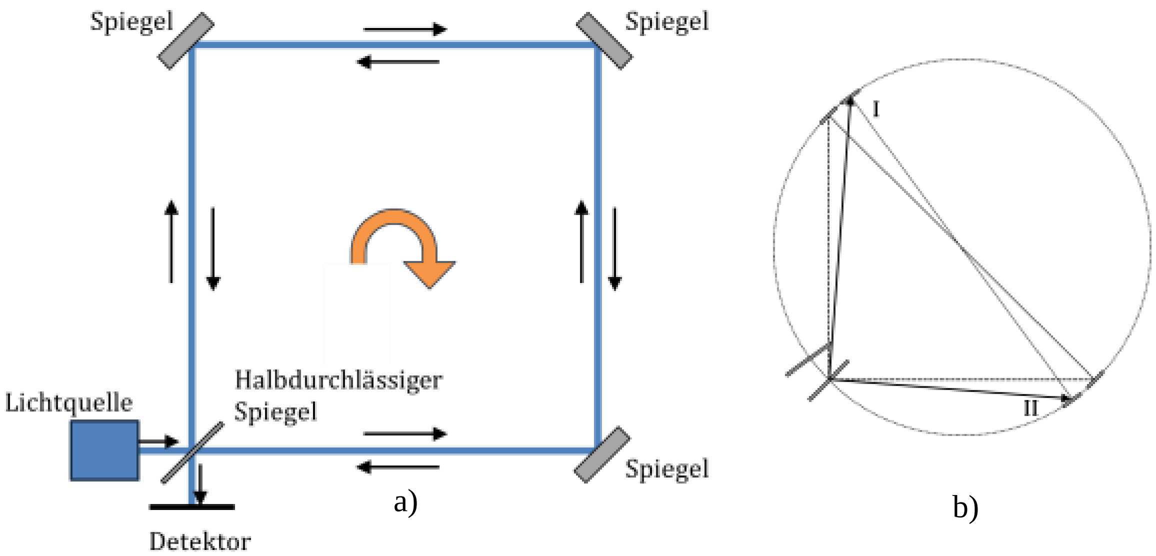


Abb. 4.8: Aufbau eines Sagnac-Interferometers. a) Drehbare Versuchsanordnung b) Veränderung des Signalverlaufs des ersten Segments durch Drehung Typ I (in Drehrichtung): Verlängerung; Typ II (gegenläufig): Verkürzung

Zur Berechnung der Werte können die in Abb. 4.9 dargestellten Bezeichnungen benutzt werden. Für die Länge des Kreisbogensegments s von A nach B gilt die Beziehung

$$s = r \cdot \omega \cdot (t_0 + \Delta t_0) \tag{4.60}$$

wobei r der Radius und ω die Kreisfrequenz ist. Außerdem ist t_0 die Zeit, die der Lichtstrahl im unbewegten System zwischen 2 Spiegeln benötigt und Δt_0 die zusätzlich erforderliche Zeit bei einer Drehbewegung. Darüber hinaus gilt allgemein

$$a = ct_0 \qquad e = c\Delta t_0 \qquad b = a + e \qquad a = r\sqrt{2}$$

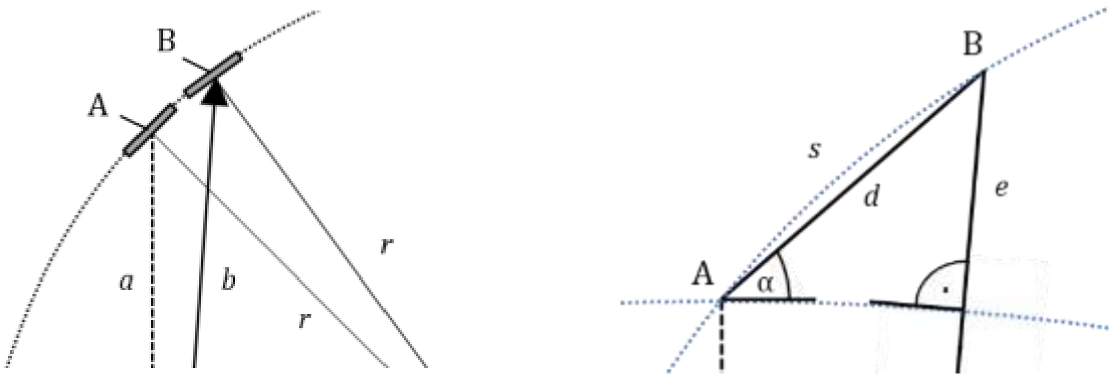


Abb. 4.9: Für die Berechnungen verwendete Formelzeichen

Wird $\Delta t \ll t_0$ vorausgesetzt, dann gelten in guter Näherung folgende Zusammenhänge

$$s = d = r \cdot \omega \cdot t_0 \tag{4.61}$$

$$\sin\alpha = \sin(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{e}{d} = \frac{c \cdot \Delta t_0}{r \cdot \omega \cdot t_0} \tag{4.62}$$

und damit

$$\Delta t_0 = \frac{r\omega t_0}{\sqrt{2}\cdot c} = \frac{a^2\omega}{2c^2} \tag{4.63}$$

Es gibt 4 Segmente, also ist die Zeitverzögerung bei einem Umlauf

$$\Delta t_+ = 2\frac{a^2\omega}{c^2} \tag{4.64}$$

Die Verkürzung der Zeit für den Lichtstrahl auf dem entgegengesetzten Weg hat den gleichen Betrag, also ist das Endergebnis

$$\Delta t_t = \Delta t_+ + \Delta t_- = 4\frac{a^2\omega}{c^2} \tag{4.65}$$

Bei einer Länge a von 1m und 10 Umdrehungen pro Sekunde ergibt das $\Delta t_t = 4{,}4\cdot 10^{-16}$s entsprechend einer Wellenlänge im sichtbaren Licht, die Interferenzmessungen zulässt.

G. Sagnac war der Überzeugung, dass er mit seiner (ähnlich aufgebauten) Apparatur einen Äthereffekt gemessen hatte; es wurde jedoch bereits 1911 von Max v. Laue der Nachweis geführt, dass ein solches Experiment mit dem Relativitätsprinzip vereinbar ist [101].

Im Jahr 1925 wurde von A. A. Michelson und H. G. Gale ein Versuch mit einer Abmessung von 613m Länge und 339 m Breite durchgeführt [102,103]. Hiermit konnte die Rotation der Erde mit einer relativen Genauigkeit von 2% gemessen werden.

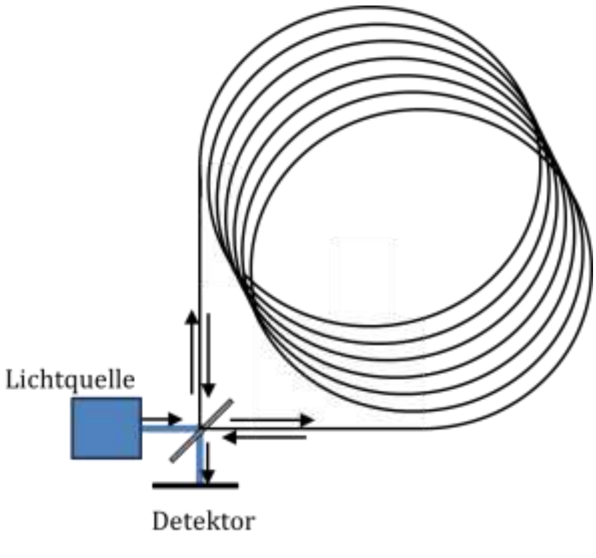


Abb. 4.10: Aufbau eines Sagnac-Interferometers mit einem Lichtwellenleiter

Neben dem Aufbau mit Strahlenreflektion durch Spiegel können auch wie in Abb. 4.10 dargestellt aufgewickelte Lichtwellenleiter eingesetzt werden. Diese sind heute weit verbreitet und finden Anwendung in Bereichen wie Luft- und Raumfahrt, bei der Navigation von Schiffen und in der Robotik. Sie sind weniger anfällig für mechanischen Verschleiß als mechanische Kreiselkompasse, da sie keine beweglichen Teile enthalten. Ein weiterer Trend in deren Entwicklung ist die Miniaturisierung von optischen Gyroskopen. Mit dem Aufkommen von Mikro-Elektro-Mechanischen Systemen (MEMS) ist es möglich geworden, kleinere und kosteneffizientere Gyroskope herzustellen, die für eine Vielzahl von Anwendungen, von Smartphones bis hin zu Drohnen, eingesetzt werden können.

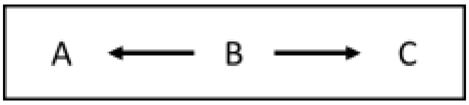
5. Uhrentransport

Bekanntlich ist gemäß der Speziellen Relativitätstheorie bei einem Signalaustausch in bewegten Systemen nur die gemeinsame Betrachtung von Hin- und Rückweg möglich. Darüber hinaus hat es in der Vergangenheit jedoch viele Überlegungen zur Messung der Einweglichtgeschwindigkeiten innerhalb eines Systems gegeben. Einer der Ansätze zur getrennten Messung war die Untersuchung des Effekts, der sich durch die langsame Bewegung von synchronisierten Uhren ergibt. Hierbei wird ein bewegtes System betrachtet, bei dem sich zwei gemäß Einstein-Konvention synchronisierte Uhren so bewegen, dass eine der anderen folgt. Zur Durchführung des Versuchs werden die Uhren langsam in der Weise bewegt, dass sie nach Abschluss die Plätze getauscht haben. Bei sehr langsamer Durchführung sollte die ursprüngliche Synchronisierung erhalten bleiben und anschließend eine Zeitdifferenz messbar sein.

Es jedoch bereits seit einiger Zeit bekannt, ist der von den Uhren messbare Effekt exakt der Position innerhalb des Systems entspricht (vgl. z. B. [19,40]) und daher zu einem Nullresultat führen muss. Dieser Effekt wird zunächst auf einfache Weise qualitativ dargestellt, anschließend wird er allgemein abgeleitet. Außerdem wird in diesem Kapitel das bekannte Zwillingsparadoxon betrachtet, dass sich als Sonderfall des Uhrentransports darstellen lässt.

5.1 Uhrentransport in Bewegungsrichtung

Es sei zunächst angenommen, dass innerhalb eines Labors die 3 Beobachter A, B und C in gleichem Abstand hintereinander positioniert sind.



Zunächst wird der Fall betrachtet, dass sich diese zueinander in Ruhe befinden. Beobachter B sendet nun synchronisierte Uhren an A und C aus. Beim Eintreffen der Uhren bei A und C wird festgestellt, dass diese - abhängig von der Geschwindigkeit - aufgrund der Zeitdilatation einen geringeren Zeitablauf als die in Ruhe befindlichen Uhren anzeigen. Außerdem stellen A und C mit dort vorhandenen vorab synchronisierten Uhren fest, dass die bewegten Beobachter bei ihnen jeweils zur gleichen Zeit eintreffen.

Es sei nun angenommen, dass dieses Labor beschleunigt wird und sich danach mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Dann werden die vorhandenen Uhren synchronisiert. Falls nun ein Uhrentransport einen messbaren Effekt innerhalb dieses bewegten Systems bewirken sollte, so muss sich das auf eine (oder beide) der im Folgenden dargestellten Arten nachweisen lassen:

1. Beobachter A und C stellen zeitliche Unterschiede beim Eintreffen der von B ausgehenden bewegten Beobachter im Vergleich zu einem ruhenden System fest.
2. Die bewegten Beobachter selbst stellen Unterschiede im Zeitablauf beim Eintreffen bei A bzw. C im Vergleich zu einem ruhenden System fest.

Es soll im Folgenden gezeigt werden, dass innerhalb eines ruhenden und eines bewegten Systems die gleichen Ergebnisse erzielt werden. Dieser vereinfachende Ansatz kann erweitert werden auf die Aussage, dass sie beliebige bewegte Systeme und darüber hinaus ebenfalls beliebig relativ hierzu bewegte Systeme betrifft. Dies ist möglich, da es sich hier um unbeeinflusste, nicht beschleunigte Systeme handelt. Damit ist die Aussage allgemeingültig.

5.1.1 Qualitative Betrachtung

In Abb. 5.1 ist die Situation dargestellt, dass bei einem ruhenden und einem bewegten Labor zum Zeitpunkt 0 ausgehend von einem Punkt B ein Lichtsignal in beide Richtungen ausgesendet wird.

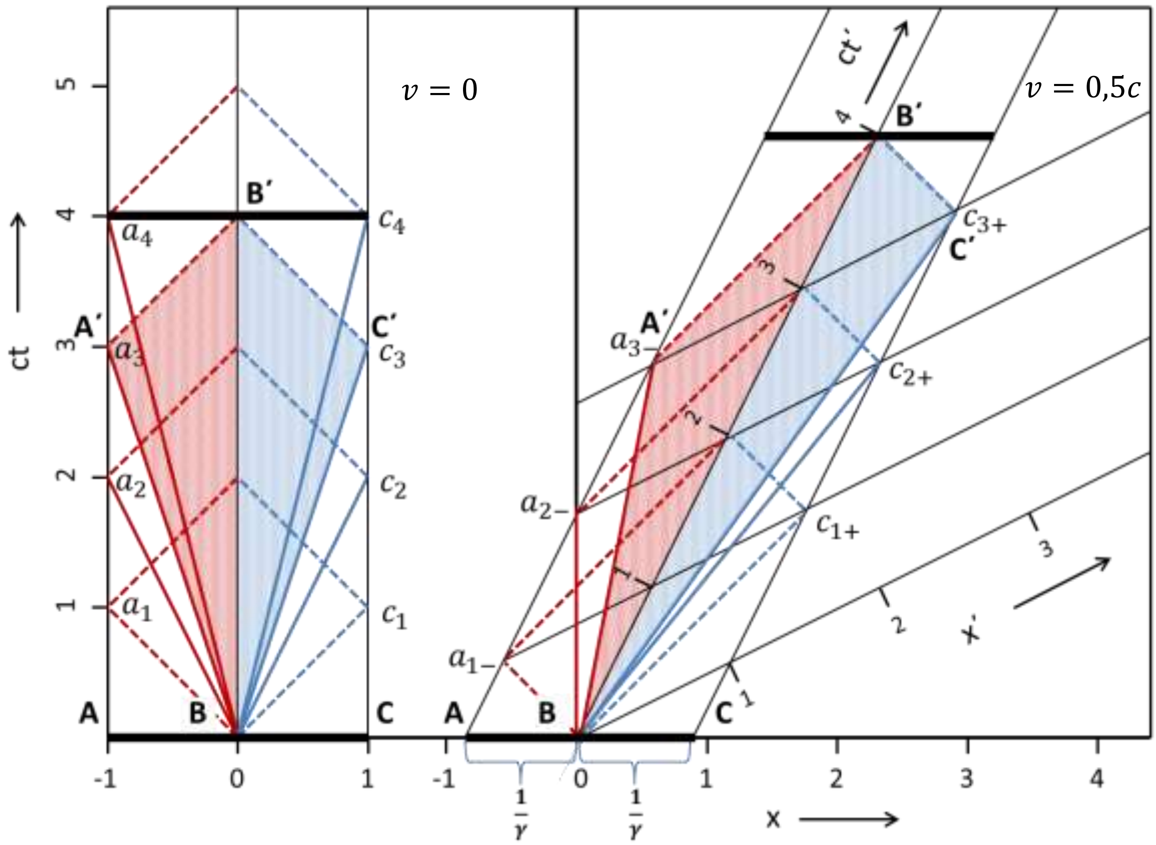


Abb. 5.1: Weg-Zeit-Diagramm für einen Uhrentransport

Das Signal trifft am Punkt c_1 und a_1 das vordere (C) bzw. hintere Ende (A) des Labors. Dieses Diagramm wird ergänzt durch die Darstellung von bewegten Körpern mit Uhren, die ebenfalls von diesem Punkt ausgesandt werden.

Zunächst sei das ruhende Labor betrachtet (linke Seite des Diagramms). Startet die Uhr zum Zeitpunkt 0 mit einer Geschwindigkeit von 1/2c so trifft sie nach 2 Zeiteinheiten an den Punkten c_2 sowie a_2 ein, bei $1/4c$ nach 4 Zeiteinheiten an den Punkten c_4 sowie a_4 usw. Auf diese Weise lassen sich abhängig von der Geschwindigkeit alle denkbaren Zeitpunkte einstellen.

Betrachtet man dagegen ein bewegtes System (rechte Seite) so ergeben sich für einen ruhenden Beobachter eine Reihe von Unterschieden, z. B. Abweichungen in den Zeiten zum Erreichen von c_n und a_n, die Länge 1 wird zu $1/\gamma$ usw. Diese sind gemäß der Lorentz-Transformation zu erwarten.

Im Folgenden sei am Beispiel des im Diagramm mit den gefüllten Feldern dargestellten Falls die Situation für die bewegten Beobachter untersucht (blau: in Bewegungsrichtung, rot: in Gegenrichtung). Es gilt hier im Ruhezustand

$$v = \left(0{,}5 \pm \frac{1}{3}\right) \cdot c \tag{5.01}$$

und damit für die bewegten Beobachter

$$v_{c3+} = \frac{0{,}5 + 0{,}\overline{3}}{1 + 0{,}5 \cdot 0{,}\overline{3}} c = 0{,}714c \tag{5.02}$$

$$v_{a3-} = \frac{0{,}5 - 0{,}\overline{3}}{1 - 0{,}5 \cdot 0{,}\overline{3}} c = 0{,}2c \tag{5.03}$$

Zur Vereinfachung der Rechnungen wird folgende Konvention eingeführt: Die Werte für Zeit, Weg und die Lichtgeschwindigkeit c werden auf 1 normiert, die Werte der Geschwindigkeiten v ergeben sich damit dimensionslos als Bruchteile von c.

Es folgt für die Ankunftszeit sowie für die jeweilige Konstante γ

$$\begin{aligned} t_{c3+} &= 4{,}041 \qquad \gamma_{c3+} = 1{,}429 \\ t_{a3-} &= 2{,}887 \qquad \gamma_{a3-} = 1{,}021 \end{aligned} \tag{5.04}$$

Für die subjektiv abgelaufene Zeit der Beobachter gilt

$$\textit{bewegtes System:} \quad \frac{t_{c3+}}{\gamma_{c3+}} = \frac{t_{a3-}}{\gamma_{a3-}} = 2{,}828 \tag{5.05}$$

Dieser Wert ist identisch mit den Ergebnissen im nicht bewegten System, da

$$t_{c3} = t_{a3} = 3 \qquad \gamma_{c3} = \gamma_{a3} = 1{,}061 \tag{5.06}$$

gilt und sich somit der gleiche Wert ergibt.

$$\textit{nicht bewegtes System:} \quad \frac{t_{c3}}{\gamma_{c3}} = \frac{t_{a3}}{\gamma_{a3}} = 2{,}828 \tag{5.07}$$

Aus den Ableitungen folgt, dass in diesem Fall die subjektiv gemessene Zeit der bewegten Beobachter in allen Fällen identisch ist. Außerdem ist aus der Diagrammdarstellung abzulesen, dass die von den Beobachtern A und C gemessene Zeit des Eintreffens der bewegten Beobachter in ihren synchronisierten Systemen ebenfalls gleich sein muss. Es ist also nicht möglich, innerhalb eines gleichförmig bewegten Systems durch Bewegung von Beobachtern mit Uhren Rückschlüsse auf die zugrundeliegende Geschwindigkeit zu ziehen oder Abweichungen in der Synchronisation der verwendeten Uhren zu finden.

5.1.2 Allgemeine Ableitung

Im Folgenden wird dieser Sachverhalt allgemein bewiesen. Dazu werden zunächst die folgenden Größen definiert:

Ruhendes System	Bewegtes System	
-	v_0	Geschwindigkeit des bewegten Systems
Δv	v_+, v_-	Reisegeschwindigkeiten der bewegten Beobachter
-	$\Delta t_A, \Delta t_A$	Synchronisationsdifferenz zum unbewegten System
t_0	t_+, t_-	Ankunftszeiten der bewegten Beobachter
t'_0	t'_+, t'_-	Subjektive Reisezeit der bewegten Beobachter
γ_Δ	γ_+, γ_-	Lorentz-Faktor für die bewegten Beobachter

Diese sind in einem modifizierten Minkowski-Diagramm dargestellt (vgl. Abb. 5.2). Der Versuchsablauf ist wie folgt:

Vom Mittelpunkt B eines ruhenden Labors werden Signale an die Endpunkte A und C geschickt und erreichen diese zum Zeitpunkt t' (linke Seite des Diagramms, Punkte gekennzeichnet mit A′ und C′). Gleichzeitig starten 2 synchronisierte Uhren von B mit einer beliebigen, aber für beide Versuchsteilnehmer gleichen Geschwindigkeit Δv. Diese erreichen die Endpunkte nach der Zeit t'' (Position A″ und C″); daraufhin wird unmittelbar ein Signal an den Punkt B zurückgesandt. Im rechten Teildiagramm ist die Situation für einen bewegten Beobachter dargestellt. Der Verlauf in Bewegungsrichtung und entgegengesetzt dazu unterscheiden sich entsprechend den bekannten Forderungen der Lorentz Transformation.

Es soll im Folgenden gezeigt werden, dass die beteiligten Beobachter keine Unterschiede bezüglich der gemessenen Zeiten feststellen können. Dabei handelt es sich um zwei unterschiedliche Beobachtungen:

1. Die bewegten Beobachter können aufgrund ihrer Messungen nicht unterscheiden, ob das System bewegt ist oder sich in Ruhe befindet.
2. Die ruhenden Beobachter messen ebenfalls – unabhängig von der Systemgeschwindigkeit – die gleichen Zeiten für das Eintreffen der bewegten Versuchsteilnehmer.

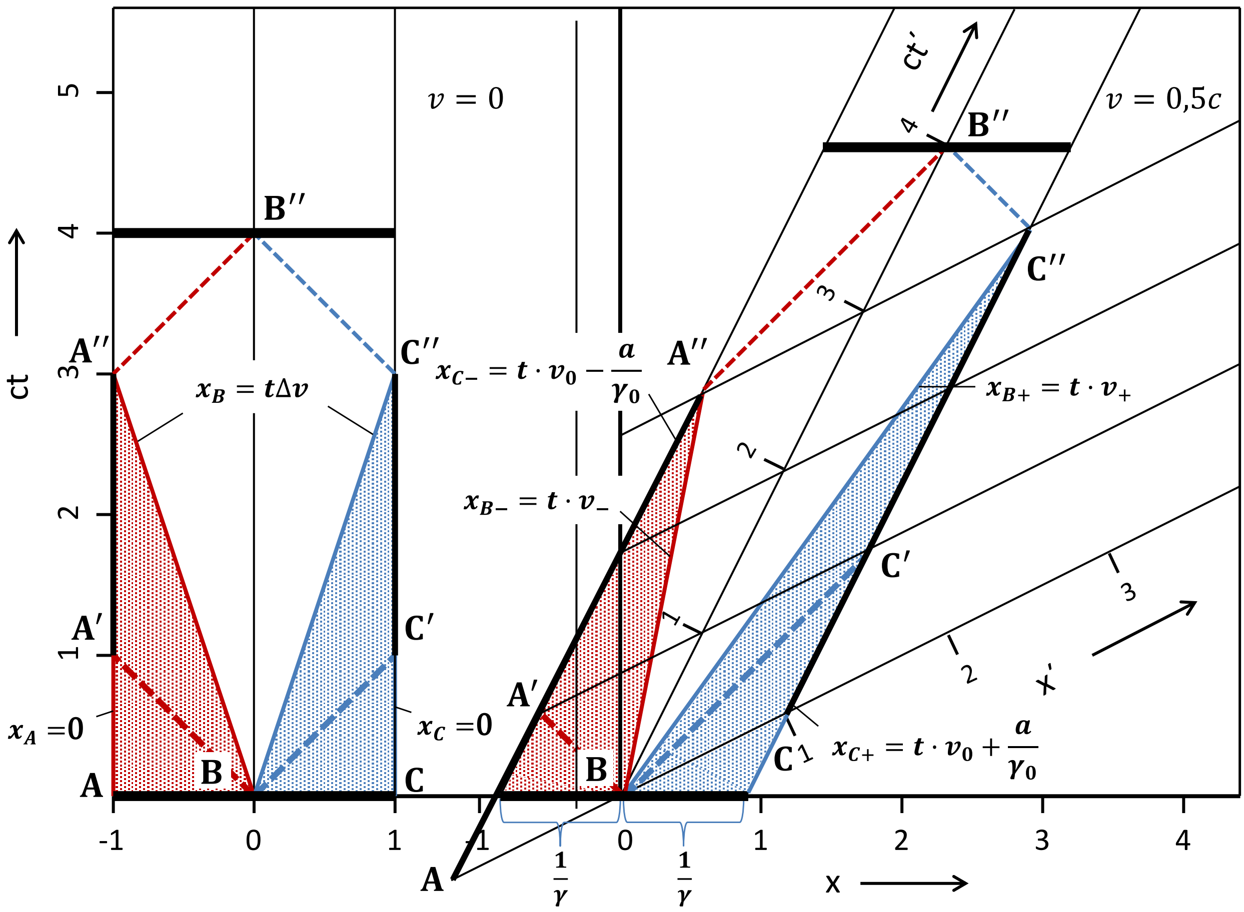


Abb. 5.2: Weg-Zeit-Diagramm für Uhrentransport mit den definierten Größen
Gestrichelte Linien: Signalaustausch

Es werden nun getrennt die einzelnen Fälle betrachtet.

5.1.3 Identische Zeiten beim Eintreffen der bewegten Beobachter

An dieser Stelle soll folgendes untersucht werden:

a) Die Synchronisationsdifferenzen im bewegten System Δt_A und Δt_C für die Beobachter A und C gegenüber B

b) Die Zeiten t_- und t_+ die die bewegten Beobachter von B bis zum Erreichen der Punkte A und C benötigen

c) Die Differenz zwischen den beiden Werten. Wenn diese (multipliziert mit γ_0) den Werten des unbewegten Systems entsprechen, so sind die Messergebnisse für die bewegten und unbewegten Beobachter nicht unterscheidbar.

a) Synchronisationsdifferenzen

Zur Bestimmung der Synchronisationsdifferenzen wird zunächst die Zeit bestimmt, die ein lichtschnelles Signal von B zum Erreichen der Punkte A′ bzw. C′ benötigt. Diese ist

$$\Delta t_{B\to A'} = \frac{a}{c\gamma_0(1 + \frac{v_0}{c})} \tag{5.08}$$

$$\Delta t_{B\to C'} = \frac{a}{c\gamma_0(1-\frac{v_0}{c})} \tag{5.09}$$

Davon wird jeweils der Wert abgezogen, der zum Erreichen des Ausgangspunkts erforderlich ist

$$\Delta t_{A'\to A} = \Delta t_{C'\to C} = \frac{a}{c}\gamma_0 \tag{5.10}$$

Die Synchronisation der Systeme führt also zu Werten von

$$\Delta t_A = \frac{a}{c\gamma_0(1+\frac{v_0}{c})} - \frac{a}{c}\gamma_0 = -\frac{\gamma_0 av}{c^2} \tag{5.11}$$

und

$$\Delta t_C = \frac{a}{c\gamma_0(1-\frac{v_0}{c})} - \frac{a}{c}\gamma_0 = \frac{\gamma_0 av}{c^2} \tag{5.12}$$

b) Zeit für die bewegten Beobachter

Die Zeit, die ein bewegter Beobachter bis zum Erreichen der Punkte A′ bzw. C′ benötigt, ist im unbewegten System

$$t_0 = \frac{a}{\Delta v} \tag{5.13}$$

Um dies im bewegten System zu bestimmen, werden die Werte von x_{B+} und x_{C+} (mit $t \to t_+$) sowie x_{B-} und x_{C-} (mit $t \to t_-$) gleichgesetzt und es ergibt sich (vgl. Abb. 5.2)

$$t_+ = \frac{a}{\gamma_0(v_+ - v_0)} \tag{5.14}$$

$$t_- = \frac{a}{\gamma_0(v_0 - v_-)} \tag{5.15}$$

c) Differenzbetrachtung

Im Folgenden wird die Differenz zwischen Δt_A und t_- bzw. Δt_C und t_+ betrachtet. Im unbewegten System ist dieser Wert

$$\Delta t_{A\to A''} = \Delta t_{C\to C''} = \frac{a}{\Delta v} \tag{5.16}$$

Im bewegten System ist dies entsprechend

$$\Delta t_{A\to A''} = \Delta t_{C\to C''} = \gamma_0\frac{a}{\Delta v} \tag{5.17}$$

Wenn also

$$t_- = \Delta t_A + \Delta t_{A\to A''} \tag{5.18}$$

mit

$$\frac{a}{\gamma_0(v_0 - v_-)} = \frac{a}{c\gamma_0(1+\frac{v_0}{c})} - \frac{a}{c}\gamma_0 + \gamma_0\frac{a}{\Delta v} \tag{5.19}$$

sowie

$$t_+ = \Delta t_C + \Delta t_{C\to C''} \tag{5.20}$$

mit

$$\frac{a}{\gamma_0(v_+ - v_0)} = \frac{a}{c\gamma_0(1 - \frac{v_0}{c})} - \frac{a}{c}\gamma_0 + \gamma_0 \frac{a}{\Delta v} \tag{5.21}$$

gelten, sind keine Unterschiede im System feststellbar.

Zur Vereinfachung der Rechnung werden die Gleichungen mit c/a multipliziert und die absoluten Werte der Geschwindigkeiten werden durch ihr Verhältnis zu c ersetzt, d. h.

$$v'_+ = \frac{v_+}{c} \quad v'_- = \frac{v_-}{c} \quad v'_0 = \frac{v_0}{c} \quad \Delta v' = \frac{\Delta v}{c} \tag{5.22}$$

Somit erhält die Gleichung 5.19 die Form

$$\frac{1}{\gamma_0(v'_0 - v'_-)} = \frac{1}{\gamma_0(1 + v'_0)} - \gamma_0 + \frac{\gamma_0}{\Delta v'} \tag{5.23}$$

und aus Gl. 5.21 wird

$$\frac{1}{\gamma_0(v'_+ - v'_0)} = \frac{1}{\gamma_0(1 - v'_0)} - \gamma_0 + \frac{\gamma_0}{\Delta v'} \tag{5.24}$$

Werden die Werte für

$$\gamma_0{}^2 = \frac{1}{1 - {v'_0}^2} \tag{5.25}$$

eingesetzt so entsteht nach einfacher Umformung aus Gl. 5.23

$$(1 + v'_-)(1 - v'_0) = -v'_0 + \frac{v'_0}{\Delta v'} + v'_- - \frac{v'_-}{\Delta v'} \tag{5.26}$$

und

$$v'_- = \frac{v'_0 - \Delta v'}{1 - v'_0 \cdot \Delta v'} \tag{5.27}$$

sowie aus Gl. 5.24

$$(1 - v'_+)(1 + v'_0) = -v'_+ + \frac{v'_+}{\Delta v'} + v'_0 - \frac{v'_0}{\Delta v'} \tag{5.28}$$

und

$$v'_+ = \frac{v'_0 + \Delta v'}{1 + v'_0 \cdot \Delta v'} \tag{5.29}$$

Diese Darstellungen entsprechen exakt der Definition von v'_- und v'_+. Damit ist gezeigt, dass innerhalb der Systeme die Beobachter A und C keine Unterschiede für das Eintreffen eines bewegten Beobachters feststellen können. Die subjektiven Zeiten sind also unabhängig davon, ob sich das System in Ruhe befindet oder sich bewegt.

5.1.4 Identischer Zeitverlauf beim Eintreffen der bewegten Beobachter

Die Zeit, die ein bewegter Beobachter bis zum Erreichen der Punkte A bzw. C benötigt, ist im unbewegten System

$$t_0 = \frac{a}{\Delta v} \tag{5.30}$$

und im bewegten System

$$t_+ = \frac{a}{\gamma_0(v_+ - v_0)} \tag{5.31}$$

$$t_- = \frac{a}{\gamma_0(v_0 - v_-)} \tag{5.32}$$

Die vom bewegten Beobachter subjektiv gemessene Zeit ist dann

$$t'_0 = \frac{a}{\gamma_\Delta \Delta v} \tag{5.33}$$

$$t'_+ = \frac{a}{\gamma_+\gamma_0(v_+ - v_0)} \tag{5.34}$$

$$t'_- = \frac{a}{\gamma_-\gamma_0(v_0 - v_-)} \tag{5.35}$$

Sind die subjektiv gemessenen Zeiten identisch so muss gelten

$$t'_0 = t'_+ = t'_- \tag{5.36}$$

Zunächst wird dies für den Fall $t'_0 = t'_+$ gezeigt. Es soll also gelten

$$\frac{a}{\gamma_+\gamma_0(v_+ - v_0)} = \frac{a}{\gamma_\Delta \Delta v} \tag{5.37}$$

Dies führt zu

$$\frac{\gamma_\Delta}{\gamma_+\gamma_0} = \frac{(v_+ - v_0)}{\Delta v} \tag{5.38}$$

Zur Vereinfachung der Rechnung werden an dieser Stelle wieder die absoluten Werte der Geschwindigkeiten durch ihr Verhältnis zu c ersetzt, d. h.

$$v'_+ = \frac{v_+}{c} \quad v'_- = \frac{v_-}{c} \quad v'_0 = \frac{v_0}{c} \quad \Delta v' = \frac{\Delta v}{c} \tag{5.39}$$

Werden nun die jeweiligen Beziehungen der Werte für γ eingesetzt, so folgt

$$\frac{(1 - v_+'^2)(1 - v_0'^2)}{1 - \Delta v'^2} = \frac{(v'_+ - v'_0)^2}{\Delta v'^2} \tag{5.40}$$

mit

$$(1 - v'_+ v'_0)^2 \Delta v'^2 = (v'_+ - v'_0)^2 \tag{5.41}$$

Wird für v_+ die Beziehung

$$v'_+ = \frac{v'_0 + \Delta v'}{1 + v'_0 \cdot \Delta v'} \tag{5.42}$$

eingesetzt, so folgt

$$\left(1 - \frac{v'_0 + \Delta v'}{1 + v'_0 \cdot \Delta v'} v'_0\right)^2 \Delta v'^2 = \left(\frac{v'_0 + \Delta v'}{1 + v'_0 \cdot \Delta v'} - v'_0\right)^2 \tag{5.43}$$

Wird diese Gleichung vollständig ausmultipliziert so ergeben sich insgesamt 20 Terme, die sich gegenseitig aufheben. Dasselbe Schema kann auch analog auf $t'_0 = t'_-$ angewendet werden. Mit

$$\frac{\gamma_\Delta}{\gamma_-\gamma_0} = \frac{(v'_0 - v'_-)}{\Delta v'} \tag{5.44}$$

und

$$v_- = \frac{v'_0 - \Delta v'}{1 - v'_0 \cdot \Delta v'} \tag{5.45}$$

ergibt sich das gleiche Ergebnis. Damit ist gezeigt, dass die subjektiv gemessenen Zeiten der bewegten Beobachter sich nicht unterscheiden.

Insgesamt ist damit allgemein bewiesen, dass es innerhalb eines bewegten Systems keine Möglichkeit gibt, über einen „langsamen Uhrentransport" Abweichungen an synchronisierten Uhren gegenüber einem ruhenden Referenzsystem festzustellen.

5.2 Zwillingsparadoxon

Eines der bekanntesten Beispiele innerhalb der speziellen Relativitätstheorie ist das Zwillingsparadoxon. Dieses Thema hat in der Literatur eine lange Historie (vgl. z. B. Darstellung in [41]). Hierbei wird ein Zwillingspaar betrachtet, bei dem sich eine Person in Ruhe befindet (in dem sie auf der Erde verbleibt), die andere aber mit einem schnellen Raumschiff davon wegbewegt und dann wieder zurückkehrt. Dieser Zwilling ist dann weniger gealtert als der auf der Erde verbliebene. Das Paradoxon ergibt sich deswegen, weil gemäß der Relativitätstheorie beide als gleichwertig betrachtet werden müssten und hierdurch der reisende Zwilling den auf der Erde ruhenden als weniger gealtert auffinden müsste.

Eine Auflösung der Widersprüche ergibt sich deshalb, weil der Zwilling im Raumschiff auf seiner Reise das Inertialsystem wechselt.

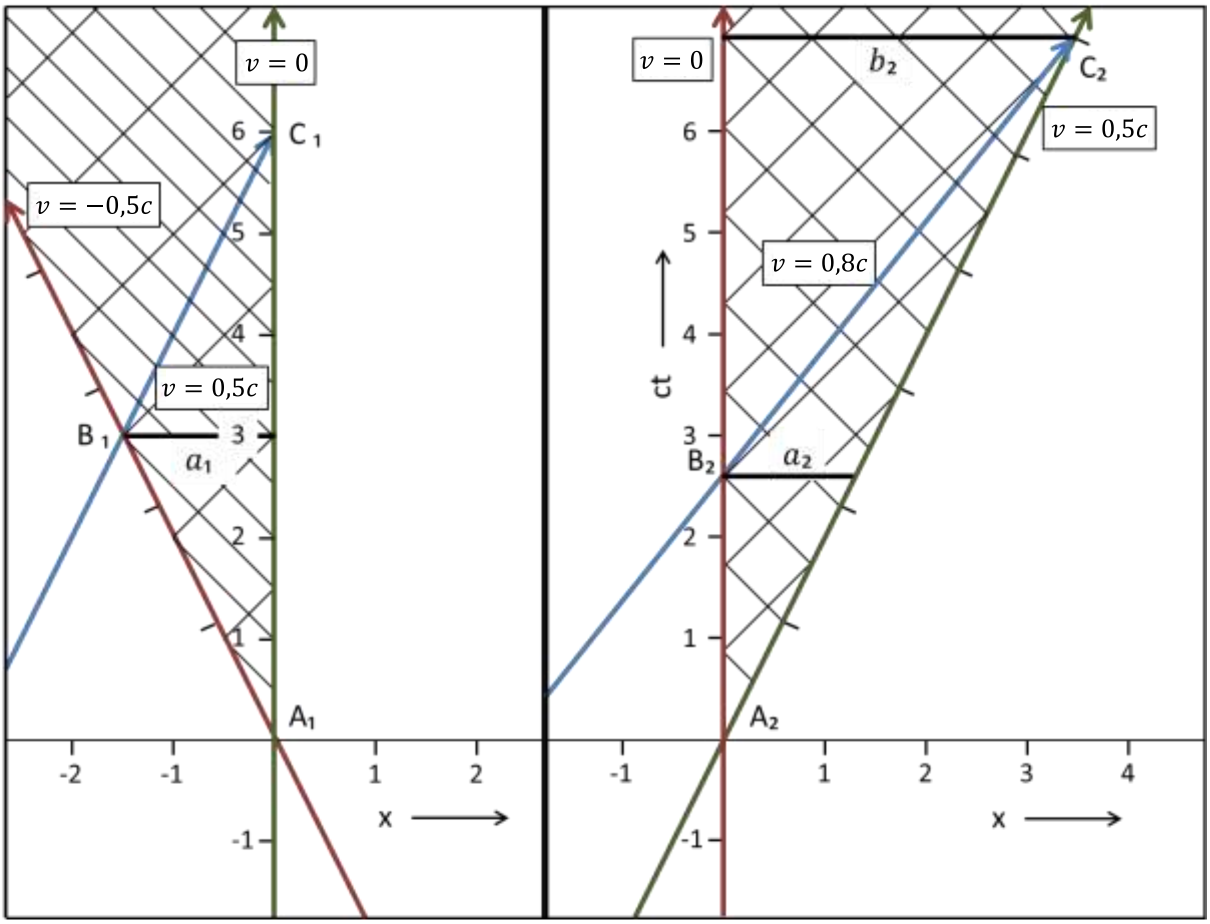


Abb. 5.3: Darstellung des Zwillingsparadoxons
Links: Beobachter A ruhend, B bewegt
Rechts: Beobachter A bewegt, B (zunächst) ruhend

In Abb. 5.3 ist dieser Fall auf der linken Seite dargestellt. Auf der rechten Seite wird der Fall betrachtet, dass die Beobachter die Perspektive tauschen und der zunächst ruhende als bewegt und der bewegte als ruhend betrachtet wird. Hierbei wird, um Einflüsse durch das Umsteigen zu vermeiden, der Versuchsaufbau so gewählt, dass es drei Versuchsteilnehmer (in der Abb. 5.3 mit den Farben grün, rot und blau gekennzeichnet) mit jeweils einer gleichwertigen Uhr gibt [41]. An den Punkten A_1 und B_1 sowie A_2 und B_2 werden dann die Uhren synchronisiert und am Ende die Ergebnisse abgelesen. In dieser Darstellung erhält das Problem den gleichen Status wie das bereits diskutierte Thema zum langsamen Uhrentransport.

Wenn die Zustände als gleichwertig zu betrachten sind, müssen die Messergebnisse in beiden Systemen für alle Beobachter subjektiv identisch sein. Dies soll im Folgenden gezeigt werden. Dabei handelt es sich um die Gesamtzeit vom Start bis zur Rückkehr sowie um die Zeiten für die bewegten Beobachter, die jeweils bis zu den Umkehrpunkten und von da bis zum Endpunkt gleich sein müssen. Dabei wird die Gesamtzeit für den ruhenden Beobachter im linken Bild als t_0 festgelegt. Die Definition der anderen Größen ist in nachfolgender Tabelle aufgeführt.

Ruhendes System	Bewegtes System	
t_T	t'_T	Gesamtzeit von Start (A) bis Rückkehr (C)
t_1	t'_1	Zeit für ersten Reiseabschnitt (A→B)
t_2	t'_2	Zeit für zweiten Reiseabschnitt (B→C)
-	v'_1	Geschwindigkeit für $A_1 \rightarrow B_1$, $B_1 \rightarrow C_1$, $A_2 \rightarrow C_2$
-	v'_2	Geschwindigkeit für $B_2 \rightarrow C_2$
-	γ_1	Lorentzfaktor für v'_1
-	γ_2	Lorentzfaktor für v'_2

Anmerkung: Die Geschwindigkeiten werden hier grundsätzlich in ihrem Verhältnis zur Lichtgeschwindigkeit angegeben, d. h.

$$v'_1 = \frac{v_1}{c} \qquad v'_2 = \frac{v_2}{c} \tag{5.50}$$

a) Gesamtzeiten

links: Die Gesamtzeit t_T ist definitionsgemäß

$$t_T = t_0 \tag{5.51}$$

und für t'_T ergibt sich

$$t'_T = t_1 + t_2 = \frac{t_0}{\gamma_1} \tag{5.52}$$

wobei in diesem Fall aus Symmetriegründen offensichtlich gilt

$$t_1' = t_2' = \frac{t_T'}{2} = \frac{t_0}{2\gamma_1} \tag{5.53}$$

<u>rechts:</u> Da die subjektiven Zeiten für t_1 in beiden Fällen gleich sein müssen gilt hier

$$t_1 = \frac{t_0}{2\gamma_1} \tag{5.54}$$

Die Zeit t_2 lässt sich über Beziehungen zu b_2 bestimmen (vgl. Abb. 5.3, rechts), da für v_1' und v_2' gilt

$$v_1'(t_1 + t_2) = v_2' t_2 \tag{5.55}$$

mit

$$t_2 = \frac{v_1' t_1}{v_2' - v_1'} \tag{5.56}$$

Außerdem gilt für v_2' wegen der gleichen Geschwindigkeit auf Hin- und Rückweg im linken Teilbild gemäß Gl. (4.21) für die Geschwindigkeitsaddition

$$v_2' = \frac{2v_1'}{1 + {v_1'}^2} \tag{5.57}$$

Hieraus folgt dann

$$t_T = t_1 + t_2 = \frac{t_0}{2\gamma_1} + \frac{v_1' t_0}{2\gamma_1 (v_2' - v_1')} = \frac{t_0}{2\gamma_1}\left(1 + \frac{v_1'}{v_2' - v_1'}\right) \tag{5.58}$$

Nach Einsetzen von Gl. (5.57) in Gl. (5.58) ergibt sich mit

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{1}{1 - {v_1'}^2}} \tag{5.59}$$

über

$$t_T = \frac{t_0}{2}\gamma_1\left(1 - {v_1'}^2\right)\left(1 + \frac{v_1'}{\frac{2v_1'}{1 + {v_1'}^2} - v_1'}\right) \tag{5.60}$$

$$t_T = \frac{t_0}{2}\gamma_1\left(1 - {v_1'}^2\right)\left(1 + \frac{v_1'\left(1 + {v_1'}^2\right)}{v_1' - {v_1'}^3}\right) \tag{5.61}$$

$$t_T = \gamma_1 t_0 \tag{5.62}$$

Wegen

$$t_T' = \frac{t_T}{\gamma_1} \tag{5.63}$$

folgt sofort

$$t_T' = t_0 \tag{5.64}$$

Die subjektiv gemessenen Gesamtzeiten sind also gleich.

b) Einzelzeiten

Hierzu ist ergänzend die Zeit t_2 zu bestimmen, die für den bewegten Beobachter subjektiv zwischen B_2 und C_2 verstreicht.

Nach Gl. (5.56) und (5.54) gilt in diesem Abschnitt für einen ruhenden Beobachter

$$t_2 = \frac{v_1' t_0}{2\gamma_1 (v_2' - v_1')} \tag{5.65}$$

Daraus folgt sofort

$$t'_2 = \frac{v_1' t_0}{2\gamma_2 \gamma_1 (v_2' - v_1')} \tag{5.66}$$

Sollen die subjektiven Zeiten für linkes und rechtes Schaubild gleich sein so muss also gelten

$$\frac{t_0}{2\gamma_1} = \frac{v_1' t_0}{2\gamma_2 \gamma_1 (v_2' - v_1')} \tag{5.67}$$

Dies lässt sich leicht zeigen. Zunächst ergibt sich

$$\gamma_2 = \frac{v_1'}{v_2' - v_1'} \tag{5.68}$$

und unter Verwendung von Gl. (5.57) folgt zunächst

$$\gamma_2 = \frac{1 + {v_1'}^2}{1 - {v_1'}^2} \tag{5.69}$$

Wegen

$$\gamma_2 = \sqrt{\frac{1}{1 - {v_2'}^2}} \tag{5.70}$$

erhält man

$$\frac{1 - {v_1'}^2}{1 + {v_1'}^2} = \sqrt{1 - \frac{4{v_1'}^2}{\left(1 + {v_1'}^2\right)^2}} \tag{5.71}$$

Über

$$1 - {v_1'}^2 = \sqrt{\left(1 + {v_1'}^2\right)^2 - 4{v_1'}^2} \tag{5.72}$$

folgt

$$1 - {v_1'}^2 = \sqrt{1 - 2{v_1'}^2 + {v_1'}^4} \tag{5.73}$$

was offensichtlich identisch ist. Hiermit ist also gezeigt, dass die subjektiven Zeiten sowohl für die Gesamtentfernung als auch für Teilbereiche gleich sind. Das „Paradoxon“ führt demnach nicht zu Widersprüchen.

5.3 Uhrentransport in beliebigen Raumrichtungen

Betrachtet man den Uhrentransport in beliebigen Raumrichtungen so ist für die Geschwindigkeitsaddition die Beziehung aus Gl. (4.20) zu verwenden.

$$v_T = \frac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2cos\alpha - \left(\frac{v_1v_2sin\alpha}{c}\right)^2}}{1 + \frac{v_1v_2cos\alpha}{c^2}} \tag{4.20}$$

In einem einfachen Beispiel mit $\alpha = 90°$ ergibt sich

$$v_T' = \sqrt{v_1'^2 + v_2'^2 - v_1'^2v_2'^2} \tag{5.80}$$

Diese Beziehung lässt sich interpretieren als Variante der Darstellung in Abb. 5.3, nur dass sich hier im linken Schaubild alle Beobachter noch zusätzlich mit einer Geschwindigkeit v_2 bewegen. In diesem Fall muss dann die Zeitverzögerung für den Weg von $A_1 \longrightarrow B_1$ für einen nicht bewegten Beobachter von γ_1 auf $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ ansteigen. Daraus lässt sich folgern, dass in diesem Fall die Beziehung

$$\gamma_T = \gamma_1'\gamma_2' \tag{5.81}$$

gelten muss. Es ergibt sich sofort

$$\gamma_T = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{ges}'^2}} \tag{5.82}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - (v_1'^2 + v_2'^2 - v_1'^2v_2'^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - v_1'^2)(1 - v_2'^2)}} \tag{5.83}$$

was offensichtlich mit Gl. (5.81) identisch ist. Damit ist auch für diesen Fall gezeigt, dass es bei linearen Kombinationen von verschiedenen Bewegungszuständen keine messbaren Unterschiede gibt.

Zusammenfassend wurde gezeigt, dass es generell keine Möglichkeit gibt, innerhalb eines gleichförmig bewegten Systems durch Messungen auf den Bewegungszustand zu schließen. Alle Varianten des Signalaustauschs und des „langsamen Uhrentransports" führen stets zu einem Nullresultat. Dies kann natürlich keine Überraschung sein, da dies durch die Relativitätstheorie gefordert wird.

6. Relationen für Masse, Impuls, Kraft und Energie

In diesem Kapitel werden Betrachtungen im Zusammenhang mit der relativistischen Massenzunahme dargestellt. Es handelt sich dabei um bekannte Effekte wie der Einfluss auf die kinetische Energie aber auch um neue Untersuchungen. Diese sind das „Federparadoxon“, die relativistische Betrachtung des elastischen Stoßes (wichtig für die Bewertung von Kollisionen bei Elementarteilchen), der Signalaustausch während und nach Beschleunigungen und eine relativistische Raketenformel. Da einige der Darstellungen keine geschlossenen analytischen Lösungen erlauben sind in diesen Fällen numerische Lösungskonzepte beigefügt.

Keine der durchgeführten Untersuchungen zeigt Widersprüche zu den Lorentz Gleichungen oder den Relativitätskriterien.

6.1 Relativistische Massenzunahme und Energie

In der historischen Entwicklung für die relativistische Massenzunahme wurde zunächst von „longitudinaler“ und „transversaler“ Massenzunahme gesprochen. Diese Begriffe wurden von H. A. Lorentz eingeführt [13,42], da bei der Beschleunigung von Elektronen Unterschiede längs und quer zur Bewegungsrichtung der Elektronen beobachtet wurden. Nach den experimentellen Befunden wurden für die transversale Masse m_t und die longitudinale Masse m_l folgende Beziehungen ermittelt:

$$m_t = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{6.01}$$

$$m_l = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \tag{6.02}$$

Dabei wurde der Wert für die Masse bestimmt, indem die wirkende Kraft durch die Beschleunigung dividiert wurde gemäß des Newtonschen Gesetzes

$$m = \frac{F}{a} \tag{6.03}$$

Eine transversale Beschleunigung führt zu einer konstanten Kreisbewegung, während die longitudinale Beschleunigung die Bahngeschwindigkeit des Körpers und damit die longitudinale sowie auch die transversale Masse erhöht.

Nach heutigem Wissensstand stellt der Ausdruck in Gl. (6.01) die korrekte Zunahme der Masse mit der Beschleunigung dar. Der Ausdruck in Gl. (6.02) ergibt sich, wenn man statt Gl. (6.03) die korrekte Newtonsche Formulierung für die Kraft benutzt

$$F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} v + m \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{6.04}$$

Setzt man Gl. (6.01) in Gl. 6.04) ein, so ergibt sich

$$F = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) v + \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{6.05}$$

Mit

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}v} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{6.06}$$

folgt

$$F = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\right)\left(-2\frac{v}{c^2}\right)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} v + \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$F = \left(\frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\right)\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{m_0\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{6.07}$$

und damit der Ausdruck aus Gl. (6.02) für die longitudinale Masse. Die Werte für die Massen sind somit identisch und daher wurde auch etwa seit der Mitte des 20. Jahrhunderts die Trennung aufgehoben und man spricht heute üblicherweise von der relativistischen Masse gemäß Gl. (6.01).

Wie leicht zu erkennen ist, lässt sich der Ausdruck in Gl. (6.07) auch darstellen als

$$F = \frac{m_0}{\gamma^3} a \tag{6.08}$$

Dies bedeutet, dass bei einer konstanten, aus dem *ruhenden System* einwirkenden Kraft die im bewegten System auftretende Beschleunigung (ebenfalls gemessen vom ruhenden System aus) sich um den Faktor γ^3 unterscheidet. Von H. A. Lorentz wurde diese Gesetzmäßigkeit für ein von außen auf ein Elektron wirkendes elektrisches Feld abgeleitet. Bei der Betrachtung von Beschleunigungen, die durch Effekte innerhalb eines bewegten Systems hervorgerufen werden (wie z. B. bei einem Raketenantrieb) gelten die gleichen Gesetzmäßigkeiten. Wie in Kapitel 6.4 dargestellt, ergibt sich der Faktor γ^3 auch dann, wenn als einziges Kriterium zur Herleitung die relativistische Geschwindigkeitsaddition gewählt wird.

In der Folge soll zusätzlich die kinetische Energie eines Körpers betrachtet werden. Dazu werden die Werte in Bewegungsrichtung herangezogen, da allein sie zu einer Geschwindigkeitszunahme führen. Aus Gleichung (6.07) errechnet sich die Kraft, die für die Beschleunigung eines Körpers erforderlich ist gemäß

$$F = \frac{m_0 \cdot a}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \tag{6.09}$$

Die aufzuwendende Beschleunigungsarbeit ist demnach

$$W_{1,2} = \int_{v_1}^{v_2} F \cdot \mathrm{d}s = \int_{v_1}^{v_2} \frac{m_0 \cdot a}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \cdot \mathrm{d}s = \int_{v_1}^{v_2} \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}s \tag{6.10}$$

Wegen

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{6.11}$$

folgt

$$W_{1,2} = \int_{v_1}^{v_2} \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} v \, \mathrm{d}v \tag{6.12}$$

und abschließend

$$W_{1,2} = \left. \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right|_{v_1}^{v_2} \tag{6.13}$$

Für $v_1 = 0$ und $v_2 = v$ folgt

$$W = E_{kin} = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) = m_0 c^2 (\gamma - 1) \tag{6.14}$$

Nach einer Reihenentwicklung des Wurzelausdrucks ergibt sich

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{v^4}{c^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{v^6}{c^6} + + \cdots \tag{6.15}$$

und für $v \ll c$ erhält man daraus die klassische Formel für die kinetische Energie

$$E_{kin} \cong \frac{m_0}{2} v^2 \tag{6.16}$$

Die Gleichung (6.14) wurde von A. Einstein bereits im Jahr 1905 abgeleitet [22]. Die enthält implizit die erstmalige Darstellung der Äquivalenz von Masse und Energie und führt allgemein zu

$$E = mc^2 \tag{6.17}$$

Sie ist damit sicher die bekannteste Formel der modernen Physik.

6.2 Federparadoxon

Im Folgenden soll untersucht werden, wie sich Systeme mit einer einfachen Spiralfeder und einer daran gekoppelten Masse verhalten, wenn Versuche im Ruhezustand sowie bei erhöhter Geschwindigkeit durchgeführt werden. Hierzu werden zunächst 3 verschiedene Versuchsanordnungen untersucht und anschließend mit einer Energiebetrachtung bewertet.

6.2.1 Einfache Auslenkung einer Feder

Die einfachste Möglichkeit zur statischen Auslenkung einer Spiralfeder (ohne Schwingung) ist die Belastung mit einem Gewicht. Dieses Verfahren ist jedoch für eine Betrachtung innerhalb der speziellen Relativitätstheorie nicht geeignet, da die Auslenkung durch die Gravitationskonstante und damit durch die Masse der Erde bestimmt wird. Hierdurch wird eine Auswertung unmöglich gemacht. An dieser Stelle wäre demnach ein Ansatz der allgemeinen Relativitätstheorie erforderlich.

Aus diesem Grunde muss ein anderes Verfahren zur Auslenkung genommen werden. Hierzu wird ein Rückstoßantrieb gewählt, bei dem durch gleichmäßig ausströmendes Gas eine konstante Kraft auf die Feder ausgeübt wird. Auf diese Weise kann dann die Federkonstante k aus der Beziehung

$$F = k \cdot s \tag{6.20}$$

ermittelt werden. Hierbei ist F der Betrag der aufzubringenden Kraft und s der des Auslenkungswegs. Wird dieser Versuchsaufbau in Bewegung versetzt und dabei die Feder quer zum Beobachter positioniert, so muss von einem ruhenden Beobachter aus betrachtet aufgrund des Relativitätsprinzips die gleiche Auslenkung auftreten. Für den bewegten Versuchsteilnehmer ergibt sich dabei die gleiche Federkonstante wie zuvor. Der ruhende Beobachter stellt jedoch aufgrund der Zeitdilatation sowie der relativistischen Massenzunahme folgende Unterschiede fest:

1. Die Menge des ausströmenden Gases pro Zeiteinheit ist um den Faktor γ verkleinert.
2. Die Masse der einzelnen Gasmoleküle ist um den Faktor γ vergrößert.
3. Die Ausströmgeschwindigkeit der Gasmoleküle in Querrichtung (verglichen mit der Bewegungsrichtung) ist um den Faktor γ verkleinert.

Zu Punkt 3 ist auszuführen, dass die Gesamtgeschwindigkeit eines austretenden Gasmoleküls genau gleich ist wie im unbewegten Zustand. Dies ist deswegen der Fall, weil der Weg sich um den Faktor γ verlängert aber um den Winkel $\alpha = arctan\, v/c$ von der Querrichtung abweicht. Aus dem gleichen Grund ist auch ein Lichtstrahl aus Sicht eines unbewegten Beobachters länger zu einem quer liegenden Ziel unterwegs. Die Querkomponente der Geschwindigkeit betrifft dies jedoch nicht und diese ist daher um den Faktor γ verkleinert. Diese Zusammenhänge müssen sich ergeben, damit der bewegte Beobachter die gleichen Gegebenheiten misst wie im unbewegten Zustand. In Summe führen diese Gegebenheiten zu der Beziehung

$$k = \gamma \cdot k' \tag{6.21}$$

Dies bedeutet, dass die Federkonstante im bewegten System um den Faktor γ kleiner ist als im unbewegten System. Dieser zunächst überraschende Sachverhalt ist erforderlich, damit auch bei anderen Versuchsanordnungen keine Widersprüche auftreten. Dies wird im Folgenden gezeigt.

6.2.2 Rotation

Die Auslenkung der Feder kann statt mittels Rückstoßes auch mit einer Drehbewegung vorgenommen werden. Zunächst wird im ruhenden System der Wert für die Umfangsgeschwindigkeit und abhängig davon die Auslenkung der Feder und damit die Kraft gemessen. Wird dieser Versuchsaufbau bei höherer Geschwindigkeit (wieder mit einer Ausrichtung quer zur Bewegungsrichtung) erneut geprüft, so ergibt sich für die Zentrifugalkraft

$$F_z' = m' \cdot \frac{v'^2}{r} = \frac{F_z}{\gamma} \tag{6.22}$$

Ursache für den Unterschied zum ruhenden System ist der Umstand, dass die Umfangsgeschwindigkeit v in der Beziehung der Zentrifugalkraft quadratisch auftritt. Da diese für den ruhenden Beobachter geringer ist und die Masse m sich entsprechend erhöht ergibt sich die abgeleitete Beziehung.

6.2.3 Harmonische Schwingung

Ein vergleichbarer Sachverhalt ergibt sich, wenn die Feder eine Schwingbewegung ausführt. Hier gilt die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0 \tag{6.23}$$

mit

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \tag{6.24}$$

und

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{6.25}$$

wobei ω_0 die Eigenkreisfrequenz und T_0 die Schwingungsdauer darstellen. Wird dieser Versuchsaufbau in Bewegung versetzt (wieder quer zur Bewegungsrichtung), so muss die Schwingungsdauer aufgrund der Zeitdilatation um den Faktor γ abnehmen. Dies führt dann zu der folgenden Beziehung

$$T_0' = 2\pi\sqrt{\frac{m'}{k'}} = 2\pi\sqrt{\frac{\gamma^2 \cdot m}{k}} = \gamma \cdot T_0 \tag{6.26}$$

Auch hier wird also wieder die Verringerung der Federkonstante benötigt, um das Relativitätsprinzip zu gewährleisten.

6.2.4 Literaturvergleich

In der Literatur werden keine (dem Autor bekannten) Varianten dieser Experimente diskutiert. Es gibt jedoch bei der Interpretation des von G. N. Lewis und R. C. Tolman formulierten Experiments eines „gebrochenen Hebels“ (das als mechanische Variante des Trouton-Noble Experiments aufgefasst werden kann) eine vergleichbare, von P. S. Epstein diskutierte Situation [43]. Basierend auf den generellen Ausführungen von A. Sommerfeld [44] formulierte er die folgenden Beziehungen

$$f_x = f_x' \qquad f_y = \frac{f_y'}{\gamma} \tag{6.27}$$

wobei f_x und f_y die Komponenten der „Newtonschen Kraft“ sind. Diese Darstellung erklärt die für die Federn gefundenen Zusammenhänge durch das Absinken der Kraft in Querrichtung bei Betrachtung durch einen ruhenden Beobachter.

6.2.5 Energiebetrachtung

Aufgrund dieser Zusammenhänge tritt jedoch ein anderer Effekt ein, der zu einem scheinbaren Widerspruch führt. Betrachtet man die Spannenergie einer Feder

$$E_{pot} = \int_0^s F(s)ds = \int_0^s k \cdot s\, ds \tag{6.28}$$

so wird sofort klar, dass diese linear von der für das Spannen erforderlichen Kraft bzw. der Federkonstanten abhängt. Bewertet man die zuvor diskutierten Beispiele so würde dies bedeuten, dass die Spannenergie einer Feder mit steigender Systemgeschwindigkeit abnimmt. Dies stellt aber einen Verstoß gegen das Prinzip der Energieerhaltung dar. Würde man eine gespannte Feder beschleunigen und dann lösen, so würde der ruhende Beobachter einen geringeren Energieinhalt messen als zuvor eingebracht worden ist. Umgekehrt hätte eine im bewegten System gespannte Feder nach einer Abbremsung eine höhere Energie.

Zur Auflösung des Paradoxons soll zunächst eine weitere Energiebetrachtung durchgeführt werden. Dazu wird hier die Gesamtenergie einer Masse betrachtet, die sich mit der Geschwindigkeit v_1 bewegt. Diese ist gemäß der bekannten Ableitung aus Kap. 6.1

$$E_1 = \gamma_1 m_0 c^2 \tag{6.29}$$

Es wird nun der Fall untersucht, dass die Masse quer dazu gleichmäßig mit der für den bewegten Beobachter gemessenen Geschwindigkeit v_2 bewegt wird. Für den unbewegten Beobachter muss sich dann wegen der Zeitdilatation ein Wert von

$$v_2' = \frac{v_2}{\gamma_1} \tag{6.30}$$

für die Geschwindigkeit einstellen. Die relativistische Geschwindigkeitsaddition (vgl. Kap. 4.1, Gl. (4.20), $\alpha = 90°$) führt dann zu

$$v_T = \sqrt{\left(\frac{v_1}{c}\right)^2 + \left(\frac{v_2}{\gamma_1 c}\right)^2 - \left(\frac{v_1 v_2}{\gamma_1 c^2}\right)^2} \tag{6.31}$$

Die Energie dieser Masse ist

$$E_T = \gamma_T m_0 c^2 \tag{6.32}$$

Betrachtet man nun die Differenz der beiden Energien so ergibt sich

$$\Delta E = \gamma_T m_0 c^2 - \gamma_1 m_0 c^2 \tag{6.33}$$

mit

$$\Delta E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v_T}{c}\right)^2}} - \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^2}} \tag{6.34}$$

Für $v_1, v_2 \ll c$ lässt sich der Ausdruck in eine Taylorreihe entwickeln und nach dem Einsetzen von v_T folgt

$$\begin{aligned}\Delta E &\cong \left[1+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{v_1}{c}\right)^2+\left(\frac{v_2}{\gamma_1 c}\right)^2-\left(\frac{v_1 v_2}{\gamma_1 c^2}\right)^2\right)-\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{v_1}{c}\right)^2\right)\right] m_0 c^2\\ &=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{v_2}{\gamma_1 c}\right)^2-\left(\frac{v_1 v_2}{\gamma_1 c^2}\right)^2\right] m_0 c^2\\ &=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{v_2}{\gamma_1 c}\right)^2\left(1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^2\right)\right] m_0 c^2=\frac{1}{2} m_0 v_2^2\end{aligned} \tag{6.35}$$

Dies ist genau die Beziehung für die kinetische Energie eines Körpers im nichtrelativistischen Zustand. Die Energiebilanz ist also bei dieser Betrachtung erhalten. Die Widersprüche bei der Energiebetrachtung der Feder rühren daher, dass die Kraft eine gerichtete Größe ist. Es entsteht die eigenartige Situation, dass Kraft und Beschleunigung nicht die gleiche Richtung haben. Dies wurde bereits von P. S. Epstein im Jahre 1911 dargestellt [43]. Obwohl hier - dem damaligen Kenntnisstand entsprechend - der Masse ein Tensor-Charakter unterstellt wurde und die in Kap 6.1 dargestellten Beziehungen für die Kräfte in Bewegungsrichtung und quer dazu noch nicht bekannt waren, ergibt sich damit die Lösung für dieses Paradoxon.

6.3 Relativistischer elastischer Stoß

Eine weitere nichtlineare Betrachtung ist für den relativistischen elastischen Stoß möglich. Dieser wird bei einer Untersuchung von makroskopisch ausgedehnten Körpern sicher keine Rolle spielen, da diese bei den erforderlichen Geschwindigkeitsunterschieden zerstört würden. Betrachtet man jedoch das Verhalten von Elementarteilchen z. B. in Beschleunigern so ist es eine interessante Fragestellung, wie deren Verhalten aus der Sicht unterschiedlich bewegter Beobachter gesehen wird.

Die Grundlage zur Berechnung liefern – wie auch im klassischen nichtrelativistischen Fall – die Erhaltungssätze für Impuls und Energie. Die Beziehungen für Impuls und Energie lauten

$$\text{Rel. Impuls:} \qquad \vec{p} = \gamma m \vec{v} \tag{6.40}$$

$$\text{Rel. kinetische Energie:} \qquad E = (\gamma - 1) m c^2 \tag{6.41}$$

Wird das Beispiel betrachtet, dass 2 Massen zentral zusammenstoßen, so kann beim Impulssatz auf die vektorielle Darstellung verzichtet werden und die Erhaltungssätze lauten

$$m_1\gamma_1 v_1 + m_2\gamma_2 v_2 = m_1\gamma_3 v_3 + m_2\gamma_4 v_4 \tag{6.42}$$

$$(\gamma_1 - 1)m_1c^2 + (\gamma_2 - 1)m_2c^2 = (\gamma_3 - 1)m_1c^2 + (\gamma_4 - 1)m_1c^2 \tag{6.43}$$

wobei v_1 und v_2 die Geschwindigkeiten vor dem Zusammenstoß und v_3 und v_4 die danach sind. Daraus ergibt sich

$$p = m_1\gamma_1 v_1 + m_2\gamma_2 v_2 = m_1\gamma_3 v_3 + m_2\gamma_4 v_4 \tag{6.44}$$

und

$$\frac{E_0}{c^2} = (\gamma_1 - 1)m_1 + (\gamma_2 - 1)m_2 = (\gamma_3 - 1)m_1 + (\gamma_4 - 1)m_2 \tag{6.45}$$

Die Ermittlung der Werte für v_3 und v_4 ist nicht mehr in geschlossener analytischer Form möglich, sondern es muss eine Näherungslösung gesucht werden. Hierfür wird ein Ansatz mit dem Verfahren der Bisektion gewählt. Ein Beispiel für die hierzu erforderlichen Berechnungen ist in Anlage A zusammengestellt.

Die Berechnung des nichtrelativistischen Grenzfalls erfolgt über die Modifikation der Impulsgleichung Gl. (6.44)

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_3 + m_2 v_4 \tag{6.46}$$

bei der die Ausdrücke für γ entfallen, sowie durch Nutzung der Näherungsformel

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \cdots \tag{6.47}$$

für $v \ll c$ und Einsetzen in die Energiegleichung Gl. (6.45), für die sich dann

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 v_3^2 + \frac{1}{2}m_2 v_4^2 \tag{6.48}$$

ergibt. Werden die Gl. (6.46) und Gl. (6.48) geeignet umgeformt so folgt

$$m_1(v_1 - v_3) = m_2(v_4 - v_2) \tag{6.49}$$

und

$$m_1(v_1 - v_3)(v_1 + v_3) = m_2(v_4 - v_2)(v_4 + v_2) \tag{6.50}$$

Nach Division beider Gleichungen ergibt sich sofort

$$v_1 + v_3 = v_4 + v_2 \tag{6.51}$$

und nach Einsetzen in Gl. (6.49) lassen sich daraus auf einfache Weise die klassischen Formeln für den zentralen Stoß ableiten

$$v_3 = 2\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - v_1 \tag{6.52}$$

und

$$v_4 = 2\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - v_2 \tag{6.53}$$

Es handelt sich hierbei offensichtlich um einfache geschlossene Lösungen und es sind daher keine numerischen Berechnungen erforderlich.

Es bleibt noch die Frage zu klären, wie sich die Sachverhalte aus Sicht verschieden bewegter Beobachter verhalten. Zu diesem Zweck wird die relativistische Geschwindigkeitsaddition für die Situation vor und nach dem Stoß betrachtet. Dazu werden in Anlage A neben der Ermittlung der Werte von v_3 und v_4 ebenfalls die Gleichungen für die relativistische Geschwindigkeitsaddition gemäß den folgenden Beziehungen berechnet, die dann verglichen werden können:

$$v_T(\,v_1,\; v_2) = \frac{v_1 - v_2}{1 - \frac{v_1\, v_2}{c^2}} \tag{6.54}$$

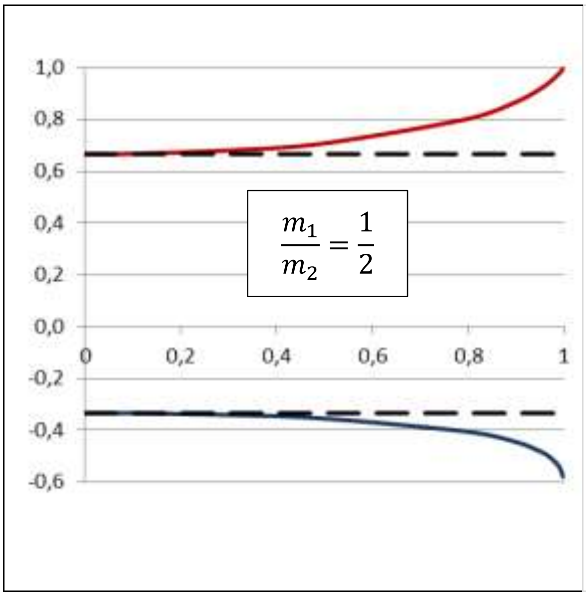
$$v_T(\,v_4,\; v_3) = \frac{v_4 - v_3}{1 - \frac{v_4\, v_3}{c^2}} \tag{6.55}$$

Für einen Vergleich zwischen den auftretenden Abweichungen der beiden Ergebnisse wird sinnvollerweise der Quotient betrachtet und dann wegen der geringen Abweichungen mit 1 subtrahiert

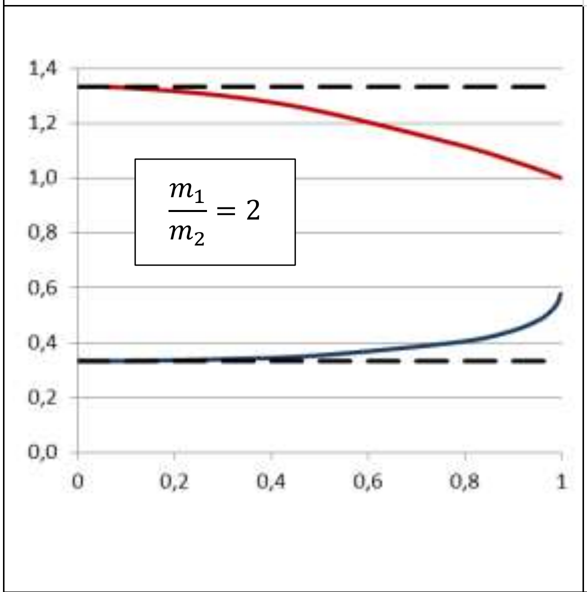
$$\delta_v = \frac{v_T(\,v_1,\; v_2)}{v_T(\,v_4,\; v_3)} - 1 \tag{6.56}$$

In Abb. 6.1 sind die Ergebnisse für Geschwindigkeiten v_1/c von 0,0001 bis 0,999 für Massenverhältnisse $m_1{:}\,m_2$ von 1: 2 und 2: 1 sowie für die Startbedingungen $v_2 = 0$ und $v_1 = -v_2$ wiedergegeben. Um eine Vergleichbarkeit zwischen den untersuchten Geschwindigkeiten herzustellen, wurden Werte für die Verhältnisse von v_3/v_1 und v_4/v_1 ermittelt und darüber hinaus auch grafisch dargestellt. Die Graphen laufen asymptotisch auf die gemäß den Gleichungen Gl (6.52) und Gl. (6.53) berechneten Werte für den nichtrelativistischen Fall zu, die ebenfalls in die Diagramme eingetragen wurden. Die Berechnungen von δ_v machen deutlich, dass alle Beobachter unabhängig vom Bewegungszustand zum selben Ergebnis kommen. Dies entspricht damit dem gleichen Ergebnis wie bei nicht relativistischer Betrachtung (vgl. Gl. (6.52) und Gl. (6.53)).

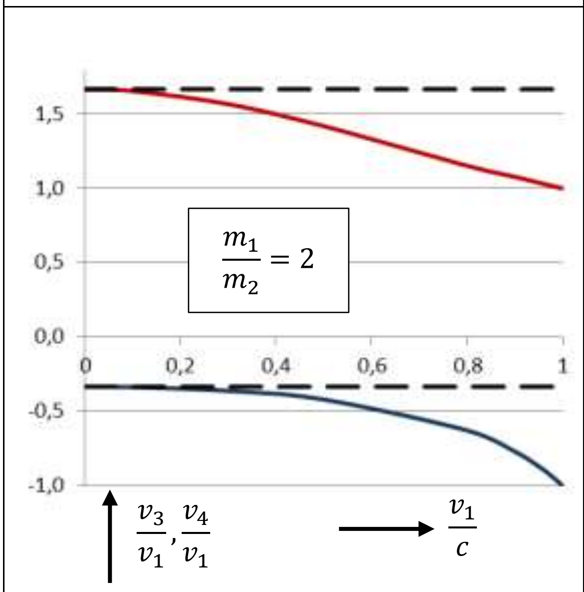
Die aufgeführten Fehlergrößen δ_v zeigen bei hohen Geschwindigkeiten keine Abweichungen, was sich jedoch bei niedrigen Werten ändert. Dies wird durch den zunehmenden Einfluss von Rundungsfehlern bei der Berechnung kleiner Beträge verursacht, da bei üblichen Kalkulationsprogrammen (z. B. Microsoft Excel) die Genauigkeit auf 15 Stellen limitiert ist. Bei einem Vergleich zwischen Tabellenkalkulation und VBA zeigt sich außerdem, dass geringfügige Unterschiede im Ergebnis der Berechnungen auftreten können. Dies kann sich bei der Angabe zu δ_v bemerkbar machen, wobei aber die prinzipielle Aussage erhalten bleibt. Die hier dargestellten Werte entstammen einer Tabellenkalkulation. Die Frage zur Genauigkeit ist darüber hinaus generell wichtig für numerische Berechnungen; hierzu ist in Anlage D eine umfassende Bewertung verschiedener Ansätze (für die Rekursion, dem Verfahren nach Newton und der Bisektion) enthalten.



$\frac{v_1}{c}$	$\frac{v_2}{c}$	$\frac{v_3}{v_1}$	$\frac{v_4}{v_1}$	δ_v
0,0001	-0,0001	-0,3333	0,6666	$-4{,}7\cdot10^{-8}$
0,001	0	-0,3333	0,6666	$-2{,}6\cdot10^{-10}$
0,1	0	-0,3340	0,6682	$2{,}4\cdot10^{-15}$
0,3	0	-0,3403	0,6805	$-3{,}0\cdot10^{-15}$
0,5	0	-0,3544	0,7083	0
0,8	0	-0,4054	0,8030	0
0,9	0	-0,4449	0,8679	0
0,95	0	-0,4807	0,9174	0
0,97	0	-0,5023	0,9437	0
0,99	0	-0,5392	0,9773	0
0,999	0	-0,5793	0,9973	0



$\frac{v_1}{c}$	$\frac{v_2}{c}$	$\frac{v_3}{v_1}$	$\frac{v_4}{v_1}$	δ_v
0,0001	0	0,3333	1,3333	$-2{,}6\cdot10^{-8}$
0,001	0	0,3330	1,3330	$1{,}3\cdot10^{-10}$
0,1	0	0,3340	1,3296	$-1{,}0\cdot10^{-14}$
0,3	0	0,3403	1,3050	$3{,}6\cdot10^{-15}$
0,5	0	0,3544	1,2442	$3{,}3\cdot10^{-15}$
0,8	0	0,4054	1,1159	$3{,}1\cdot10^{-15}$
0,9	0	0,4449	1,0621	0
0,95	0	0,4807	1,0317	0
0,97	0	0,5023	1,0202	0
0,99	0	0,5392	1,0070	0
0,999	0	0,5793	1,0007	$6{,}9\cdot10^{-15}$



$\frac{v_1}{c}$	$\frac{v_2}{c}$	$\frac{v_3}{v_1}$	$\frac{v_4}{v_1}$	δ_v
0,0001	-0,0001	-0,3333	1,6660	$-1{,}8\cdot10^{-8}$
0,001	-0,001	-0,3330	1,6666	$1{,}7\cdot10^{-10}$
0,1	-0,1	-0,3363	1,6550	$-5{,}6\cdot10^{-15}$
0,3	-0,3	-0,3614	1,5670	0
0,5	-0,5	-0,4194	1,4186	0
0,8	-0,8	-0,6276	1,1523	0
0,9	-0,9	-0,7697	1,0777	0
0,95	-0,95	-0,8697	1,0387	0
0,97	-0,97	-0,9174	1,0228	0
0,99	-0,99	-0,9708	1,0075	0
0,999	-0,999	-0,9970	1,0007	0

Abb. 6.1: Relativistischer elastischer Stoß für $0{,}0001 < v_1/c < 0{,}999$. Geschwindigkeitsverhältnis v_3/v_1 (blau) v_4/v_1 (rot). Fehlerbereich δ_v (Definition vgl. Text). Nichtrelativistischer Grenzfall: gestrichelte Linie

Zusammenfassend ist festzuhalten, dass beim elastischen relativistischen Stoß keine Effekte auftreten können, die Messungen zur Identifizierung eines absolut ruhenden Systems gestatten. Es gibt jedoch noch in neuerer Zeit (Jahr 2017) Versuche, mittels Präzisionsmessungen von Partikelmassen (hier: Elektronen) solche Effekte nachzuweisen [45]. Gemäß den hier dargestellten Ergebnissen können diese Versuche aber nicht zum Erfolg führen.

6.4 Signalaustausch während und nach Beschleunigungen

In diesem Kapitel wird untersucht, wie sich beschleunigte Systeme in relativistischen Situationen verhalten und welche Messergebnisse sich dabei für andere, nicht beschleunigte Beobachter ergeben. Die Beschleunigung wird dabei nicht von außen – z. B. durch ein elektromagnetisches Feld auf eine Ladung – hervorgerufen, wie dies von H. A. Lorentz untersucht wurde (vgl. Kap. 6.1), sondern erfolgt durch Raketenrückstoß.

Zunächst wird die einfache Situation betrachtet, bei der das zu untersuchende System einer konstanten Beschleunigung ausgesetzt ist, wobei Änderungen der Masse durch Ausstoß von Treibgasen zunächst unberücksichtigt bleiben. Die Ergebnisse lassen sich mittels analytischer und numerischer Verfahren bestimmen. Anschließend wird in einem weiterführenden Ansatz die Berücksichtigung der Abnahme der Raketenmasse bei der Beschleunigung ergänzt. Wird beim Antrieb eine proportionale Änderung der Ausstoßmasse mit der verbleibenden Raketenmasse unterstellt, kommt es zu einer gleichbleibenden Beschleunigung. Dagegen führt eine konstante Massenabnahme pro Zeiteinheit zu steigenden Beschleunigungswerten. Diese Berechnungen können vollständig (d. h. einschließlich Beschleunigung und zurückgelegtem Weg) nur noch numerisch durchgeführt werden; ein entsprechendes Programm und damit ermittelte Ergebnisse sind in der Anlage dargestellt. Abschließend wird die mit klassischer und relativistischer Raketenformel berechenbare Endgeschwindigkeit einer Rakete ermittelt und die Übereinstimmung der Ergebnisse gezeigt.

6.4.1 Signalaustausch bei Systemen mit konstanter Beschleunigung

Es wird der Fall betrachtet, dass eine Rakete gleichförmig beschleunigt und dabei aus anderen Inertialsystemen beobachtet wird. Während des Beschleunigungsvorgangs werden von einem Beobachter S innerhalb der Rakete in regelmäßigen Abständen von Δt_S Signale ausgesendet. An dem Versuch nimmt außerdem Beobachter A teil, der sich zu Beginn der Beschleunigung mit gleicher Geschwindigkeit wie S bewegt, in einer weiterführenden Betrachtung auch Beobachter B mit einer hierzu beliebigen Geschwindigkeit.

Zunächst wird die Beschleunigung der Rakete aus Sicht des Beobachters A untersucht. Eine analytische Berechnung wird erschwert durch die Tatsache, dass die relativistische Geschwindigkeitsaddition keine lineare Beziehung darstellt. Während der Beschleunigung wird für die aktuelle Geschwindigkeit v_A die Geschwindigkeitsänderung $\mathrm{d}v_A$ (aus Sicht von A) beschrieben durch

$$v_A + dv_A = \frac{v_A + dv_S}{1 + \frac{v_A \cdot dv_S}{c^2}} \tag{6.60}$$

wobei dv_S die Geschwindigkeitsänderung aus Sicht des bewegten Systems S darstellt. Eine Taylorentwicklung führt zu

$$v_A + dv_A = v_A + dv_S\left(1 - \frac{v_A^2}{c^2}\right) + \ (dv_S)^2\left(\frac{v_A^3 - v_A \cdot c^2}{c^4}\right) + + \ldots \tag{6.61}$$

Bei differentieller Betrachtung für $dv_S \to 0$ verschwinden Werte von $(dv_S)^2$ und höheren Potenzen. Gl. (6.61) erhält damit die Form

$$dv_A = dv_S\left(1 - \frac{v_A^2}{c^2}\right) \tag{6.62}$$

Es werden nun für beide Systeme die jeweils geltenden Beschleunigungen betrachtet

$$a_S = \frac{dv_S}{dt_S} \qquad\qquad a_A = \frac{dv_A}{dt_A} \tag{6.63}$$

Außerdem gilt

$$dt_S = \ dt_A \cdot \gamma = \frac{dt_A}{\sqrt{1-\left(\frac{v_A}{c}\right)^2}} \tag{6.64}$$

Daraus folgt

$$a_A = \frac{dv_A}{dt_A} = \frac{dv_S}{dt_S}\left(1 - \frac{v_A^2}{c^2}\right)^{3/2} = a_S\left(1 - \frac{v_A^2}{c^2}\right)^{3/2} = \frac{a_S}{\gamma^3} \tag{6.65}$$

Zwischen a_A und a_S zeigt sich also der gleiche Faktor γ^3, wie er bei der Ermittlung der Zusammenhänge für die auftretenden Kräfte bei relativistischer Massenzunahme abgeleitet wurde (vgl. Kap. 6.1).

In der Folge sollen nun die Gesetzmäßigkeiten zwischen den subjektiv beobachteten Zeiten, Geschwindigkeiten und Entfernungen für ruhende und bewegte Beobachter bestimmt werden. Dazu wird zunächst die Geschwindigkeit betrachtet. Aus Gl. (6.65) ergibt sich unmittelbar

$$dt_A = \frac{1}{a_S}\left(1 - \frac{v_A^2}{c^2}\right)^{-3/2} dv_A \tag{6.66}$$

Wird für a_S ein konstanter Wert vorausgesetzt und Gl. (6.66) integriert so ergibt sich

$$t_A = \frac{v_A}{a_S}\left(1 - \frac{v_A^2}{c^2}\right)^{-1/2} + C = \frac{v_A \cdot \gamma(v_A)}{a_S} + C \tag{6.67}$$

Werden konkrete Werte eingesetzt (z. B. Zeit läuft von 0 bis t_A) so verschwindet die Integrationskonstante C. Diese Gleichung beschreibt – bei subjektiv konstanter Beschleunigung der Rakete – die Abhängigkeit zwischen Zeit und Geschwindigkeit aus Sicht von A. Bei gegebener Geschwindigkeit lässt sich direkt die Zeit ermitteln, im umgekehrten Fall muss bei Verwendung der Gleichung ein numerisches Verfahren zu Bestimmung von v_A benutzt werden. Um dies zu vermeiden, lässt sich die Gl. (6.67) jedoch erweitern und umformen über

$$\left(\frac{a_S \cdot t_A}{c}\right)^2 = \left(\frac{v_A \cdot \gamma(v_A)}{c}\right)^2 = \frac{\frac{v_A^2}{c^2} + 1 - 1}{1 - \frac{v_A^2}{c^2}} = \frac{1}{1 - \frac{v_A^2}{c^2}} - 1 \tag{6.68}$$

Nach v_A aufgelöst ergibt das

$$v_A = \frac{a_S \cdot t_A}{\sqrt{1 + \left(\frac{a_S \cdot t_A}{c}\right)^2}} \tag{6.69}$$

Diese Darstellung findet sich auch in der Literatur, wobei sowohl Ansätze ähnlich dem hiergewählten verwendet werden [32] als auch unter Nutzung der Rapidität [91]. [Anmerkung: die Rapidität θ beschreibt ein Konzept, bei dem die Geschwindigkeiten nach dem Galilei-Prinzip aufaddiert werden; der Zusammenhang mit der relativistischen Geschwindigkeit ist $\theta = arctanh(v/c)$]. Die Gleichungen (6.67) und (6.69) sind gleichwertig und können abhängig von den Berechnungsanforderungen benutzt werden.

Zur Berechnung der in der Rakete subjektiv ablaufenden Zeit werden die Gleichungen (6.64) und (6.66) kombiniert und es ergibt sich die Beziehung

$$dt_S = \frac{1}{a_S}\left(1 - \frac{v_A^2}{c^2}\right)^{-1} dv_A \tag{6.70}$$

Die Integration führt zu

$$t_S = \frac{c}{a_S}\operatorname{arctanh}\left(\frac{v_A}{c}\right) + C \tag{6.71}$$

Zur direkten Ermittlung der Abhängigkeit von t_A anstatt v_A kann die Gl. (6.69) in (6.71) eingesetzt werden.

Die zurückgelegte Entfernung x_A lässt sich unter Nutzung von Gl. (6.66) berechnen mit

$$dx_A = v_A dt_A = \frac{1}{a_S}\left(1 - \frac{v_A^2}{c^2}\right)^{-3/2} dv_A \tag{6.72}$$

Die Integration ergibt

$$x_A = \frac{c^2}{a_S}\left(1 - \frac{v_A^2}{c^2}\right)^{-1/2} + C \tag{6.73}$$

Im Gegensatz zu den vorherigen Fällen muss hier die Integrationskonstante bestimmt werden. Dies erfolgt über Nutzung der Randbedingung $x_A = 0$ für die Geschwindigkeit $v_A = 0$. Eingesetzt in Gl. (6.73) und aufgelöst nach C führt dies zu

$$0 = \frac{c^2}{a_S}(1-0)^{-1/2} + C \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{c^2}{a_S}$$

und eingesetzt in Gl. (6.73) entsteht die endgültige Form

$$x_A = \frac{c^2}{a_S}\left\{\left(1 - \frac{v_A^2}{c^2}\right)^{-1/2} - 1\right\} = \frac{c^2}{a_S}(\gamma - 1) \tag{6.74}$$

Auch hier kann wieder alternativ die Beziehung zwischen v_A und t_A aus Gleichung (6.69) eingesetzt werden, um eine direkte Abhängigkeit von t_A zu erhalten.

Die Gleichung (6.74) weist die Besonderheit auf, dass für kleine Werte von v_A die Ergebnisse sehr ungenau werden können. Der Wert von γ nähert sich dabei 1; da in der Formel aber der Wert 1 abgezogen wird können bei üblicher Rechengenauigkeit größere Fehler entstehen. Es ist hier empfehlenswert eine Taylorentwicklung zu nutzen, bei der diese Probleme nicht auftreten. Die Anlage B enthält unter B.3 eine Ableitung und es ist dargestellt, unter welchen Randbedingungen Gl. (6.74) oder Taylor-Verfahren genauer sind.

Darüber hinaus wird in dieser Anlage auch ein numerisches Verfahren vorgestellt, bei dem die Nutzung der relativistischen Geschwindigkeitsaddition mit hinreichend kleinen Schritten zu den gleichen Ergebnissen führt. Ein analytisches Verfahren ist zwar einfacher zu nutzen, würde aber bei Modifikationen – wie z. B. der Änderung der Beschleunigung während des Versuches – zu Problemen führen. Bei numerischen Verfahren lässt sich eine solche Situation dagegen einfach implementieren. Dies wird deutlich bei der im nächsten Kapitel beschriebenen Situation, bei der der Austritt eines Treibgases einer Rakete und die entstehenden Einflüsse auf das System genau betrachtet werden.

In der Folge soll nun gezeigt werden, dass auf Basis dieser einfachen Zusammenhänge keine Widersprüche bezüglich der Feststellungen von Beobachtern auftreten, die sich mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten relativ zum Ausgangspunkt beim Start der Beschleunigung bewegen. Hierzu wird lediglich vorausgesetzt, dass aus der Rakete in subjektiv gleichen Zeitabständen Signale ausgesendet werden, die von den Beobachtern A und B aufgefangen werden. Die mögliche Lage dieser Beobachter ist in nachfolgendem Bild dargestellt.

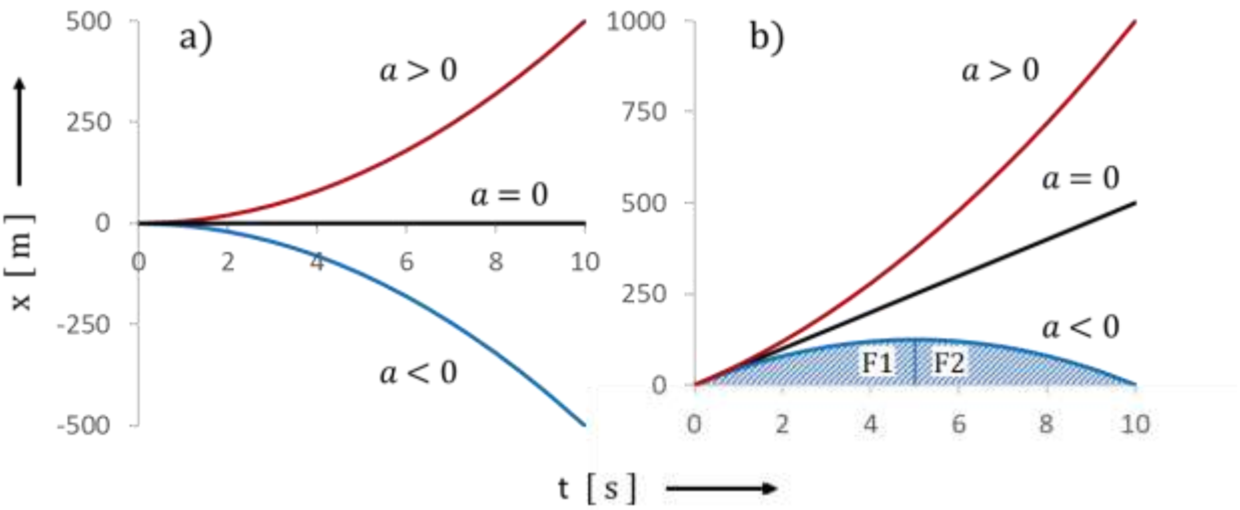


Abb. 6.2 Vergleich unterschiedlicher Beschleunigungszustände für die Beispiele: $a = 10\ \mathrm{m/s^2}$, $a = 0$ und $a = -10\ \mathrm{m/s^2}$
a) $v_0 = 0$, b) $v_0 = 50\ \mathrm{m/s}$

Beobachter B ist in allen Fällen relativ zur Diagrammdarstellung in Ruhe (d. h. aus Sicht von A und S bewegt er sich relativ zu ihnen bei Versuchsbeginn mit der Geschwindigkeit v_0), während A sich auf der Linie $a = 0$ bewegt. Im Teildiagramm a) mit $v_0 = 0$ fallen also die Ergebnisse für A und B zusammen, während sich in b) Teilnehmer A mit konstanter Geschwindigkeit v_0 von B entfernt. Ziel der nachfolgenden Berechnungen ist es zu zeigen, dass die empfangenen Signalabstände von A im Teil a) und auch b) aus Sicht von B unter Nutzung der Lorentz-Gleichungen identisch sind. Das Relativitätsprinzip ist gültig, wenn die subjektiv gemessenen Zeiten unabhängig von der Geschwindigkeit der Beobachter sind.

Um dieses nachzuweisen, wird in Abb. 6.3 eine Situation betrachtet, bei der in Teilbild a) die Rakete den Beobachter B passiert (blaue Linie im x/t—Diagramm), abbremst und sich anschließend wieder annähert. In Teilbild b) startet die Rakete aus einer Ruheposition und wird gleichmäßig beschleunigt. In diesem Fall ist noch der Verlauf eines gleichmäßig mit der Geschwindigkeit v_0 bewegten zusätzlichen Versuchsteilnehmers dargestellt (blaue Linie). Zur besseren Unterscheidbarkeit der Ergebnisse wurden die Referenzpunkte in Teilbild a) mit P und in b) mit Q und R gekennzeichnet.

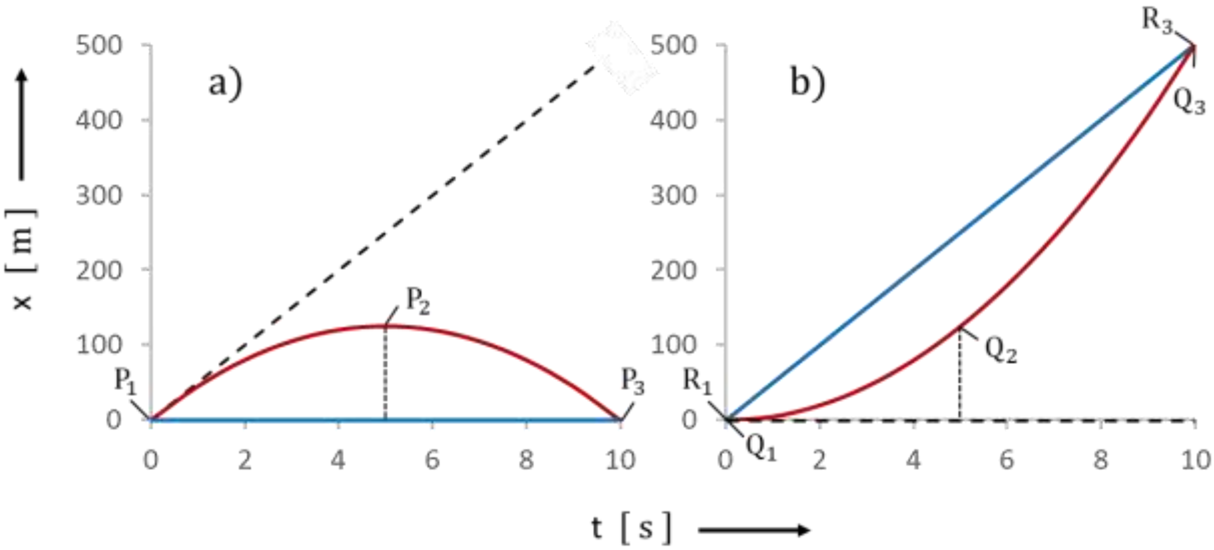


Abb. 6.3 Gleichartige Beschleunigungen aus Sicht von verschiedenen Beobachtern
a) $v_0 = 50\ \mathrm{m/s},\ a_S = -10\ \mathrm{m/s^2}$ b) $v_0 = 0,\ a_S = 10\ \mathrm{m/s^2}$

Mit den hier im Diagramm gewählten sehr kleinen Werten für v_0 lassen sich keine nennenswerten Abweichungen zwischen relativistischer und nicht relativistischer Betrachtung aufzeigen. Daher wurden Berechnungen durchgeführt, die als Basis eine Systemgeschwindigkeit von 369 km/s aufweisen. Wie bereits in verschiedenen anderen Fällen dargelegt, ist dies die Geschwindigkeit, mit der sich unser Sonnensystem zur gleichmäßigen kosmischen Hintergrundstrahlung bewegt und damit von großem Interesse für evtl. durchzuführende Versuche ist. Es bleibt noch die Frage zu klären, wie groß der Unterschied im vorliegenden Fall zwischen relativistischer und nicht relativistischer Betrachtung ist. Um dies zu zeigen, wurden in die Tabelle ebenfalls Werte für den nicht relativistischen Fall (Galilei) hinzugefügt. Diese Beziehungen sind bekanntlich gegeben durch

$$v = a \cdot t \tag{6.75}$$

$$x = \frac{1}{2}\, a \cdot t^2 \tag{6.76}$$

Wird angenommen, dass ein Raumschiff die Erde mit 369 km/s passiert und mit $10\mathrm{m/s^2}$ abbremst, so würde bei nicht relativistischer Betrachtung die maximale Entfernung in einem Abstand von ca. $6{,}8 \cdot 10^6$ km erreicht (Teilbild a, Punkt P_2). Die Gesamtzeit, bis die Erde bei P_3 wieder erreicht wird, liegt bei etwa 20,5 Stunden. Die genauen Werte und auch die für eine relativistische Betrachtung berechneten Ergebnisse sind in nachfolgender Tabelle (Tab. 6.1) zusammengestellt.

In dieser Darstellung ist eine Reihe von Informationen enthalten, die im Folgenden aufgeschlüsselt werden. Dazu ist es erforderlich, die Abfolge der Berechnungen zu beachten. Zuerst wird das Teilbild a) betrachtet:

1. $P_1 \rightarrow P_2$
   Es werden die Werte $t_S(P_2)$ aus Gl. (6.67), $t_A(P_2)$ aus Gl. (6.71) und $x_A(P_2)$ aus Gl. (6.74) für die Randbedingung $v_A = 369$ km/s berechnet. Die Nutzung von Gl. (6.74) ist zulässig, obwohl diese für den Fall $v_A = 0$ abgeleitet wurde; aus Symmetriegründen wird hier einfach der Fall $P_2 \rightarrow P_1$ betrachtet und auf $P_1 \rightarrow P_2$ übertragen.
2. $P_2 \rightarrow P_3$
   Aus Symmetriegründen müssen die Werte von $t_S(P_3)$ und $t_N(P_3)$ doppelt so groß sein wie für (P_2). Definitionsgemäß ist $x_A(P_3) = 0$.

Für das Teilbild b) gilt entsprechend:

1. $Q_1 \rightarrow Q_2$
   Aus Symmetriegründen gilt $t_S(P_2) = t_S(Q_2)$, $t_A(P_2) = t_A(Q_2)$ und $x_A(P_2) = x_A(Q_2)$.
2. $Q_2 \rightarrow Q_3$
   Hier wird die Voraussetzung genutzt, dass sich subjektiv innerhalb von unterschiedlich bewegten Inertialsystemen bei gleichen Zustandsänderungen keine Unterschiede ergeben dürfen, d. h. es wird $t_S(P_3) = t_S(Q_3)$ gesetzt (die beiden Felder sind grün und mit Pfeil gekennzeichnet). Ist diese Annahme korrekt, dürfen sich bei einem späteren Ergebnisvergleich keine Unterschiede zeigen. Zunächst wird dann der Wert für $v_A(Q_3)$ aus Gl. (6.71) berechnet, dann $t_A(Q_3)$ aus Gl. (6.67) und $x_A(Q_3)$ aus Gl. (6.74).

Pos.	Kriterium	v_A	t_S	t_A	x_A
P_1		369	0	0	0
P_2	relativ.	0	36900,0186344619	36900,0279516977	6808057,73532358
P_2	Galilei	0	36900	36900	6808050
P_3	relativ.	-369	73800,0372689239	73800,0559033954	0
P_3	Galilei	-369	73800	73800	0
Q_1		0	0	0	0
Q_2	relativ.	369	36900,0186344619	36900,0279516977	6808057,73532358
Q_2	Galilei	369	36900	36900	6808050
Q_3	relativ.	737,998881935078	73800,0372689239	73800,1118068352	27232241,2567440
Q_3	Galilei	738	73800	73800	27232200
R_3	relativ.	369	73800,0559034565	73800,1118068942	27232241,2567440
R_3	Galilei		73800	73800	27232200
δ_K			$-8{,}28559 \cdot 10^{-13}$	$-8{,}001 \cdot 10^{-13}$	

Tab. 6.1 Ergebnisse von Berechnungen für $v_0 = 369$ km/s und $a_S = -10$ m/s^2 (Werte P) bzw. 10 m/s^2 (Werte Q) für nicht relativistischen Ansatz (Galilei) und relativistisch. Punkte sind definiert gemäß Abb. 6.3.

Für eine weitere Bewertung muss noch der Fall berechnet werden, wie sich im Teilbild b) die Situation für einen linear (unbeschleunigt) bewegten Beobachter ergibt (blaue Linie). Hierfür wird die Randbedingung genutzt, dass sich beschleunigte und nicht beschleunigte Beobachter am Punkt Q_3 treffen, d. h. die Werte x_N für Q_3 und R_3 müssen in diesem Fall gleich sein (auch diese Felder sind grün und mit Pfeil gekennzeichnet). Aus

$$t_A = \frac{x_A}{v_0} \tag{6.77}$$

und

$$t_S = \frac{t_A}{\gamma} \tag{6.78}$$

lassen sich dann die Werte für t_A und t_S berechnen.

Mit den hier ermittelten Daten lässt sich ein Vergleich zwischen einzelnen Werten durchführen. Als erstes werden die Werte für t_A für den beschleunigten und nicht beschleunigten Fall an der Stelle $Q_3 = R_3$ verglichen, die definitionsgemäß gleich sein müssen, da sie jeweils vom gleichen Punkt starten und enden ($Q_1 \rightarrow Q_3$ und $R_1 \rightarrow R_3$). Die Werte sind blau gekennzeichnet. Trotz unterschiedlicher Berechnungsvorschriften führen sie zum annähernd gleichen Ergebnis, wobei die Abweichung gemäß der Berechnung für

$$\delta_{K1} = \frac{t_A(Q_3)}{t_A(R_3)} - 1 \tag{6.79}$$

ermittelt wurde. Das gleiche Verhalten tritt auf, wenn die Werte für $t_A(P_3)$ und $t_S(Q_3(L))$ verglichen werden (gelb gekennzeichnet)

$$\delta_{K2} = \frac{t_A(P_3)}{t_S(R_3)} - 1 \tag{6.80}$$

Diese müssen aus folgendem Grund gleich sein: Der ruhende Beobachter in Teilbild a) stellt fest, dass die vorbeifliegende Rakete nach gleichmäßiger negativer Beschleunigung zum Zeitpunkt t_A wieder bei ihm eintrifft. Der gleichmäßig bewegte Beobachter in Teilbild b) muss subjektiv das gleiche Verhalten feststellen. Für die Situation eines ruhenden Beobachters in Teilbild b), dargestellt durch den Verlauf der gestrichelten Linie, ist in diesem Fall der Wert für t_A höher, lässt sich aber mit einfacher Division durch γ auf den subjektiven Messwert des bewegten Systems zurückführen. Es lassen sich hierbei keine relevanten Berechnungsunterschiede feststellen.

Bei den hier gewählten Randbedingungen mit $v_A = 369$ km/s treten für δ_K Abweichungen von ca. $8 \cdot 10^{-13}$ auf. Werden dagegen höhere Werte für v_A gewählt wie z. B. in Tab. 6.2 mit $v_A = 0{,}5c$ so sind im Rahmen der Kalkulationsgenauigkeit keine Abweichungen mehr feststellbar, bei kleineren Werten für v_A steigen sie dagegen an. Dies ist bedingt durch das Auftreten kleiner Werte von γ, insbesondere in Gl. (6.74). Bei kleinen Geschwindigkeiten ist der Wert für γ nur geringfügig größer als 1; wird hiervon der Wert 1 abgezogen, können sich in Abhängigkeit von der Rechengenauigkeit großen Abweichungen ergeben. Dieser Effekt wird in Anlage B, Kap. B.3 noch genauer dargestellt und hierzu eine deutliche Verbesserung der Genauigkeit durch Nutzung einer Taylor-Entwicklung demonstriert.

Statt der hier gewählten analytischen Betrachtung können die Gesetzmäßigkeiten auch numerisch ermittelt werden. Ein Verfahren hierzu ist in Anlage B zusammengestellt. Werden hierbei die auftretenden Abweichungen betrachtet, so zeigt sich bei niedrigen Werten von v_A ein Vorteil des numerischen Verfahrens, bei höheren Geschwindigkeiten ist es umgekehrt; die Genauigkeit hängt darüber hinaus wesentlich von der Anzahl der gewählten Iterationsschritte ab. Nach Durchführung der numerischen Berechnungen zeigt sich hierbei, dass sich die subjektiv vorhandene Beschleunigung zwischen unbewegtem und bewegtem Beobachter um den Faktor γ^3 unterscheidet; im Gegensatz zum analytischen Verfahren, bei dem dies durch grundsätzliche Überlegungen bestimmt wurde, ist dies ein Ergebnis der durchgeführten Berechnungen. In der Anlage sind die Ergebnisse detailliert dargestellt.

Pos.	Kriterium	v_A	t_S	t_A	x_A
P_1		149896,229	0	0	0
P_2	relativ.	0	16467783,9204409	17308525,6327320	1390379100217,26
P_2	Galilei	0	14989622,9	14989622,9	6808050
P_3	relativ.	-149896,229	32935567,8408818	34617051,2654639	0
P_3	Galilei	-149896,229	29979245,8	29979245,8	0
Q_1		0	0	0	0
Q_2	relativ.	149896,229	16467783,9204409	17308525,6327320	1390379100217,26
Q_2	Galilei	149896,229	14989622,9	14989622,9	6808050
Q_3	relativ.	239833,96640	32935567,8408818	39972327,7333333	5991701191578,78
Q_3	Galilei	299792,458	29979245,8	29979245,8	4493775893684,09
R_3	relativ.	149896,229	34617051,2654639	39972327,7333333	5991701191578,78
R_3	Galilei	299792,458	29979245,8	29979245,8	4493775893684,09
δ_K			0	0	

Tab. 6.2 Ergebnisse von Berechnungen für $v_0 = 0{,}5c$ und $a_S = -10\ \mathrm{m/s^2}$ (Werte P) bzw. $a_S = 10\ \mathrm{m/s^2}$ (Werte Q) für nicht relativistischen Ansatz (Galilei) und relativistisch. Punkte sind definiert gemäß Abb. 6.3.

Bei einer Bewertung der gewählten Randbedingungen wird klar, dass ein solcher Raketenantrieb derzeit nicht existiert; man könnte hiermit z. B. den Mars in wenigen Tagen erreichen. Noch deutlicher wird dies, wenn eine lange Reise unter den hier gewählten Vorgaben betrachtet wird. Wird angenommen, dass ein Körper von 100 to mit 1g konstant beschleunigt die Galaxis durchquert (100.000 Lichtjahre, subjektive Zeit an Bord: ca.12 Jahre), so müsste die Ursprungsrakete, auch wenn eine optimale Umwandlung von Masse in kinetische Energie unterstellt wird, bei Abflug eine Größe von 14 x 14 x 14 km^3 aufweisen, wenn eine Treibstoffdichte von 70 $\mathrm{kg/m}^3$ angenommen wird [91]. Hierbei sind noch keine Aussagen zum Abbremsen der Rakete nach der Reise oder über den Einfluss von Mikrometeoriten und Gas bezüglich eines Bremseffektes, bzw. dem Schutz der Passagiere durch zusätzlich erforderliche Massen aufgrund erforderlicher Abschirmvorrichtungen enthalten.

Trotz der offensichtlichen Unmöglichkeit einer Umsetzung im großtechnischen Maßstab sind die hier errechneten Ergebnisse aber eindeutig und zeigen auf, dass – obwohl die Einflüsse klein sind – sie bei genauer Betrachtung auch geringer Beschleunigungsphasen berücksichtigt werden müssen.

Abschließend soll noch generell die Frage zum Einfluss der Beschleunigung auf die Messungen untersucht werden. Gemäß der Allgemeinen Relativitätstheorie ist es für einen Beobachter nicht zu unterscheiden, ob er einem Beschleunigungseffekt aufgrund einer sich ändernden Geschwindigkeit oder einem Schwerefeld ausgesetzt ist. Obwohl nicht eindeutig klar ist ob auch bei Beschleunigungen eine zusätzliche (gravitative) Zeitdilatation auftritt, soll deren potenzielle Größe im Folgenden abgeschätzt werden.

Bei den hier gewählten Bedingungen mit einem Beschleunigungswert von $10\ \mathrm{m/s^2}$, der ungefähr dem Effekt der Erdanziehung von $9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$ entspricht, ergibt sich eine durch vielfache Messungen bestätigte Zeitdilatation von etwa $7 \cdot 10^{-10}$ [80]. Wird dieser Wert mit der Gesamtzeit aus Tab. 6.2 multipliziert so ergibt sich ein Effekt von $5{,}17 \cdot 10^{-5}$ s. Dies würde bedeuten, dass sich die errechnete Zeitdifferenz zwischen relativistischer und nicht relativistischer Betrachtung um einen Wert von 0,28% verlängert. Eine gesonderte Berücksichtigung ist daher aufgrund der geringen Abweichung nicht erforderlich.

6.4.2 Relativistischer Raketenantrieb

Es stellt sich nun die Frage, wie sich in der Realität eine Rakete verhält, die durch ausströmendes Gas angetrieben wird und dementsprechend Masse verliert. Ein Beobachter B, der diesen Vorgang aus einem anderen Inertialsystem beobachtet und für S und A bei Versuchsbeginn die Geschwindigkeit v_0 misst, wird aufgrund der Zeitdilatation und der relativistischen Massenzunahme Unterschiede zu den Messungen von S feststellen, und zwar

1. Die Menge des austretenden Gases pro Zeiteinheit ist um den Faktor $\gamma(v_0)$ geringer.
2. Die Masse der einzelnen Gasmoleküle ist um den Faktor $\gamma(v_0)$ vergrößert.
3. Die verbleibende Masse der Rakete hat sich um den Faktor $\gamma(v_0)$ vergrößert.
4. Die Ausströmgeschwindigkeit des Gases entspricht den Gegebenheiten der relativistischen Geschwindigkeitsaddition.
5. Die Signalabstände sind um den Faktor $\gamma(v_0)$ vergrößert.
6. Die Gesamtzeit für die Beschleunigung ist um den Faktor $\gamma(v_0)$ vergrößert.

Zur exakten Bestimmung der Situation müssen sämtliche Einflüsse durch diese Kriterien bezüglich der jeweilige Reduzierung der Raketenmasse aufgrund des Gasausstoßes berechnet werden. Diese Gegebenheiten werden für Fälle mit konstantem Gasausstoß (der zu einem stetigen Ansteigen der Beschleunigung führt) und mit ständig reduziertem Gasausstoß (zur Sicherstellung einer konstanten Beschleunigung) betrachtet.

Zur Aufstellung der für diese Fragestellung relevanten Gleichungen wird der relativistische Impuls benutzt. Es wird vorab festgelegt, dass alle Funktionen, die sich auf das ausströmende Gas beziehen mit f' gekennzeichnet werden; Beziehungen, die auf die bewegte Rakete verweisen, werden dagegen ohne diese Kennzeichnung dargestellt.

Dies vorausgesetzt ergibt sich allgemein für den relativistischen Impuls einer Rakete vor dem Beginn der Beschleunigung

$$p_0 = m_0 v_0 \gamma_0 \tag{6.81}$$

wobei v_0 die Anfangsgeschwindigkeit relativ zum Bezugsystem des jeweiligen Beobachters ist. Nach dem ersten Schritt erhält man für die Rakete

$$p_1 = m_1 v_1 \gamma_1 \tag{6.82}$$

wobei die Werte für den Schritt 1 folgendermaßen berechnet werden:

1. Es wird angenommen, dass während dieses ersten Schritts aus der Rakete ein Massenanteil Δm_0 mit der Geschwindigkeit v_0' als Gas austritt; dieses ausströmende Gas wird in der Raketentechnologie auch als „Stützmasse" bezeichnet.

2. Der Impuls der Rakete p_1 (bezogen auf die verbleibende Masse $m_1 = m_0 - \Delta m_0$) sowie p_1' der Stützmasse Δm_0 werden addiert und mit dem zuvor bestimmten Impuls p_0 der Rakete gleichgesetzt (Nutzung des Impulserhaltungssatzes). Daraus wird die sich ändernde Geschwindigkeit der Rakete berechnet. Dies ergibt

$$p_1 + p_1' = (m_0 - \Delta m_0) v_1 \gamma_1 + \Delta m_0 v_1' \gamma_1' = m_0 v_0 \gamma_0 \tag{6.83}$$

oder allgemein

$$p_K + p_K' = (m_{K-1} - \Delta m_{K-1}) v_K \gamma_k + \Delta m_{K-1} v_K' \gamma_K' = m_{K-1} v_{K-1} \gamma_{K-1} \tag{6.84}$$

Hierbei haben v und v' unterschiedliche Richtungen (daher das „+" in der Formel). Bezogen auf die Rakete hat das Gas die konstante Austrittsgeschwindigkeit v_0'. Damit gilt die relativistische Geschwindigkeitsaddition

$$v_K' = \frac{v_K + v_0'}{1 + \frac{v_K v_0'}{c^2}} \tag{6.85}$$

Für jeden dieser Schritte K kann nun aus den Gleichungen (6.84) und (6.85) die Geschwindigkeit der Rakete v_K berechnet werden; es handelt sich hierbei also um zwei ineinander geschachtelte numerische Beziehungen.

Zur Durchführung einer solchen Berechnung wurde eine Programmierung in Visual Basic (VBA) vorgenommen. Der VBA Programm-Code ist in Anlage C mit den entsprechenden Formeln und einem Flussdiagramm zusammengestellt. Der wesentliche Zweck dieser Berechnungen ist die Gegenüberstellung von Systemen, die sich zum Zeitpunkt des Versuchsstarts im Ruhezustand und hierzu relativ bewegt befinden. Dazu wurden exemplarisch zwei Berechnungsvarianten programmiert, wobei erstens die Beschleunigung sowie im zweiten Fall die Ausströmgeschwindigkeit der Stützmasse konstant gehalten wurde.

a) Stützmasse proportional zur verbleibenden Masse der Rakete

Hierbei ergeben sich über den gesamten Betrachtungszeitraum konstante Beschleunigungswerte für die Rakete. Diese Situation entspricht somit dem bereits in Kap. 6.4.1 beschriebenen Fall.

In der Tabelle 6.3 sind Ergebnisse von zwei Berechnungen mit stark unterschiedlichen Ausgangsgeschwindigkeiten wiedergegeben, wobei hier $v_0 = 0$ und $v_0 = 0{,}5c$ gewählt wurden. Um einen Vergleich der Ergebnisse untereinander zu ermöglichen, wurde dabei die Endgeschwindigkeit der Rakete aus Sicht eines ruhenden Beobachters als Differenz $v_T = v_N - v_0$ dargestellt. Der Wert t_T ist die Gesamtzeit, die sich aus Sicht des unbewegten Systems bei Anwendung der Lorentz-Gleichungen subjektiv für einen mit Systemgeschwindigkeit v_0 bewegten Beobachter bis zum Eintreffen eines Signals aus der Rakete ergibt.

Ergänzend ist der aus Sicht des ruhenden Beobachters bis zur Ausstrahlung des Impulses zurückgelegte Weg x_N aufgeführt. Weiterhin ist die sich bei der Berechnung ergebende Masse m_N der Rakete nach Abschluss des Versuchs dargestellt (bezogen auf den Ausgangswert $m_0 = 1$). Außerdem sind die Werte für die Beschleunigungen a_N und auch die Berechnung für $\gamma^3 a_N$ angegeben.

K	N	v_T	t_T	m_N	x_N	a_N	$\gamma^3 a_N$
1	10	3,9999999999413	400,00266852469	0,3486784401000	800,0000000579	9,9999999975878	10,000000000258
2	10^2	3,9999999999407	400,00266852463	0,3660323412732	800,0000000592	9,9999999973564	10,000000000027
3	10^3	3,9999999999408	400,00266852463	0,3676954247710	800,0000000594	9,9999999973343	10,000000000005
4	10^4	3,9999999999424	400,00266852463	0,3678610464329	800,0000000596	9,9999999973292	10,000000000000
5	10^5	3,9999999999581	400,00266852464	0,3678776017666	800,0000000616	9,9999999975070	10,000000000177
6	10^6	4,0000000001169	400,00266852155	0,3678792572316	800,0000000717	9,9999999975070	10,000000000177
7	10^7	4,0000000016930	400,00266859493	0,3678794227775	800,0000004935	10,000000005125	10,000000007795
		δv_T	δt_T	δm_N	δx_N	δa_N	$\delta\gamma^3 a_N$
1/2		$-5{,}7021 \cdot 10^{-13}$	$-5{,}7980 \cdot 10^{-11}$	$1{,}7354 \cdot 10^{-2}$	$1{,}2930 \cdot 10^{-9}$	$-2{,}3141 \cdot 10^{-10}$	$-2{,}3141 \cdot 10^{-10}$
2/3		$1{,}3989 \cdot 10^{-13}$	$-1{,}0232 \cdot 10^{-12}$	$1{,}6631 \cdot 10^{-3}$	$1{,}3006 \cdot 10^{-10}$	$-2{,}2089 \cdot 10^{-11}$	$-2{,}2089 \cdot 10^{-11}$
3/4		$1{,}5601 \cdot 10^{-12}$	0	$1{,}6562 \cdot 10^{-4}$	$2{,}1396 \cdot 10^{-10}$	$-5{,}0804 \cdot 10^{-12}$	$-5{,}0804 \cdot 10^{-12}$
4/5		$1{,}5710 \cdot 10^{-11}$	$8{,}98 \cdot 10^{-12}$	$1{,}6555 \cdot 10^{-5}$	$2{,}0430 \cdot 10^{-9}$	$1{,}7776 \cdot 10^{-10}$	$1{,}7776 \cdot 10^{-10}$
5/6		$1{,}5883 \cdot 10^{-10}$	$-3{,}09 \cdot 10^{-9}$	$1{,}6555 \cdot 10^{-6}$	$1{,}0087 \cdot 10^{-8}$	0	0
6/7		$1{,}5760 \cdot 10^{-9}$	$7{,}3485 \cdot 10^{-8}$	$1{,}6555 \cdot 10^{-7}$	$4{,}2175 \cdot 10^{-7}$	$7{,}6180 \cdot 10^{-9}$	$7{,}6180 \cdot 10^{-9}$

K	N	v_T	t_T	m_N	x_N	a_N	$\gamma^3 a_N$
1	10	2,9999709803087	400,00266851663	0,3486784401000	69235026,29063	6,4951038669616	10,000066715204
2	10^2	2,9999700801272	400,00266851582	0,3660323412732	69235026,29036	6,4950395173348	9,9999676404299
3	10^3	2,9999699985783	400,00266851575	0,3676954247710	69235026,29034	6,4950389552623	9,9999667750399
4	10^4	2,9999700695917	400,00266851581	0,3678610464329	69235026,29036	6,4950385228968	9,9999661093612
5	10^5	2,9999708701507	400,00266851649	0,3678776017666	69235026,29059	6,4950356404560	9,9999616715177
6	10^6	2,9999825792620	400,00266852517	0,3678792572316	69235026,29360	6,4949779917004	9,9998729144571
7	10^7	3,0001320510055	400,00266865907	0,3678794227775	69235026,33995	6,4955544754057	10,000760496920
		δv_T	δt_T	δm_N	δx_N	δa_N	$\delta\gamma^3 a_N$
1/2		$-9{,}0018 \cdot 10^{-7}$	$-8{,}1502 \cdot 10^{-10}$	$1{,}7354 \cdot 10^{-2}$	$-2{,}6439 \cdot 10^{-4}$	$-6{,}4350 \cdot 10^{-5}$	$-9{,}9075 \cdot 10^{-5}$
2/3		$-8{,}1549 \cdot 10^{-8}$	$-7{,}2987 \cdot 10^{-11}$	$1{,}6631 \cdot 10^{-3}$	$-2{,}5108 \cdot 10^{-5}$	$-5{,}6207 \cdot 10^{-7}$	$-8{,}6539 \cdot 10^{-7}$
3/4		$7{,}1013 \cdot 10^{-8}$	$6{,}4006 \cdot 10^{-11}$	$1{,}6562 \cdot 10^{-4}$	$2{,}2203 \cdot 10^{-5}$	$-4{,}3237 \cdot 10^{-7}$	$-6{,}6568 \cdot 10^{-7}$
4/5		$8{,}0056 \cdot 10^{-7}$	$6{,}7701 \cdot 10^{-10}$	$1{,}6556 \cdot 10^{-5}$	$2{,}3431 \cdot 10^{-4}$	$-2{,}8824 \cdot 10^{-6}$	$-4{,}4378 \cdot 10^{-6}$
5/6		$1{,}1709 \cdot 10^{-5}$	$8{,}6780 \cdot 10^{-9}$	$1{,}6555 \cdot 10^{-6}$	$3{,}0045 \cdot 10^{-3}$	$-5{,}7649 \cdot 10^{-5}$	$-8{,}8757 \cdot 10^{-5}$
6/7		$1{,}4947 \cdot 10^{-4}$	$1{,}3391 \cdot 10^{-7}$	$1{,}6555 \cdot 10^{-7}$	$4{,}6355 \cdot 10^{-2}$	$5{,}7648 \cdot 10^{-4}$	$8{,}8758 \cdot 10^{-4}$

Tab. 6.3: Werte für v_T, t_T, m_N, x_N, a_N, $\gamma^3 a_N$ bei proportionaler Abnahme der Stützmasse. Oben: $v_0 = 0$, unten: $v_0 = 0{,}5\,c$ (149.896,458 km/s). $\Delta m_0 = 0{,}25\%/\text{s}$, $t_S = 400\text{s}$. Die Angaben für m_N sind normiert auf 1. Angaben für v_T in km/s, t_T in s, x_N in km, a_N und $\gamma^3 a_N$ in m/s^2.

Als Massenverlust wurde $\Delta m_0 = 0{,}25\%/\mathrm{s}$ festgelegt. Dieser führt zu einer Beschleunigung von $10\mathrm{m/s}^2$ und damit ist eine Vergleichbarkeit mit den anderen bereits durchgeführten Berechnungen gegeben. Als Versuchszeit wurde $t_S = 400\mathrm{s}$ gewählt, und damit verbleibt nach Abschluss des Versuchs die realistische Größe einer Restmasse von fast 37% des Ausgangswertes. Zur besseren Bewertung sind die Abweichungen zwischen $\delta v_T = v_T(K)$ und $v_T(K-1)$ gemäß den auch sonst benutzten Beziehungen (z. B. wie in Gl. (6.79) definiert), sowie in gleicher Weise für δt_T, δm_N, δx_N, a_N und $\gamma^3 a_N$ dargestellt, wobei K hier jeweils einer Zehnerpotenz in der Anzahl der Berechnungsschritte zwischen 10 und 10^7 entspricht (vgl. Tab. 6.3). Zunächst ist grundsätzlich festzuhalten, dass die Werte für δv_T, δt_T und δx_N unsystematische Schwankungen zeigen und im Bereich der Anzahl von Iterationsschritten zwischen $\mathrm{N} = 10^2$ und 10^4 die geringsten Abweichungen voneinander aufweisen. Hiermit ist klar, dass die sichtbaren Unterschiede nicht durch einen physikalisch erklärbaren Effekt, sondern nur durch die Verwendung des numerischen Verfahrens hervorgerufen werden.

Des Weiteren ist festzustellen, dass die Größe der verbleibenden Masse m_N mit jeder Erhöhung um den Faktor 10 bei der Anzahl von Iterationsschritten im Ergebnis ebenfalls um den gleichen Faktor genauer wird (Iteration $10^3 \rightarrow 10^4 = 1.6562 \cdot 10^{-4}$; $10^4 \rightarrow 10^5 = 1.6566 \cdot 10^{-5}$ usw. vgl. Tab. 6.3). Dies ist hier nicht weiter von Bedeutung und daher wird an dieser Stelle auf eine Bewertung verzichtet; das ändert sich aber bei den nachfolgenden Betrachtungen für den Fall der konstanten Stützmasse und wird dort weiter untersucht.

Die Ergebnisse der Berechnungen für $\gamma^3 a_N$ zeigen erneut, dass das Verhältnis für die Beschleunigungen zwischen unterschiedlich bewegten Beobachtern der Faktor γ^3 ist.

Die hier getroffene Festlegung mit proportionalem Massenverlust bezüglich der Restmasse erlaubt einen direkten Vergleich mit den analytischen und numerischen Ergebnissen aus Kap. 6.4.1., und die Übereinstimmung erweist sich als sehr gut. Eine detaillierte Auswertung ist in Anlage B.4 dargestellt.

b) Stützmasse konstant

Dieser Fall erweist sich als deutlich komplexer bezüglich der Auswertung im Vergleich zur zuvor diskutierten Situation. Dies liegt daran, dass die für die Betrachtung wichtigen Größen v_T, t_T und x_N das gleiche Verhalten aufweisen wie zuvor m_N und mit steigender Anzahl an Iterationsschritten genauer werden. Sie müssen deshalb besonders analysiert werden (im Gegensatz zum Fall zuvor zeigt m_N dieses Verhalten hier nicht!).

Deutlich wird dies bei der Betrachtung des in Tab. 6.4 dargestellten Falls. Im oberen Teil der Tabelle sind wie zuvor die Ergebnisse der Berechnungen der relevanten Größen angegeben, darunter folgt – mit Sektion I gekennzeichnet – die Zusammenstellung der Abweichungen δv_T, δt_T, δm_N und δx_N. Die erste und die letzte Berechnung weicht in den Werten von der Systematik der anderen Ergebnisse ab und wurde nicht weiter berücksichtigt. Es wurden deshalb nur die blau eingefärbten Felder für weiterführende Berechnungen genutzt und die in Sektion II wiedergegebenen Werte daraus extrapoliert. Die im unteren Bereich der Tabelle dargestellten Ergebnisse ergeben sich aus diesen Berechnungen. Die Massenabnahme wurde auf $\Delta m_0 = 0{,}5\%/\mathrm{s}$ festgelegt, was bei für den hier gewünschten Massenendwert von 50% zu einer Versuchsdauer von $t_0 = 100\mathrm{s}$ führt.

In der Anlage C sind neben der Herleitung des Programmaufbaus weitere Ergebnisse der Berechnungen für unterschiedliche Randbedingungen in den Tabellen C.2, C.3 und C.4

dargestellt. Neben den Werten für die Systemgeschwindigkeit $v_0 = 0$ wurden zur besseren Übersicht auch noch Ergebnisse für 369 km/s, 2.000 km/s und 10.000 km/s hinzugefügt. Bei diesen Fällen wurde auch mit einem Wert von 10% eine geringere verbleibende Restmasse nach dem Versuch festgelegt.

N	v_T	t_T	m_N	x_N	Δt_o
10	2,67508561278727	100,000397329364	0,500000000000000	119,116010675216	10
10^2	2,76261372200990	100,000408141269	0,500000000000000	122,357320955608	1
10^3	2,77158897232187	100,000409292747	0,500000000000055	122,702523336750	10^{-1}
10^4	2,77248872482278	100,000409408634	0,500000000000055	122,737265091767	10^{-2}
10^5	2,77257872237194	100,000409420246	0,499999999996724	122,740741494222	10^{-3}
10^6	2,77258772224753	100,000409422400	0,500000000041133	122,741089155569	10^{-4}
10^7	2,77258862465211	100,000409440862	0,499999999708066	122,741124020357	10^{-5}
	δv_T	δt_T	δm_N	δx_N	
$\bar{x}$	8,9931	$1,4064 \cdot 10^{-3}$		$3,4698 \cdot 10^{2}$	
10^2	$8,7528 \cdot 10^{-2}$	$1,0812 \cdot 10^{-5}$	0	3,2413	I
10^3	$8,9753 \cdot 10^{-3}$	$1,1515 \cdot 10^{-6}$	$5,4956 \cdot 10^{-14}$	$3,4520 \cdot 10^{-1}$	
10^4	$8,9975 \cdot 10^{-4}$	$1,1589 \cdot 10^{-7}$	0	$3,4742 \cdot 10^{-2}$	
10^5	$8,9998 \cdot 10^{-5}$	$1,1612 \cdot 10^{-8}$	$-3,3309 \cdot 10^{-12}$	$3,4764 \cdot 10^{-3}$	
10^6	$8,9998 \cdot 10^{-6}$	$2,1540 \cdot 10^{-9}$	$4,4409 \cdot 10^{-11}$	$3,4766 \cdot 10^{-4}$	
10^7	$9,0240 \cdot 10^{-7}$	$1,8462 \cdot 10^{-8}$	$-3,3307 \cdot 10^{-10}$	$3,4865 \cdot 10^{-5}$	
10^8	$8,9931 \cdot 10^{-8}$	$1,4069 \cdot 10^{-11}$		$3,4698 \cdot 10^{-6}$	
10^9	$8,9931 \cdot 10^{-9}$	$1,4069 \cdot 10^{-12}$		$3,4698 \cdot 10^{-7}$	
10^{10}	$8,9931 \cdot 10^{-10}$	$1,4211 \cdot 10^{-13}$		$3,4698 \cdot 10^{-8}$	
10^{11}	$8,9931 \cdot 10^{-11}$	0		$3,4698 \cdot 10^{-9}$	
10^{12}	$8,9933 \cdot 10^{-12}$	0		$3,4699 \cdot 10^{-10}$	
10^{13}	$8,9928 \cdot 10^{-13}$	0		$3,4703 \cdot 10^{-11}$	
10^{14}	$9,0150 \cdot 10^{-14}$	0		$3,4674 \cdot 10^{-12}$	II
10^{15}	$8,8818 \cdot 10^{-15}$	0		$3,4106 \cdot 10^{-13}$	
10^{16}	0	0		0	
	v_T	t_T		x_N	
10^7	2,77258862155768	100,000409422541		122,741123853607	
10^8	2,77258871148869	100,000409422555		122,741127323411	
10^9	2,77258872048179	100,000409422556		122,741127670391	
10^{10}	2,77258872138110	100,000409422556		122,741127705089	
10^{11}	2,77258872147103	100,000409422556		122,741127708559	
10^{12}	2,77258872148003	100,000409422556		122,741127708906	
10^{13}	2,77258872148093	100,000409422556		122,741127708941	
10^{14}	2,77258872148102	100,000409422556		122,741127708944	
10^{15}	2,77258872148102	100,000409422556		122,741127708945	
10^{16}	2,77258872148102	100,000409422556		122,741127708945	

Tab. 6.4: Werte für v_T, t_T, m_N und x_N bei linearer Abnahme der Stützmasse. Sektion I: Berechnungen, Sektion II: extrapoliert. Alle Angaben in km und s. Typ: A1, $v_0' = -4$ km/s, $\Delta m_0 = 0{,}5\%/s$, $t_0 = 100$s, $v_0 = 0$

Auch hier ergeben sich die wichtigsten Aussagen aus dem Vergleich der berechneten Zeiten für t_T, die die Signallaufzeiten bis zum Erreichen eines mit v_0 bewegten Beobachters, berechnet aus Sicht des ruhenden Systems, darstellen. Zum besseren Vergleich der Zeiten wurde in diesem Fall wie auch in anderen Fällen die Vergleichsgröße

$$\delta t_T = \frac{t_T(v_K)}{t_T(v_{K-1})} - 1 \tag{6.86}$$

gewählt. In Tabelle 6.5 sind die Ergebnisse der Werte für t_T und δt_T zusammengestellt, wobei für t_T jeweils die letzten (für $\mathrm{N} = 10^{16}$) berechneten Werte wiedergegeben wurden. Es zeigen sich untereinander keine systematischen Abweichungen für die untersuchten Systemgeschwindigkeiten.

	1		2		3	
v_0	t_T	δt_T	t_T	δt_T	t_T	δt_T
0	100,000409422556		1.000,00992905474		10.002,4827416511	
369	100,000409421505	$1{,}05 \cdot 10^{-11}$	1.000,00992904501	$9{,}73 \cdot 10^{-12}$	10.002,4827411418	$5{,}09 \cdot 10^{-11}$
2000	100,000409421509	$-3{,}40 \cdot 10^{-14}$	1.000,00992904483	$1{,}76 \cdot 10^{-13}$	10.002,4827388902	$2{,}25 \cdot 10^{-10}$
10000	100,000409421471	$3{,}74 \cdot 10^{-13}$	1.000,00992904385	$9{,}82 \cdot 10^{-13}$	10.002,4827278462	$1{,}10 \cdot 10^{-9}$

Tab. 6.5: t_T und δt_T bei konstanter Stützmasse pro Zeiteinheit für verschiedene v_0. Δm_0 auf 1 normiert.
1: $v_0' = -4$ km/s, $\Delta m_0 = 0{,}5\%/s$, $t_0 = 100s$
2: $v_0' = -4$ km/s, $\Delta m_0 = 0{,}09\%/s$, $t_0 = 1.000s$
3: $v_0' = -100$ km/s, $\Delta m_0 = 0{,}009\%/s$, $t_0 = 10.000s$

Für die Betrachtung der Endgeschwindigkeit v_T ergibt sich die Möglichkeit eines Vergleichs mit den nach der klassischen Raketenformel ermittelten Werten. Die von K. E. Ziolkowski im Jahre 1903 hergeleitete Formel basiert auf der nicht relativistischen Impulsgleichung und hat das Ziel, für eine konstante Stützmasse die Endgeschwindigkeit einer Rakete in Abhängigkeit von der Austrittsgeschwindigkeit des Gases zu berechnen. Bei nicht relativistischer Betrachtung mit $v \ll c$ wird zunächst Gl. (6.85) zu

$$v_K' = v_K + v_0' \tag{6.87}$$

Zur Lösung der Gleichung Gl. (6.84) gilt die Festlegung, dass $\gamma = 1$ (da nicht relativistisch) ist. Da die Masse der Rakete mit steigendem Index K abnimmt, die Geschwindigkeit aber steigt, gilt ergänzend

$$m_K = m_{K-1} - \Delta m_{K-1} \qquad v_K = v_{K-1} + \Delta v_{K-1}$$

Außerdem werden für eine differentielle Betrachtung folgende Definitionen eingeführt:

$$m_K \to m \qquad \Delta m \to \mathrm{d}m$$

$$v_K \to v \qquad \Delta v \to \mathrm{d}v$$

Daraus ergibt sich für Gl. (6.84) der Ansatz:

$$(m + \mathrm{d}m - \mathrm{d}m)v + \mathrm{d}m(v + v_0') = (m + \mathrm{d}m)(v - \mathrm{d}v) \tag{6.88}$$

$$mv + v\mathrm{d}m + v_0'\mathrm{d}m = mv - m\mathrm{d}v\ + v\mathrm{d}m - \mathrm{d}m\mathrm{d}v \tag{6.89}$$

und damit folgt wegen $\mathrm{d}m\mathrm{d}v \to 0$

$$m\mathrm{d}v + v_0'\mathrm{d}m = 0 \tag{6.90}$$

Werden Masse und Geschwindigkeit des ausströmenden Gases (und damit der Impuls) konstant gehalten so führt die Integration von Gl. (6.90) zur klassischen Raketenformel

$$\int_0^v \mathrm{d}v = -\,v_0' \int_{m_0}^{m} \frac{\mathrm{d}m}{m} \tag{6.91}$$

$$v = v_0'\, ln\left(\frac{m_0}{m}\right) \tag{6.92}$$

wobei m_0 die Masse beim Start von einem unbewegten Ausgangspunkt ist. Sollte dieser bewegt sein, so wird die dabei vorliegende Geschwindigkeit einfach hinzuaddiert. Dies wird z. B. erforderlich beim Abwurf einer Raketenstufe, wenn die Masse sich verringert und auch der Impuls sich ändert.

Neben der klassischen Raketenformel nach Ziolkowski existiert auch eine relativistische Raketenformel. Diese wurde im Jahre 1946 von J. Akeret abgeleitet [90]. Die Herleitung ist deutlich komplexer und erfordert zusätzlich die Verwendung des Energieerhaltungssatzes; sie ist in der Anlage C unter Punkt C.4 dargestellt. Das Ergebnis der relativistischen Raketengleichung entsprechend Gl. (C.33) ist

$$\frac{v}{c} = \frac{1 - \left(\frac{m}{m_0}\right)^{2v_0'/c}}{1 + \left(\frac{m}{m_0}\right)^{2v_0'/c}} \tag{6.93}$$

Werden die klassische und die relativistische Raketengleichung mit v_R als Grenzfall für die Endgeschwindigkeit zur vorgestellten Lösung der numerisch abgeleiteten relativistischen Raketenformeln aufgefasst und die Ergebnisse aus den in Anlage C, Tabellen C2, C3 und C4 berechneten Werten für v_T jeweils damit in Beziehung gesetzt, so ergeben sich für

$$\delta_R = \frac{v_R}{v_T} - 1 \tag{6.93}$$

die in Abb. 6.4 dargestellten Zusammenhänge. Dabei wird zunächst deutlich, dass für niedrige Systemgeschwindigkeiten, insbesondere im Fall $v_0 = 0$, für Iterationsschritte von $\mathrm{N} = 10$ bis $\mathrm{N} = 10^7$ keine ausreichende Genauigkeit erreicht wird und sie daher nur mit Einschränkungen zu betrachten sind. Werden hingegen die bis $\mathrm{N} = 10^{16}$ berechneten extrapolierten Werte hinzugefügt, ergibt sich ein deutlich verbessertes Ergebnis. Werden die Werte für klassische und relativistische Raketenformel miteinander verglichen, so zeigen sich für $v_0' = -\,4$ km/s keine Unterschiede, während für $v_0' = -100$ km/s Abweichungen für kleine Systemgeschwindigkeiten ($v_0 = 0$ und 369 km/s) feststellbar sind. Hierzu wurden die Ergebnisse für die klassische Raketenformel (Ziolkowski) und relativistisch (Akeret) separat in den Teildiagrammen c) und d) dargestellt.

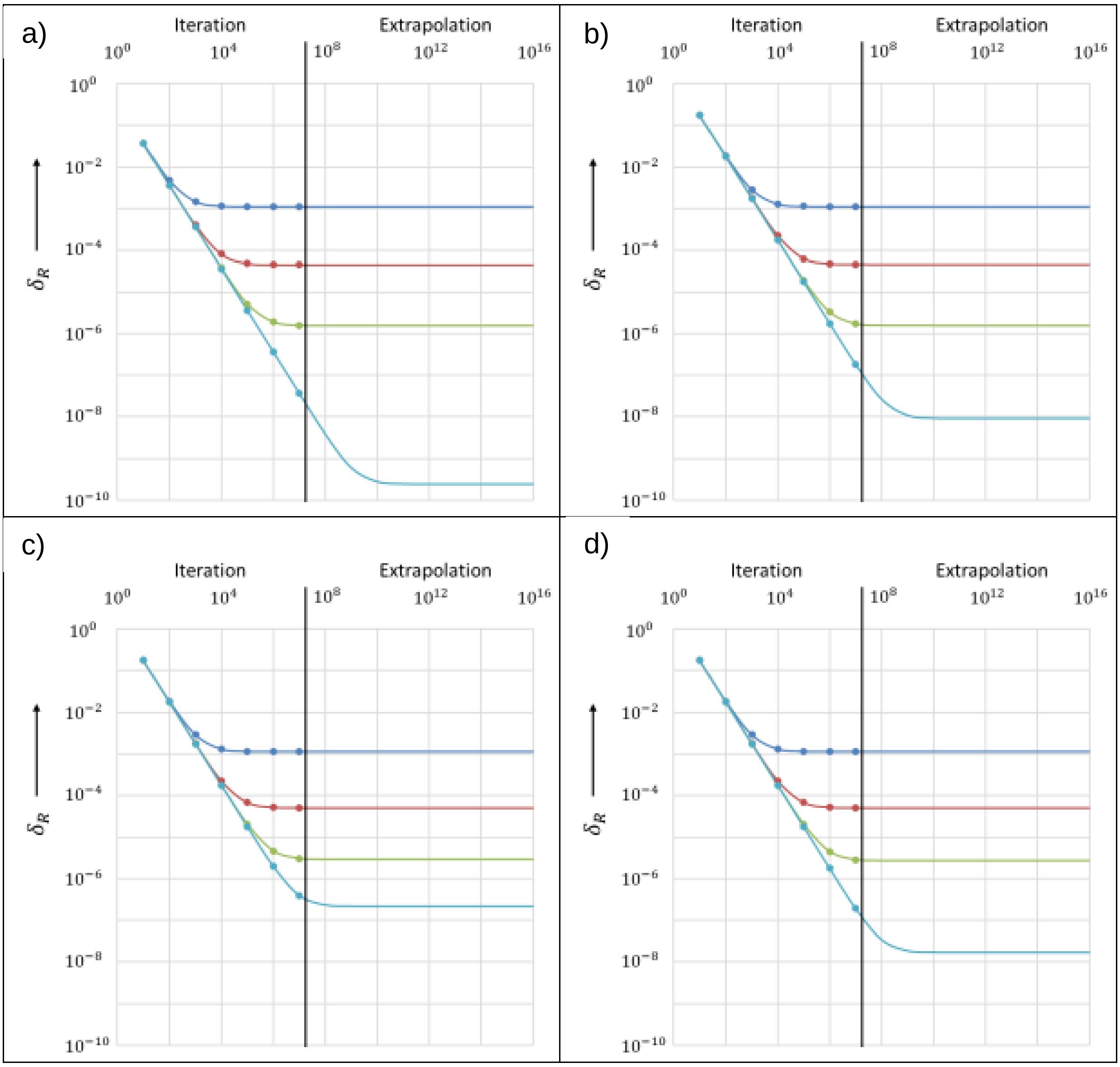


Abb. 6.4: Verhältnis δ_R zwischen Raketengleichungen und numerischer Raketenformel in Abhängigkeit von der Anzahl der Iterationsschritte aus Tab. C.2, C3 und C4.
a) $v_0' = -\,4\ \mathrm{km/s},\ \Delta m_0 = 0{,}5\%/\mathrm{s},\ t_0 = 100\mathrm{s}$
b) $v_0' = -\,4\ \mathrm{km/s},\ \Delta m_0 = 0{,}09\%/\mathrm{s},\ t_0 = 1.000\mathrm{s}$
c) und d) $v_0' = -100\ \mathrm{km/s},\ \Delta m_0 = 0{,}009\%/\mathrm{s},\ t_0 = 10.000\mathrm{s}$
c) klassisch (nach K. E. Ziolkowski), d) relativistisch (nach J. Akeret).
a) bis d) jeweils unten $v_0 = 0$ dann aufsteigend $v_0 = 369,\ 2.000, 10.000\ \mathrm{km/s}$
Δm_0 auf 1 normiert.

Um das Verhalten bei höheren Geschwindigkeiten zu bewerten, werden Ergebnisse aus den numerischen Raketengleichungen mit entsprechenden Werten aus der klassischen und der relativistischen Raketenformel verglichen. In Tab. 6.6 sind für die Parameter v_0'/c (Gasaustrittsgeschwindigkeit einer Rakete im Verhältnis zur Lichtgeschwindigkeit) sowie für das Verhältnis von End- zur Ursprungsmasse die berechneten Werte der Endgeschwindigkeit eingetragen.

Eine Bewertung ergibt, dass bis zu einer Geschwindigkeit des austretenden Gases von 0,01c keine großen Unterschiede zwischen den Berechnungen auftreten. Bei 0,1c werden die Unterschiede zwischen klassischer Raketenformel und den anderen beiden Varianten bereits deutlich und bei 0,5c wird nach dem klassischen nicht relativistischen Verfahren bei einer Massenabgabe von ca. 90% die Lichtgeschwindigkeit überschritten. Die Werte nach J. Akeret und die der eigenen numerischen Berechnung, die natürlich unterhalb der Lichtgeschwindigkeit bleiben, unterscheiden sich dabei kaum.

v_0'/c	A	B	C	A	B	C	A	B	C
m/m_0	0,01	0,01	0,01	0,1	0,1	0,1	0,5	0,5	0,5
0,5	0,006931	0,006931	0,006932	0,069315	0,069204	0,069432	0,346574	0,333333	0,362675
0,2	0,016094	0,016093	0,016093	0,160944	0,159568	0,159727	0,804719	0,666667	0,681958
0,1	0,023026	0,023022	0,023022	0,230259	0,226274	0,226122	1,151293	0,818182	0,818378
0,01	0,046052	0,046019	0,046021	0,460517	0,430506	0,428238	2,302585	0,980198	0,973447
0,001	0,069078	0,068968	0,069009	0,690776	0,598480	0,593888	3,453878	0,998002	0,996217

Tab. 6.6: Endgeschwindigkeit einer Rakete (im Verhältnis zur Lichtgeschwindigkeit) in Abhängigkeit vom Berechnungsverfahren.
Parameter oben: Gasgeschwindigkeit (im Verhältnis zur Lichtgeschwindigkeit)
Parameter links: Verhältnis von End- zur Ursprungsmasse
A: Klassisch, nach K. E. Ziolkowski
B: Relativistisch, nach J. Akeret
C. Numerisch, Berechnungen gem. Anlage C ($\Delta m_0 = 10^{-5}$ %/s, $\Delta t_S = 100$s)

Der wesentliche Unterschied zwischen analytischer und numerischer Berechnung besteht darin, dass für das analytische Verfahren keine Ausstoßmenge des Gases *pro Zeiteinheit* vorgegeben werden muss und dass damit das Ergebnis unabhängig von der während eines Raketenstarts auftretenden Beschleunigung ist. Daher gibt es auch keine Aussagen darüber, welche Entfernung die Rakete in welcher Zeit zurückgelegt hat. Für die zuvor durchgeführten Berechnungen können daher nur die gemäß des beschriebenen numerischen Verfahrens ermittelten Daten verwendet werden, die analytische bestimmte Raketenformel liefert die nötigen Information nicht.

Um dies zu verdeutlichen, werden im Folgenden Ergebnisse für Gasausstoßgeschwindigkeiten von $v_0' = -0{,}5$c und $v_0' = -100$ km/s dargestellt. In Tab. 6.7 wurden für die numerische Ermittlung Gasausstoßmengen von $\Delta m_0 = 10^{-7}$ bis 10^{-4}/s (entsprechend $\Delta m_0 = 10^{-5}$ bis 10^{-2} %/s) gewählt und auf hierfür die Werte von v_T, t_T, x_K und a_K berechnet. Zunächst ist festzustellen, dass in allen Fällen die Endgeschwindigkeit v_T für die jeweilige Gasaustrittsgeschwindigkeit konstant bleibt. Bei der Steigerung um eine Zehnerpotenz für die Gasausstoßmenge (pro Zeiteinheit) steigen die Werte für die Gesamtdauer des Versuchs t_T sowie die zurückgelegte Strecke x_K um den gleichen Faktor an. Die auftretende Beschleunigung a_K sinkt hingegen um den gleichen Betrag.

Abschließend muss noch auf einen wesentlichen Unterschied zwischen numerischem Verfahren und der relativistischen Raketenformel hingewiesen werden. Während letztere unter Verwendung des Energieerhaltungssatzes abgeleitet wurde, liegt dem numerischen Verfahren (wie auch der klassischen Raketenformel nach Ziolkowski) ausschließlich der Impulserhaltungssatz zugrunde. Für die Berechnung bedeutet dies, dass sich der Impuls des Antriebsgases durch immer stärkere Annäherung an die Lichtgeschwindigkeit beliebig steigern lassen könnte und somit bei geringem Masseausstoß extrem hohe Raketengeschwindigkeiten erreichbar wären. Dies ist jedoch nicht möglich, weil für die Beschleunigung des Ausstoßgases erhebliche Energiemengen (und damit wegen $E = mc^2$ zusätzliche Massenverluste) benötigt würden, die bei der Berechnung nicht berücksichtigt werden. Für diese extremen Werte ist daher das dargestellte numerische Verfahren nicht einsetzbar.

	v_0' = - 0,1c				v_0' = - 100km/s			
Δm_0	v_T	t_T	x_K	a_K	v_T	t_T	x_K	a_K
10^{-7}	67789,6421	9713871,60	2017951968	27,5336472	230,263962	900233,452	669757541	0,0999999043
10^{-6}	67789,6421	971387,160	2017951968	275,336472	230,263962	900233,452	66975754,1	0,9999990426
10^{-5}	67789,6421	97138,7160	2017951968	2753,36472	230,263962	90023,3452	6697575,41	9,9999904265
10^{-4}	67789,6421	9713,87160	201795196,8	27533,6472	230,263962	9002,33452	669757,541	99,999904265

Tab. 6.7: Endgeschwindigkeit v_T, Gesamtdauer t_T, zurückgelegte Strecke x_K und Beschleunigung a_K in Abhängigkeit von der Gasausstoßgeschwindigkeit v_0' und der Gasmenge (pro Zeiteinheit) Δm_0.
v_T in km/s , t_T in s, x_K in km, a_K in $\mathrm{m/s^2}$, Δm_0 in 1/s (auf 1 normiert)

Das Problem der Bestimmung des Energiebedarfs bei Raketenantrieben wird seit langem diskutiert und kann über die Definition verschiedener Verlustfaktoren gelöst werden. Als Beispiel ist die von U. Walter [91] verwendete Darstellung in Abb. 6.5 wiedergegeben.

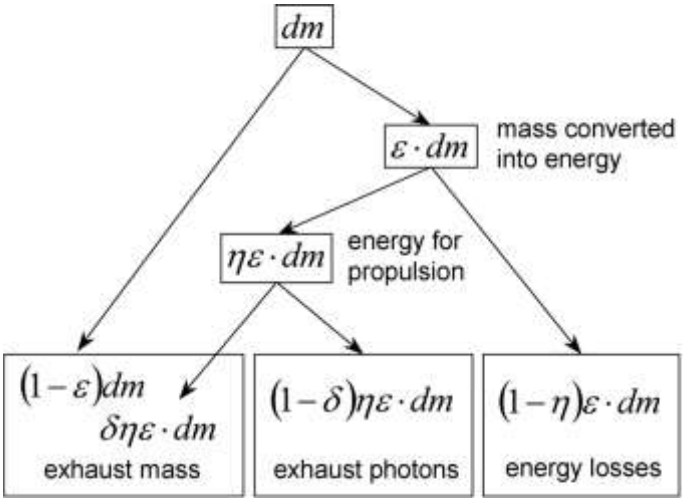


Abb. 6.5: Massenbilanz mit Verlustfaktoren beim Raketenantrieb (entnommen aus [91])

Näheres zu diesem Themenbereich kann weiterführender Literatur entnommen werden [91,92].

7. Nicht elastische Prozesse

Es wurde bereits ausführlich die Situation beim elastischen Stoß dargestellt. Die Analyse der Vorgänge bei nichtelastischen Prozessen ist für weiterführende Betrachtungen von großem Interesse und soll daher ebenfalls genau untersucht werden. Zunächst wird hierbei ausführlich der nicht elastische Stoß betrachtet, bei dem sich zwei oder mehrere Körper unter Energieaufnahme miteinander verbinden. Der umgekehrte Effekt tritt beim Partikelzerfall auf; hierbei wird durch Energieumwandlung beim Zerfall kinetische Energie freigesetzt und von den Zerfallsprodukten abgeführt. Der nicht elastische Stoß und der Partikelzerfall können somit als komplementäre Prozesse aufgefasst werden.

7.1 Relativistischer nicht elastischer Stoß

Zur relativistischen Betrachtung des nicht elastischen Stoßes werden die Sachverhalte für Beobachter mit verschiedenen Geschwindigkeiten untersucht. Dazu wird nachfolgend ein einfaches Beispiel betrachtet und anschließend werden die sich daraus ableitenden Konsequenzen diskutiert. Es wird folgendes Experiment gewählt:

Zwei Körper treffen zentral aufeinander und trennen sich nicht wieder, d. h. es tritt ideal plastisches Verhalten auf. Der Stoß soll vollkommen zentral erfolgen, so dass sich ebenfalls keine Drehbewegung einstellt. Es ist somit keine vektorielle Betrachtung erforderlich und daher ergibt sich folgender Zusammenhang für den Impuls nach dem Stoß

$$p_3 = p_1 + p_2 = m_1\gamma_1 v_1 + m_2\gamma_2 v_2 = m_3\gamma_3 v_3 \qquad (7.01)$$

wobei v_1 und v_2 die Geschwindigkeiten vor und v_3 nach dem Stoß darstellen, das gleiche gilt für die Massen m_1, m_2 und m_3. Wird angenommen, dass sich die Masse m_3 nach dem Stoß in Ruhe befindet so müssen sich aufgrund des Impulserhaltungssatzes die Werte für p_1 und p_2 gegenseitig aufheben. Dies bedeutet, dass die Beträge von p_1 und p_2 gleich sind und sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden und dass der Gesamtimpuls p_3 vor und nach dem Stoß in beiden Fällen gleich Null ist.

Die kinetische Energie vor und nach dem Stoß ist dagegen nicht gleich. Dies wird deutlich, wenn die Gleichung der kinetischen Energie vor dem Stoß aufgestellt wird (vgl. auch Darstellung in Kap. 6.1)

$$E_{kin} = (\gamma_1 - 1)m_1c^2 + (\gamma_2 - 1)m_2c^2 \qquad (7.02)$$

Wird hierbei wieder der Fall betrachtet, dass m_3 nach dem Stoß ruhen soll ist dementsprechend die kinetische Energie ebenfalls gleich Null. Da die kinetische Energie aber keine vektorielle Größe, sondern ein Skalar ist muss sie sich in eine andere Energieform umwandeln, um den Energieerhaltungssatz nicht zu verletzen. Wird angenommen, dass die Energie sich gemäß der Gl. (6.15) vollständig in Masse umwandelt entsteht also folgende Beziehung

$$\Delta m_3 = (\gamma_1 - 1)m_1 + (\gamma_2 - 1)m_2 \tag{7.03}$$

wobei Δm_3 der Massenanstieg aufgrund der Energieumwandlung ist.

Zur näheren Untersuchung dieser Zusammenhänge wird im Folgenden betrachtet, wie sich dieser Fall für einen ruhenden und einen bewegten Beobachter darstellt. Zur Vereinfachung der Rechnungen wird dabei zunächst unterstellt, dass die Massen der Körper $m_1 = m_2 = m$ gleich sind. Die Fälle werden mit A und B bezeichnet; diese Kennzeichnung wird im Folgenden zur eindeutigen Identifizierung für die entsprechenden Situationen als Index bei den geschwindigkeitsabhängigen Größen weiterverwendet. Es wird zunächst außerdem unterstellt, dass die einfache Relation $m_3 = m_1 + m_2$ gültig ist (d. h. $\Delta m_3 = 0$). Dies wird in der weiteren Betrachtung zu Widersprüchen führen und es wird sich zeigen, dass Gl. (7.03) uneingeschränkt gelten muss.

A: Bezüglich eines absolut ruhenden Beobachters A ist die Geschwindigkeit $v_{3\mathrm{A}} = 0$

Da $m_1 = m_2$ angenommen wurde bedeutet dies, dass sich vor dem Stoß die Körper mit gleicher Geschwindigkeit aber entgegengesetztem Vorzeichen aufeinander zubewegen, d. h. neben $v_{3\mathrm{A}} = 0$ gilt auch $v_{1\mathrm{A}} = -v_{2\mathrm{A}}$.

B: Bezüglich eines absolut ruhenden Beobachters B ist die Geschwindigkeit $v_{1\mathrm{B}} = 0$

Demnach beruhen alle Berechnungen auf $v_{1\mathrm{B}} = 0$.

Daraus ergeben sich die folgenden Zusammenhänge:

	Beobachter A $v_{3\mathrm{A}} = 0 \quad v_{1\mathrm{A}} = -v_{2\mathrm{A}}$	Beobachter B $v_{1\mathrm{B}} = 0$
Impuls vor dem Stoß	$p_{1\mathrm{A}} = m\gamma_{1\mathrm{A}}v_{1\mathrm{A}}$ $p_{2\mathrm{A}} = -m\gamma_{1\mathrm{A}}v_{1\mathrm{A}}$	$p_{1\mathrm{B}} = 0$ $p_{2\mathrm{B}} = m\gamma_{2\mathrm{B}}v_{2\mathrm{B}}$
Impuls nach dem Stoß	$p_{3\mathrm{A}} = 0$	$p_{3\mathrm{B}} = 2m\gamma_{3\mathrm{B}}v_{3\mathrm{B}}$
Kinetische Energie vor dem Stoß	$\frac{E_{1\mathrm{A}}}{c^2} = (\gamma_{1\mathrm{A}} - 1)m$ $\frac{E_{2\mathrm{A}}}{c^2} = (\gamma_{1\mathrm{A}} - 1)m$	$\frac{E_{1\mathrm{B}}}{c^2} = 0$ $\frac{E_{2\mathrm{B}}}{c^2} = (\gamma_{2\mathrm{B}} - 1)m$
Kinetische Energienach dem Stoß	$\frac{E_{3\mathrm{A}}}{c^2} = 0$	$\frac{E_{3\mathrm{B}}}{c^2} = 2(\gamma_{3\mathrm{B}} - 1)m$

In der Tabelle sind die sich ergebenden Beziehungen für Impuls und kinetische Energie bei identischen Versuchsbedingungen aus Sicht der Beobachter A und B zusammengefasst, die anschließend unter Nutzung der relativistischen Geschwindigkeitsaddition im Detail diskutiert werden.

7.1.1 Ergebnisse auf Basis der relativistischen Geschwindigkeitsaddition

Für Beobachter A liegt der einfache bereits dargestellte Fall $v_{1\mathrm{A}} = -v_{2\mathrm{A}}$ vor. Um die Geschwindigkeit für B zu ermitteln ist die Verwendung der relativistischen Geschwindigkeitsaddition erforderlich, die bereits ausführlich in Kap. 4.1 beschrieben wurde. Über die Symmetriebetrachtung $v_{3\mathrm{B}} = v_{1\mathrm{A}}$ führt dies zu der Beziehung

$$v_{2\mathrm{B}} = \frac{2v_{1\mathrm{A}}}{1 + \left(\frac{v_{1\mathrm{A}}}{c}\right)^2} \tag{7.04}$$

Zahlenbeispiel:

Beobachter A	$v_{1\mathrm{A}} = 0{,}5c$	$v_{2\mathrm{A}} = -0{,}5c$	$v_{3\mathrm{A}} = 0$
Beobachter B	$v_{1\mathrm{B}} = 0$	$v_{2\mathrm{B}} = 0{,}8c$	$v_{3\mathrm{B}} = 0{,}5c$

7.1.2 Ergebnisse auf Basis einer Impulsberechnung

Für den Beobachter A führt die Betrachtung des Impulses wegen $v_{1\mathrm{A}} = -v_{2\mathrm{A}}$ zum Ergebnis, dass der Gesamtwert vor und nach dem Stoß Null ergibt, d. h.

$$p_{3\mathrm{A}} = p_{1\mathrm{A}} + p_{2\mathrm{A}} = m\gamma_{1\mathrm{A}}v_{1\mathrm{A}} - m\gamma_{1\mathrm{A}}v_{1\mathrm{A}} = 0 \tag{7.05}$$

Beobachter B stellt folgenden Zusammenhang fest:

$$p_{1\mathrm{B}} = 0 \tag{7.06}$$

$$p_{2\mathrm{B}} = m\gamma_{2\mathrm{B}}v_{2\mathrm{B}} \tag{7.07}$$

$$p_{3\mathrm{B}} = 2m\gamma_{3\mathrm{B}}v_{3\mathrm{B}} \tag{7.08}$$

Aufgrund des Prinzips der Impulserhaltung müssen demnach wegen Gl. (7.01) die Werte für p_{2B} und p_{3B} gleich sein also

$$\gamma_{2\mathrm{B}}v_{2\mathrm{B}} = 2\gamma_{3\mathrm{B}}v_{3\mathrm{B}} \tag{7.09}$$

Hieraus lässt sich der Wert für $v_{3\mathrm{B}}$ in Abhängigkeit von $v_{2\mathrm{B}}$ berechnen.

Aufgrund der Struktur der Gleichung ist keine analytische Lösung möglich, sondern es muss ein numerisches Verfahren genutzt werden. In Anlage D sind hierzu verschiedene Ergebnisse dargestellt; es wurden dabei die Verwendung einfacher Rekursion, das Verfahren nach Newton und die Anwendung der Bisektion gewählt und für unterschiedliche Geschwindigkeiten von $v_{2\mathrm{B}}$ die Ergebnisse für $v_{3\mathrm{B}}$ berechnet.

Erwartungsgemäß führen alle Iterationsbeziehungen zu den gleichen Ergebnissen; die Verfahren mit einfacher Rekursion und nach Newton haben den Vorteil, dass sie bei geringen Werten von v/c schneller konvergieren. Sie haben jedoch den Nachteil, dass die

Konvergenz bei steigenden Werten von v/c immer schlechter wird und die Anwendung der Bisektion dann überlegen ist. Ab einem Wert von ca. $v/c < 0{,}9$ führt nur noch die Bisektion zu konvergenten Lösungen.

Zahlenbeispiel:

Beobachter A	$v_{1\mathrm{A}} = 0{,}5c$	$v_{2\mathrm{A}} = -0{,}5c$	$v_{3\mathrm{A}} = 0$
Beobachter B	$v_{1\mathrm{B}} = 0$	$v_{2\mathrm{B}} = 0{,}8c$	$v_{3\mathrm{B}} = 0{,}5547c$

7.1.3 Ergebnisse auf Basis der Energiebilanz

Für den Beobachter A tritt der Fall auf, dass die kinetische Energie der auftreffenden Massen vollständig in eine andere Energieform umgewandelt wird (z. B. Wärme). Dieser Energieverlust hat die Größe

$$\frac{E_{1\mathrm{A}} + E_{2\mathrm{A}}}{c^2} = 2m(\gamma_{1\mathrm{A}} - 1) \tag{7.10}$$

Für Beobachter B folgt daraus, dass die Differenz zwischen der Bilanz der kinetischen Energie vor und nach dem Stoß hierdurch ausgeglichen wird, also

$$2m(\gamma_{3\mathrm{B}} - 1) = m(\gamma_{2\mathrm{B}} - 1) - 2m(\gamma_{1\mathrm{A}} - 1) \tag{7.11}$$

$$\gamma_{3\mathrm{B}} = \frac{\gamma_{2\mathrm{B}} - 2\gamma_{1\mathrm{A}} + 3}{2} \tag{7.12}$$

Diese Gleichung lässt sich einfach analytisch lösen über

$$\frac{v_{3\mathrm{B}}}{c} = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma_{3\mathrm{B}}^2}} = \pm\sqrt{1 - \frac{4}{(\gamma_{2\mathrm{B}} - 2\gamma_{1\mathrm{A}} + 3)^2}} \tag{7.13}$$

Zahlenbeispiel:

Beobachter A	$v_{1\mathrm{A}} = 0{,}5c$	$v_{2\mathrm{A}} = -0{,}5c$	$v_{3\mathrm{A}} = 0$
Beobachter B	$v_{1\mathrm{B}} = 0$	$v_{2\mathrm{B}} = 0{,}8c$	$v_{3\mathrm{B}} = 0{,}5293c$

(Negative Ergebnisse der Wurzel haben aus Plausibilitätsgründen keine Relevanz)

7.1.4 Interpretation der Ergebnisse

In Abb. 7.1 sind die Änderungen der Geschwindigkeit aufgrund der dargestellten Abweichungen graphisch wiedergegeben. Es gelten dabei folgende Definitionen:

$$\delta = \frac{v_{3\mathrm{B}} - v_{1\mathrm{A}}}{v_{1\mathrm{A}}} \tag{7.14}$$

wobei δ_p die prozentuale Abweichung für den Impuls (Kap. 7.1.2) und δ_E für die Energie (Kap. 7.1.3) darstellt. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Werte sowohl von der Höhe als auch der Lage des Maximums keine Gemeinsamkeiten aufweisen.

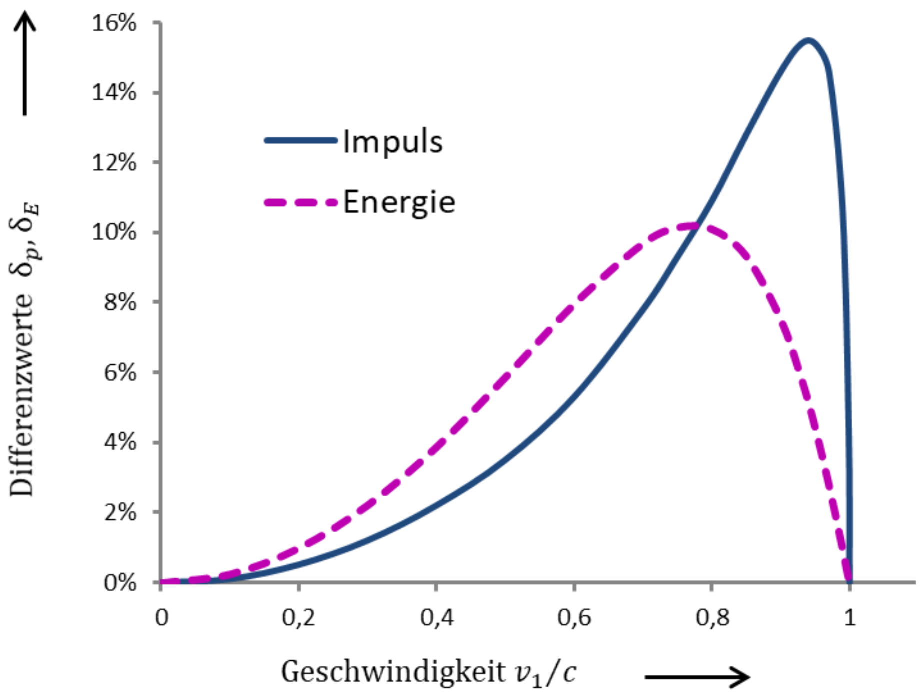


Abb. 7.1: Differenzwerte δ_p und δ_E in Abhängigkeit von v_1

Es ist offensichtlich, dass für den nicht elastischen Stoß die Anwendung der Gleichungen für die relativistische Geschwindigkeitsaddition und die Erhaltungssätze für Impuls und Energie zu jeweils unterschiedlichen Ergebnissen führen. Dies bedeutet, dass zischen Identitätsprinzip und Äquivalenzprinzip ein Konflikt auftreten würde (zur Definition der Prinzipien vgl. Kap. 1.6).

Es wurde bisher berechnet, wie groß die Geschwindigkeit v_{3B} der beiden verbundenen Massen nach dem Zusammentreffen ist, wenn für $m_3 = m_1 + m_2$ (d. h. $\Delta m_3 = 0$) Impulssatz und Energiesatz angewendet werden. Um die aufgetretenen Probleme zu lösen, wird nun der Effekt untersucht, wie groß der Einfluss auf Impuls und Energie sein muss, wenn die relativistische Geschwindigkeitsaddition ohne weitere Betrachtung gültig ist. Die im Folgenden dargestellten Ansätze ergeben sich, wenn Korrekturfaktoren C_p für den Impuls und C_E für die Energie eingeführt werden.

a) Impuls

Die Gleichung Gl. (7.09) wird modifiziert zu

$$C_p \cdot 2\gamma_{3\mathrm{B}} v_{3\mathrm{B}} = \gamma_{2\mathrm{B}} v_{2\mathrm{B}} \tag{7.15}$$

Unter Verwendung der Beziehung $v_{3\mathrm{B}} = v_{1\mathrm{A}}$ (vgl. Kap. 7.1.1) folgt

$$C_p = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v_{1\mathrm{A}}}{c}\right)^2}}{2v_{1\mathrm{A}}} \frac{v_{2\mathrm{B}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_{2\mathrm{B}}}{c}\right)^2}} \tag{7.16}$$

Wegen Gl. (7.04) ist dann

$$C_p = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{v_{1A}}{c}\right)^2}}{2v_{1A}} \frac{\frac{2v_{1A}}{1+\left(\frac{v_{1A}}{c}\right)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{\frac{2v_{1A}}{c}}{1+\left(\frac{v_{1A}}{c}\right)^2}\right)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1-\left(\frac{v_{1A}}{c}\right)^2}{\left[1-\left(\frac{v_{1A}}{c}\right)^2\right]^2}} = \sqrt{\frac{1}{1-\left(\frac{v_{1A}}{c}\right)^2}} = \gamma_{1A} \tag{7.17}$$

Dies bedeutet, dass bei uneingeschränkter Verwendung der relativistischen Geschwindigkeitsaddition der Impuls nach dem Zusammenstoß um den Faktor γ_{1A} niedriger sein muss als vom Prinzip der Impulserhaltung gefordert.

b) Energie

Die Gleichung Gl. (7.11) wird modifiziert zu

$$C_E \cdot\ 2(\gamma_{3B}-1) = (\gamma_{2B}-1) - 2(\gamma_{1A}-1) \tag{7.20}$$

Mit $v_{3B} = v_{1A}$ folgt

$$C_E = \frac{(\gamma_{2B}-1)}{2(\gamma_{1A}-1)} - 1 \tag{7.21}$$

Zur einfachen Lösung wird zunächst der Ausdruck $\gamma_{2B}-1$ betrachtet. Dieser lässt sich mit Gl. (7.04) entwickeln zu

$$\gamma_{2B} - 1 = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\frac{2v_{1A}}{c}}{1+\left(\frac{v_{1A}}{c}\right)^2}\right)^2}} - 1 \tag{7.22}$$

und daraus

$$\gamma_{2B} - 1 = \pm\frac{1+\left(\frac{v_{1A}}{c}\right)^2}{1-\left(\frac{v_{1A}}{c}\right)^2} - 1 = 2(\gamma_{1A}^2 - 1) \tag{7.23}$$

Bei dieser Kalkulation wurden für das Ergebnis aus der Wurzelberechnung nur positive Werte berücksichtigt, weil ein negativer Wert zu einem negativen Ergebnis für γ_{2B} führen würde, was physikalisch keinen Sinn ergibt. Eingesetzt in Gl. (7.21) folgt

$$C_E = \frac{2(\gamma_{1A}^2-1)}{2(\gamma_{1A}-1)} - 1 \tag{7.24}$$

$$C_E = \frac{(\gamma_{1A}+1)(\gamma_{1A}-1)}{(\gamma_{1A}-1)} - 1 = \gamma_{1A} \tag{7.25}$$

Damit ergibt sich auch hier der gleiche Faktor wie bei der Betrachtung des Impulses.

7.1.5 Abschließender Ansatz zur Berechnung

Zunächst sollen die bisher gewonnenen Erkenntnisse zusammengefasst und dann bewertet werden. Führt man bei gleichbleibender Masse vor und nach einem nichtelastischen Stoß (das bedeutet $m_3 = m_1 + m_2$; $\Delta m_3 = 0$) mittels Impuls- und Energieerhaltung Berechnungen durch, so weichen die entstehenden Ergebnisse für die Geschwindigkeit v_3 nach dem Stoß untereinander ab und sind darüber hinaus auch beide verschieden von den Werten der relativistischen Geschwindigkeitsaddition. Die errechneten Werte für die Geschwindigkeit des Verbunds v_3 sind dabei um unterschiedliche Werte höher als sie sich aus der relativistischen Geschwindigkeitsaddition ergeben.

Damit ist das Konzept der einfachen Massenaddition keine Option, da hierbei die grundlegenden Prinzipien der Energie- und/oder der Impulserhaltung verletzt werden. Wird allerdings der Ansatz aus Gleichung Gl. (7.10) zur vollständigen Umwandlung der kinetischen Energie in Masse verwendet, dann ergibt sich für diesen Fall mit $m_1 = m_2 = m$

$$\Delta m_3 = \frac{E_{1\mathrm{A}} + E_{2\mathrm{A}}}{c^2} = 2m(\gamma_{1\mathrm{A}} - 1) \tag{7.30}$$

für die sich in Masse umwandelnde kinetische Energie Δm_3 (vgl. Gl. (7.04)). Dies auf die Impulsbeziehung angewendet bleibt Gl. (7.07) *vor* der Verbindung ohne Veränderung

$$p_{2\mathrm{B}} = m\gamma_{2\mathrm{B}} v_{2\mathrm{B}} \tag{7.07}$$

Nach dem Stoß ändert sich jedoch Gl. (7.09) jedoch zu

$$p_{3\mathrm{B}} = 2m\gamma_{3\mathrm{B}} v_{3\mathrm{B}} \quad \Rightarrow \quad p_{3\mathrm{B}} = m_3\gamma_{3\mathrm{B}} v_{3\mathrm{B}} \tag{7.31}$$

Dies führt wegen $v_{1\mathrm{A}} = v_{3\mathrm{B}}$ aus der relativistischen Geschwindigkeitsaddition zu

$$p_{3\mathrm{B}} = [2m(\gamma_{1\mathrm{A}} - 1) + 2m]\gamma_{3\mathrm{B}} v_{3\mathrm{B}} = 2m\gamma_{3\mathrm{B}}^2 v_{3\mathrm{B}} \tag{7.32}$$

Die in Umkehrung der bekannten Vorgänge beim Partikelzerfall stattfindende Umwandlung von Energie in Masse kann als „negativer Massendefekt“ bezeichnet werden. Das Ergebnis entspricht genau dem Wert der gesuchten fehlenden Größe bei Impuls und Energie und führt zu dem Schluss, dass bei der relativistischen Betrachtung des nicht elastischen Stoßes stets eine vollständige Massenerhöhung in der Größe der aufgenommenen potenziellen Energie des gebildeten Verbunds angenommen werden muss, um Widersprüche zu vermeiden.

Die vollständige Energie-Masse-Umwandlung ist im atomaren Bereich nachvollziehbar, bei makroskopischen Körpern entspricht dies jedoch nicht der allgemeinen Anschauung, z. B. bei der Erzeugung von Wärme. In diesem Fall ist aber aufgrund der Definition der Wärme – mit steigendem Wärmeinhalt erhöht sich die Geschwindigkeit der im Körper vorhandenen Masseteilchen – der Energieanstieg durch die relativistische Betrachtung der Oszillationsgeschwindigkeiten der beteiligten Atome oder Moleküle gegeben. Wird dieser Themenkomplex in der Literatur behandelt, so wird meistens die Umwandlung von kinetischer Energie in Masse vorausgesetzt und dann über die Gleichungen bewiesen, z. B. [47]. Der hier dargestellte Ansatz hat aber den Vorteil, dass sich die vollständige Umwandlung der potenziellen Energie in Masse klar aus den Erhaltungssätzen für Energie und Impuls ableiten lässt.

7.2 Partikel-Spaltungs-Relationen bei relativistischer Betrachtung

Wie bereits ausgeführt, handelt es sich beim Partikelzerfall formal gesehen um die Umkehrung der Gegebenheiten beim nicht elastischen Stoß (Kap. 7.1). Da die mathematischen Zusammenhänge direkt vergleichbar sind soll hier auf eine erneute Darstellung verzichtet werden. Schwerpunkt ist stattdessen die Betrachtung der Verhältnisse in beliebigen Raumrichtungen sowie zusätzlich die Bedingungen, wenn die Energieabfuhr nicht über die kinetische Energie der gebildeten Teilchen, sondern durch Strahlung erfolgt.

Um Verwechslungen zu vermeiden, wird grundsätzlich festgelegt, dass das zerfallende Partikel mit Index 1 gekennzeichnet wird, entstehende Zerfallsprodukte mit Index 3 und 4 (und ggf. weiter steigend). Ergebnisse für einen mitbewegten Beobachter werden mit f' gekennzeichnet, ist dieser nicht bewegt mit f (ohne Markierung).

7.2.1 Allgemeine Darstellung des Zerfalls in 2 Partikel

Zur Darstellung der Vorgänge in beliebigen Raumrichtungen wird auf das Verfahren zur Bestimmung der Aberration zurückgegriffen, dass bereits in Kap. 2.3 beschrieben wurde. Die dabei geltenden geometrischen Abhängigkeiten sind in Abb. 7.2 wiedergegeben. Die Darstellungen sind vollständig vergleichbar und die Berechnungen sollen daher nicht wiederholt werden. Der einzige Unterschied ergibt sich bezüglich Gl. (2.43), in der das Verhältnis der Geschwindigkeit des bewegten Systems mit der Lichtgeschwindigkeit ins Verhältnis gesetzt wurde. Diese wird ersetzt durch

$$\text{Gl. (2.43)}: \quad \frac{b}{v} = \frac{d}{c} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{b}{v_1} = \frac{d}{v_3} \tag{7.40}$$

wobei v_1 die Geschwindigkeit des bewegten Systems und v_3 die des Partikels 3 ist (die im Folgenden dargestellten Gleichungen gelten analog auch für Partikel 4). Die Geschwindigkeit v_3 wird berechnet entsprechend Gl. (4.20)

$$v_3 = \frac{\sqrt{v_1^2 + v_3'^2 + 2v_1 v_3' cos\alpha_3' - \left(\frac{v_1 v_3' sin\alpha_3'}{c}\right)^2}}{1 + \frac{v_1 v_3' cos\alpha_3'}{c^2}} \tag{7.41}$$

wobei in diesem Fall v_3' die Geschwindigkeit des Partikels bezogen auf das bewegte System darstellt und v_3 dessen Geschwindigkeit aus Sicht des unbewegten Beobachters. Die Berechnung führt zu folgendem Ergebnis [vgl. hierzu auch Gl. (2.48)]:

$$tan\alpha_3' = \pm \frac{sin\alpha_3}{\gamma\left(cos\alpha_3 - \frac{v_1}{v_3'}\right)} \tag{7.42}$$

Hierbei stellt α_3 den Winkel dar, den ein nicht bewegter Beobachter für die Bewegung des sich entfernenden Partikels gegenüber seinem System feststellt, während α_3' der Winkel des gleichen Partikels aus Sicht des bewegten Beobachters ist. Bei gegebenem Winkel von α_3' lässt sich auf einfachem Wege der Wert für α_3 berechnen. Hierzu ist lediglich das Vorzeichen zu wechseln (Details s. Kap. 2.3.4) und es ergibt sich

$$tan\alpha_3 = \pm \frac{sin\alpha_3'}{\gamma\left(cos\alpha_3' + \frac{v_1}{v_3'}\right)} \tag{7.43}$$

Die Gültigkeit kann auch leicht mittels numerischen Vergleichs gezeigt werden. In der Tabelle Tab. (7.1a) sind beispielhaft einige Winkelberechnungen für unterschiedliche Geschwindigkeiten v_1 und v_3' dargestellt.

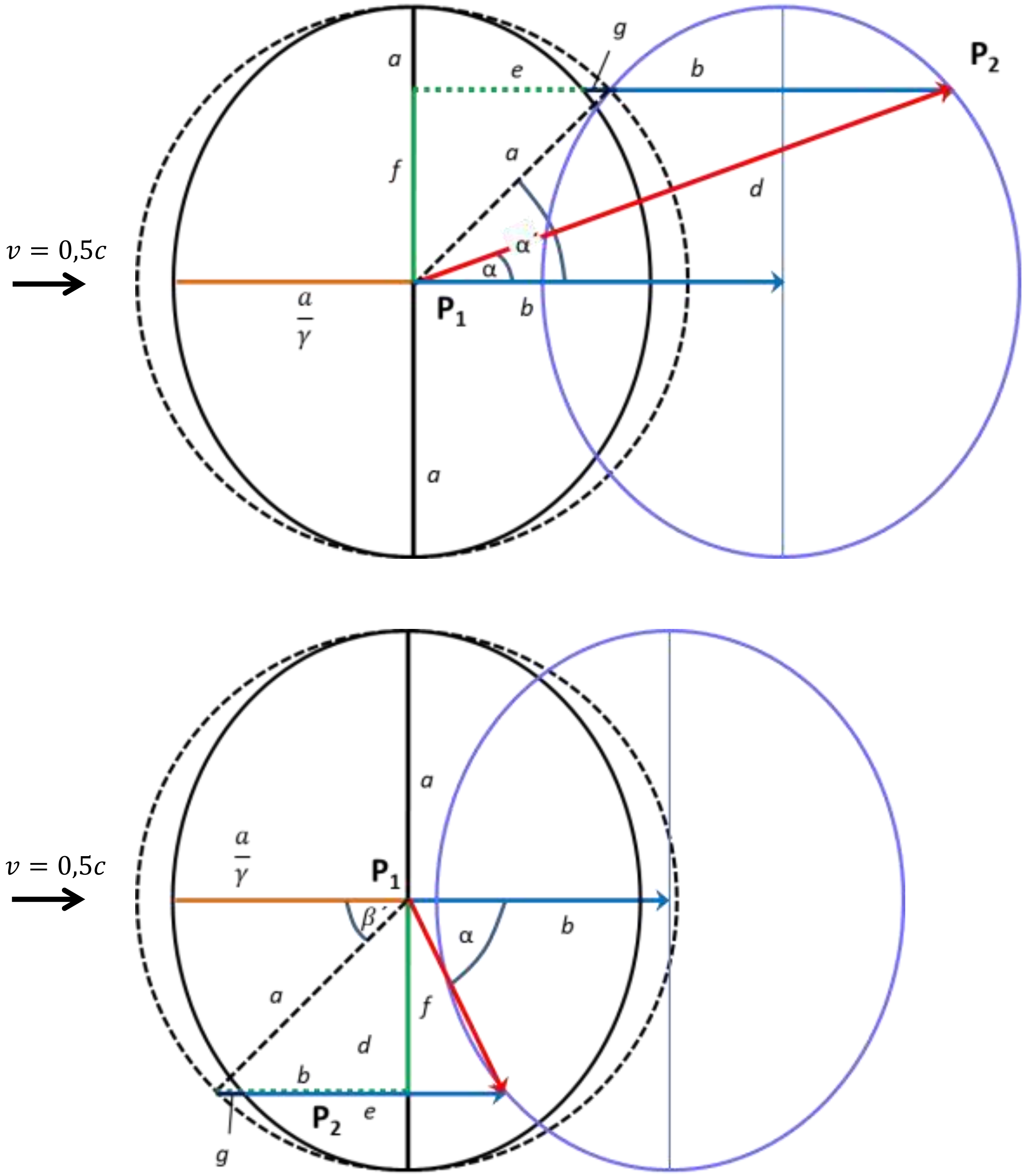


Abb. 7.2: Definition der Größen zur Bestimmung des subjektiven Ausgangswinkels bei einem bewegten Beobachter ($v_1 = 0{,}5c$, $\alpha_3' = 45°$, $\alpha_4' = -135°$)
a) Signalausgang in Bewegungsrichtung, $\alpha_3 = 19{,}73°$
b) Signalausgang zurück, $\alpha_4 = -64{,}44°$

α_3'	v_3	α_3	$\tilde{p}_3$	$\tilde{p}_{3X}$	$\tilde{p}_{3Y}$	α_4	v_4	
0	0,57143	0	0,69631	0,69631	0	-180	0,42105	v_1=
45	0,55439	37,80	0,66612	0,52636	0,40825	-125,78	0,44953	0,1
90	0,50744	78,63	0,58890	0,11605	0,57735	-78,63	0,50744	v_3'=
135	0,44953	125,78	0,50324	-0,29425	0,40825	-37,80	0,55439	0,5
180	0,42105	180,00	0,46421	-0,46421	0	0	0,57143	

α_3'	$\tilde{p}_4$	$\tilde{p}_{4X}$	$\tilde{p}_{4Y}$	$\sum\tilde{p}_X$	$\sum\tilde{p}_Y$	$\tilde{E}_{kin,3}$	$\tilde{E}_{kin,4}$	$\sum\tilde{E}_{kin}$
0	0,46421	-0,46421	0	0,23210	0	0,218544	0,102492	0,321035
45	0,50324	-0,29425	-0,4085	0,23210	0	0,201548	0,119487	0,321035
90	0,58890	0,11605	-0,57735	0,23210	0	0,160518	0,160518	0,321035
135	0,66612	0,52636	-0,40825	0,23210	0	0,119487	0,201548	0,321035
180	0,69631	0,69631	0	0,23210	0	0,102492	0,218544	0,321035

α_3'	v_3	α_3	$\tilde{p}_3$	$\tilde{p}_{3X}$	$\tilde{p}_{3Y}$	α_4	v_4	
0	0,8	0	1,33333	1,33333	0,00000	-90	0,00000	v_1=
45	0,77059	19,73	1,20908	1,13807	0,40825	-64,44	0,41229	0,5
90	0,66144	40,89	0,88192	0,66667	0,57735	-40,89	0,66144	v_3'=
135	0,41229	64,44	0,45254	0,19526	0,40825	-19,73	0,77059	0,5
180	0	90	0	0	0	0	0,80000	

α_3'	$\tilde{p}_4$	$\tilde{p}_{4X}$	$\tilde{p}_{4Y}$	$\sum\tilde{p}_X$	$\sum\tilde{p}_Y$	$\tilde{E}_{kin,3}$	$\tilde{E}_{kin,4}$	$\sum\tilde{E}_{kin}$
0	0	0	0	1,33333	0	0,666667	0,000000	0,666667
45	0,45254	0,19526	-0,40825	1,33333	0	0,569036	0,097631	0,666667
90	0,88192	0,66667	-0,57735	1,33333	0	0,333333	0,333333	0,666667
135	1,20908	1,13807	-0,40825	1,33333	0	0,097631	0,569036	0,666667
180	1,33333	1,33333	0	1,33333	0	0,000000	0,666667	0,666667

α_3'	v_3	α_3	$\tilde{p}_3$	$\tilde{p}_{3X}$	$\tilde{p}_{3Y}$	α_4	v_4	
0	0,57143	0	0,69631	0,69631	0	0	0,42105	v_1=
45	0,55439	6,12	0,66612	0,66232	0,07107	-8,12	0,44953	0,5
90	0,50744	9,83	0,58890	0,58026	0,10050	-9,83	0,50744	v_3'=
135	0,44953	8,12	0,50324	0,49820	0,07107	-6,12	0,55439	0,1
180	0,42105	0	0,46421	0,46421	0	0	0,57143	

α_3'	$\tilde{p}_4$	$\tilde{p}_{4X}$	$\tilde{p}_{4Y}$	$\sum\tilde{p}_X$	$\sum\tilde{p}_Y$	$\tilde{E}_{kin,3}$	$\tilde{E}_{kin,4}$	$\sum\tilde{E}_{kin}$
0	0,46421	0,46421	0	1,16052	0	0,218544	0,102492	0,321035
45	0,50324	0,49820	-0,07107	1,16052	0	0,201548	0,119487	0,321035
90	0,58890	0,58026	-0,10050	1,16052	0	0,160518	0,160518	0,321035
135	0,66612	0,66232	-0,07107	1,16052	0	0,119487	0,201548	0,321035
180	0,69631	0,69631	0	1,16052	0	0,102492	0,218544	0,321035

Tab. 7.1a: Berechnungen für Impuls und kinetische Energie im bewegten System.
Grau unterlegte Werte für Winkel: Approximiert
Felder mit Rahmen: 180°-Winkel.
Formeln und Dimensionen: vgl. Tabelle 7.1b und Text

$v_3 = \dfrac{\sqrt{v_1^2 + v_3'^2 + 2v_1 v_3' cos\alpha_3' - \left(\dfrac{v_1 v_3' sin\alpha_3'}{c}\right)^2}}{1 + \dfrac{v_1 v_3' cos\alpha_3'}{c^2}} \cdot c$			[-]
$\alpha_3 = arctan\left[\dfrac{sin\alpha_3'}{\gamma\left(cos\alpha_3' + \dfrac{v_1}{v_3'}\right)}\right] \cdot \dfrac{180}{\pi}$	[°]	$\tilde{p}_3 = \dfrac{p_3}{mc} = \dfrac{v_3}{c}\gamma_3$	
$\tilde{p}_{3X} = \dfrac{p_{3X}}{mc} = \dfrac{v_3}{c}\gamma_3 cos\,(\alpha_3)$	[-]	$\tilde{p}_{3Y} = \dfrac{p_{3Y}}{mc} = \dfrac{v_3}{c}\gamma_3 sin\,(\alpha_3)$	[-]
$v_4 = \dfrac{\sqrt{v_1^2 + v_4'^2 + 2v_1 v_4' cos\alpha_4' - \left(\dfrac{v_1 v_4' sin\alpha_4'}{c}\right)^2}}{1 + \dfrac{v_1 v_4' cos\alpha_4'}{c^2}} \cdot c$			[-]
$\alpha_4 = arctan\left[\dfrac{sin\alpha_4'}{\gamma\left(cos\alpha_4' + \dfrac{v_1}{v_4'}\right)}\right] \cdot \dfrac{180}{\pi}$	[°]	$\tilde{p}_4 = \dfrac{p_4}{mc} = \dfrac{v_4}{c}\gamma_4$	
$\tilde{p}_{4X} = \dfrac{p_{4X}}{mc} = \dfrac{v_4}{c}\gamma_4 cos\,(\alpha_4)$	[-]	$\tilde{p}_{4Y} = \dfrac{p_{4Y}}{mc} = \dfrac{v_4}{c}\gamma_4 sin\,(\alpha_4)$	[-]
$\sum\tilde{p}_X = \tilde{p}_{3X} + \tilde{p}_{4X}$	[-]	$\sum\tilde{p}_Y = \tilde{p}_{3Y} + \tilde{p}_{4Y}$	[-]
$\tilde{E}_{kin,3} = \dfrac{E_{kin,3}}{mc^2} = \gamma_3 - 1$	[-]	$\tilde{E}_{kin,4} = \dfrac{E_{kin,4}}{mc^2} = \gamma_4 - 1$	[-]
$\sum\tilde{E}_{kin} = \tilde{E}_{kin,3} + \tilde{E}_{kin,4}$	[-]		

Tab. 7.1b Formeln und Dimensionen benutzt für Tabelle 7.1a

Die Gleichungen, die in Tabelle 7.1a verwendet wurden, sind in Tab. 7.1b zusammengestellt. Um die Darstellung übersichtlich zu gestalten, wurden die Werte in normierter Form als $\tilde{p}$ und $\tilde{E}$ mit Dimension 1 eingetragen. Dies gilt ebenfalls für die Geschwindigkeiten, für die die Form v/c verwendet wurde. Die grau unterlegten Felder wurden mittels einer Approximation ermittelt; dies wurde erforderlich, da für Werte $v_3' = v_1$ eine Division durch 0 auftritt. Werte von α_3 und $\alpha_4 >\ 90°$ wurden bestimmt, indem die sich bei konventioneller Rechnung ergebenden Winkel von 180° abgezogen wurden; dies ist in der Tabelle mit einem Rahmen gekennzeichnet (vgl. auch Kap. 2.3).

Den Berechnungen liegen die folgenden Annahmen zugrunde:

Es wird davon ausgegangen, dass ein Teilchen in 2 gleich große Partikel zerfällt, von dem eines sich in einem beliebigen Winkel α_3' entfernt. Das zweite weist dann aus Symmetriegründen den Winkel $\alpha_4' = \alpha_3' - 180°$ auf. Für diese Partikel wurden dann die Winkel α_3 und α_4 und die zugehörigen Geschwindigkeiten v_3 und v_4 bestimmt. In einem zweiten Schritt wurden dann die Werte für den Impuls gemäß

$$p_3 = \gamma_1 m v_3 \quad bzw. \quad p_4 = \gamma_1 m v_4 \tag{7.44}$$

berechnet. Anschließend wurden die Anteile in Bewegungsrichtung (x) und senkrecht dazu (y) gemäß den Beziehungen

$$p_x = p \cdot cos(\alpha) \tag{7.45}$$

$$p_y = p \cdot sin(\alpha) \tag{7.46}$$

ermittelt. Werden diese Werte für die Winkel α_3 und α_4 aufaddiert, so ergeben sich in x-Richtung stets die gleichen Ergebnisse, in y-Richtung heben sie sich auf. Außerdem wurden die Werte für die kinetische Energie ermittelt, und zwar für Partikel 3 gemäß

$$E_{kin,3} = (\gamma_3 - 1)mc^2 \tag{7.47}$$

und für Partikel 4

$$E_{kin,4} = (\gamma_4 - 1)mc^2 \tag{7.48}$$

Die Summe dieser Werte führt für alle Winkel zu den gleichen Ergebnissen. Es konnte damit gezeigt werden, dass für den Zerfall in 2 gleichartige Produkte die Werte für Impuls und kinetische Energie in allen Fällen für einen nicht bewegten und einen bewegten Beobachter zu den gleichen Ergebnissen führen und es damit nicht möglich ist, innerhalb eines Systems auf den Bewegungszustand zu schließen.

7.2.2 Der Zerfall in 2 Photonen

Aus experimentellen Beobachtungen ist bekannt, dass ein Teilchen ohne Hinterlassung von Materieresten vollständig in Photonen zerfallen kann. So ist das π^0-Pion ein extrem unstabiles Teilchen mit einer Lebensdauer von ungefähr 10^{-18} s mit der Besonderheit, dass es mit fast 99%iger Wahrscheinlichkeit in 2 Photonen zerfällt. Wird unterstellt, dass ein solcher Zerfall im Zustand absoluter Ruhe stattfindet, so ergibt sich für die Energie

$$E = m_0 c^2 = hf_3 + hf_4 \tag{7.50}$$

wobei h das Planck'sche Wirkungsquantum und f_3 sowie f_4 die Frequenzen der Photonen darstellen. Der Impuls eines Photons ist

$$\vec{p} = h\frac{f}{c}\vec{e} \tag{7.51}$$

mit $\vec{e}$ als Einheitsvektor in Bewegungsrichtung. Wegen der Erhaltungssätze von Impuls und Energie sind die Frequenzen beider Photonen gleich und die Abstrahlung erfolgt senkrecht zueinander. Der auftretende Gesamtimpuls ist vorher und nachher gleich Null.

Stellt dagegen ein Beobachter für das Teilchen vor dem Zerfall eine Bewegung v_1 fest so ist wegen der relativistischen Massenerhöhung die Gesamtenergie

$$E = \gamma_1 m_0 c^2 \tag{7.52}$$

Nach dem Zerfall müssen die abgestrahlten Photonen die Gesamtenergie und den Impuls des Teilchens aufnehmen. Es ergibt sich nach dem Zerfall für die Energie

$$E = \gamma_1 h f_3 + \gamma_1 h f_4 \tag{7.53}$$

und für den Impuls eines Photons

$$\vec{p} = \gamma_1 h \frac{f}{c} \vec{e} \tag{7.54}$$

Werden die Beziehungen nun bezüglich ihrer Anteile in Bewegungsrichtung untersucht, so muss aus Sicht eines ruhenden Beobachters die kinetische Energie des Teilchens sowie dessen Impuls ebenfalls von den erzeugten Photonen aufgenommen werden. Es ergibt sich für die Energie folgende Beziehung

$$\gamma_1 m_0 c^2 = \gamma_1 h f_3 + \gamma_1 h f_4 \tag{7.55}$$

und für den Impuls *in Bewegungsrichtung*

$$\gamma_1 m_0 v_1 = \gamma_1 h \frac{f_3}{c} - \gamma_1 h \frac{f_4}{c} \tag{7.56}$$

wobei für f_3 eine Abstrahlung in Bewegungsrichtung (positiv) und für f_4 entgegengesetzt dazu (negativ) angenommen wurde. Aus Subtraktion bzw. Addition der Gleichungen Gl. (7.55) und (7.56) ergeben sich für die Frequenzen

$$f_3 = \frac{m_0(c^2 + v_1 c)}{2h} \tag{7.57}$$

$$f_4 = \frac{m_0(c^2 - v_1 c)}{2h} \tag{7.58}$$

mit

$$\frac{f_3}{f_4} = \frac{c + v_1}{c - v_1} \tag{7.59}$$

Dieses Verhältnis entspricht genau dem makroskopisch zu beobachtenden Verhalten, dass in Kap. 8 beschrieben wird.

Zur Ableitung der Zusammenhänge für beliebige Raumrichtungen sind zunächst die geometrischen Verhältnisse für Sender und Empfänger zu ermitteln. In Abb. 7.3 ist dargestellt, wie Teilnehmer A zum Zeitpunkt A_1 und dann A_2 ein Signal aussendet. Dies wird in Abhängigkeit vom Abstand zu B und von der Geschwindigkeit zu unterschiedlichen Winkeln relativ zur Bewegungsrichtung führen. Zur Vereinfachung wird angenommen, dass der nicht bewegte Empfänger B weit entfernt und der Abstand zwischen zwei Signalen relativ kurz ist und somit $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ gesetzt werden kann.

Der bewegte Sender A wird seine Signale im Abstand

$$\Delta t_A = \gamma \Delta t_0 \tag{7.60}$$

im Vergleich zu einem unbewegten Beobachter aussenden. Empfänger B wird neben dieser Verlängerung wegen der Zeitdilatation auch einen geometrischen Einfluss feststellen, da sich der Sender zwischen den Impulsen seiner Position angenähert oder entfernt hat. In Summe ergibt dies

$$\Delta t_B = \gamma \Delta t_0 \left(1 - \frac{v}{c} cos(\alpha)\right) \tag{7.61}$$

Damit folgt für die Frequenzen, die von Empfänger B aufgenommen werden

$$f_B = \frac{f_0}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c} cos\,(\alpha)\right)} \tag{7.62}$$

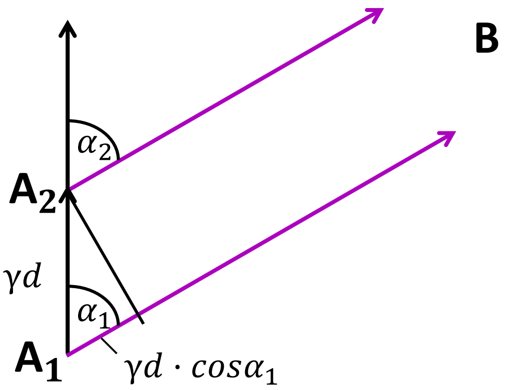


Fig. 7.3: Skizze zum Strahlenverlauf

Für einen abschließenden Vergleich werden Berechnungen für verschieden Ausgangswinkel der Photonen durchgeführt. Hierzu sind in Tab. 7.2 Winkel für α_3' (aus Sicht des bewegten Beobachters) definiert; die zugehörigen Winkel des zweiten Photons unterscheiden sich genau um 180°, d. h. es gilt $\alpha_4' = \alpha_3' - 180°$. Daraus müssen zunächst die Winkel aus Sicht eines ruhenden Beobachters B berechnet werden; hierzu werden Gleichungen aus Kap. 2.3 benutzt und nach α_3 aufgelöst. Hieraus werden dann die zugehörigen Frequenzen berechnet, anschließend wird der Impuls in x- und y-Richtung bestimmt (cos bzw. sin des Winkels entsprechend Gl. (7.45) und (7.46) aus Kap. 7.2.1). Abschließend wird noch für jeden Winkel die Gesamtenergie berechnet, die beim Zerfall freigesetzt wird.

Der Ausgangswert für f_0 wurde mit 1 eingesetzt. Zur Erhöhung der Übersichtlichkeit sind die Werte für Impuls und Energie als $\tilde{p}$ und $\tilde{E}$ wieder in normierter Form angegeben und besitzen die Dimension 1. Die genauen Definitionen und zu den sich ergebenden Dimensionen sind in Tabelle 7.2b zusammengefasst.

Die Summe der Werte für den Impuls in x-Richtung sowie die Energie haben stets den gleichen Wert und entsprechen den erwarteten Ergebnissen; die Impulswerte in y-Richtung heben sich auf. Außerdem lässt sich auf einfache Weise zeigen, dass die Ergebnisse für den Winkel $\alpha_3' = 0$ exakt der Gleichung (7.59) entsprechen, die für den einfachen Fall der Abstrahlung in Bewegungsrichtung und entgegengesetzt dazu abgeleitet wurde. Es treten demnach keine Unterschiede auf, ob Experimente im ruhenden oder bewegten Zustand durchgeführt werden und es sind somit auch hier keine Verletzungen des Relativitätsprinzips feststellbar.

α_3'	α_3	α_4	f_3	f_4	$\tilde{p}_{3X}$	$\tilde{p}_{4X}$	$\sum\tilde{p}_X$	$\tilde{p}_{3Y}$	$\tilde{p}_{4Y}$	$\sum\tilde{p}_Y$	$\tilde{E}$
0	0	-180	1,732	0,577	0,866	-0,289	0,577	0	0	0	2,309
15	8,69	-154,31	1,712	0,597	0,846	-0,269	0,577	0,129	-0,129	0	2,309
30	17,59	-130,21	1,655	0,655	0,789	-0,211	0,577	0,250	-0,250	0	2,309
45	26,90	-108,69	1,563	0,746	0,697	-0,120	0,577	0,354	-0,354	0	2,309
60	36,87	-90,00	1,443	0,866	0,577	0,000	0,577	0,433	-0,433	0	2,309
75	47,79	-73,92	1,304	1,005	0,438	0,139	0,577	0,483	-0,483	0	2,309
90	60,00	-60,00	1,155	1,155	0,289	0,289	0,577	1	-1	0	2,309
105	73,92	-47,79	1,005	1,304	0,139	0,438	0,577	0,483	-0,483	0	2,309
120	90	-36,87	0,866	1,443	0,000	0,577	0,577	0,433	-0,433	0	2,309
135	108,69	-26,90	0,746	1,563	-0,120	0,697	0,577	0,354	-0,354	0	2,309
150	130,21	-17,59	0,655	1,655	-0,211	0,789	0,577	0,25	-0,25	0	2,309
165	154,31	-8,69	0,597	1,712	-0,269	0,846	0,577	0,129	-0,129	0	2,309
180	180	0	0,577	1,732	-0,289	0,866	0,577	0	0	0	2,309

Tab 7.2a: Berechnungen für Winkel, Impuls (Bewegungsrichtung: x, senkrecht dazu: y), Energie. Formeln und Dimensionen vgl. Tab. 7.2b

$\alpha_3 = 2 \cdot arctan\left[\left(\frac{c-v}{c+v}\right)^{1/2} tan\left(\frac{\alpha_3'}{2}\right)\right] \cdot \frac{180}{\pi}$ Gl. aus Tab. 2.4, No. 4			[°]
$\alpha_4 = 2 \cdot arctan\left[\left(\frac{c-v}{c+v}\right)^{1/2} tan\left(\frac{\pi-\alpha_3'}{2}\right)\right] \cdot \frac{180}{\pi}$ Gl. aus Tab. 2.4, No. 4			[°]
$f_3 = \frac{f_0}{\gamma\left(1-\frac{v}{c}\cos(\alpha_3)\right)}$	$[s^{-1}]$	$f_4 = \frac{f_0}{\gamma\left(1+\frac{v}{c}\cos(\alpha_4)\right)}$	$[s^{-1}]$
$\tilde{p}_{3X} = \frac{p_{3X}}{mc} = \frac{v}{c} f_3 \cos(\alpha_3)$	[-]	$\tilde{p}_{4X} = \frac{p_{4X}}{mc} = \frac{v}{c} f_4 \cos(\alpha_4)$	[-]
$\sum\tilde{p}_X = \tilde{p}_{3X} + \tilde{p}_{4X}$	[-]		
$\tilde{p}_{3Y} = \frac{p_{3Y}}{mc} = \frac{v}{c} f_3 \sin(\alpha_3)$	[-]	$\tilde{p}_{4Y} = \frac{p_{4Y}}{mc} = \frac{v}{c} f_4 \sin(\alpha_4)$	[-]
$\sum\tilde{p}_Y = \tilde{p}_{3Y} + \tilde{p}_{4Y}$	[-]	$\tilde{E} = \frac{E}{\gamma h} = f_3 + f_4$	[-]

Tab. 7.2b Formeln und Dimensionen benutzt für Tabelle 7.2a

8. Konstanz der Phasengeschwindigkeit des Lichts

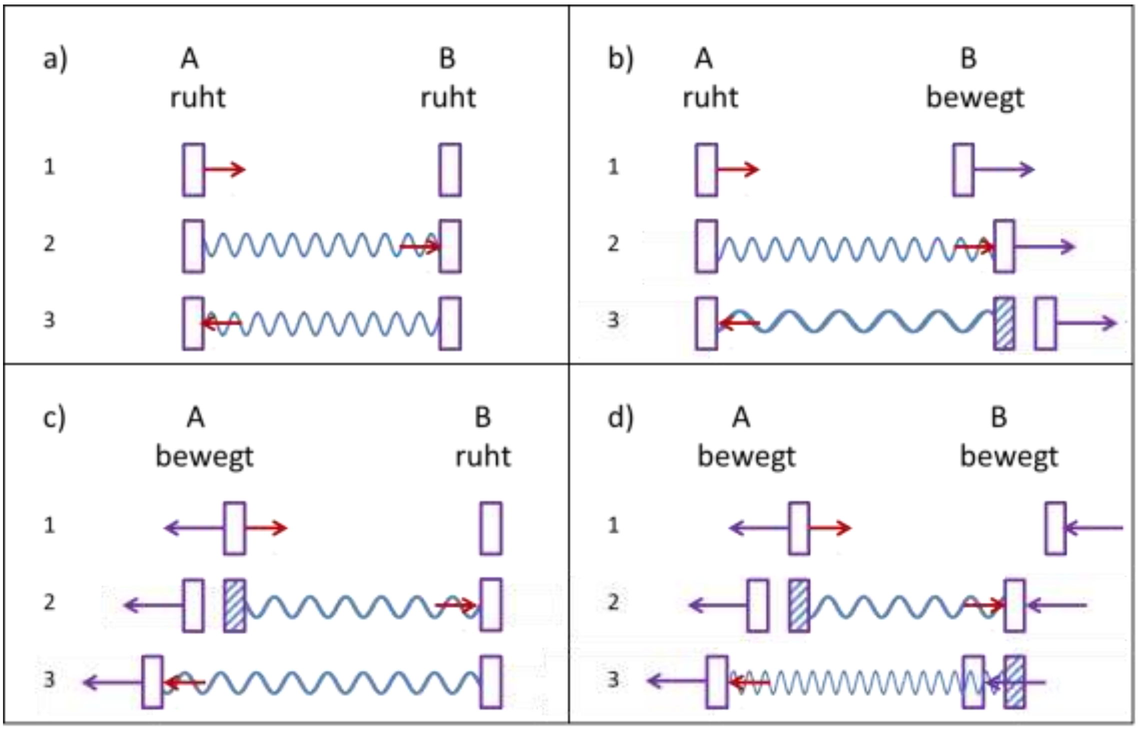
Die bisher behandelten Themen standen in exakter Übereinstimmung mit den aus der Literatur bekannten Ausführungen. Im Folgenden wird dagegen mit der Beobachtung von ausgesandten Signalen mit konstanter Frequenz ein Aspekt behandelt, der Widersprüche zu gängigen Interpretationen aufweist. Diese lassen sich nur mit den Betrachtungen zur Konstanz der Phasengeschwindigkeit des Lichts auflösen; diese ist damit von großer Relevanz für die spezielle Relativitätstheorie und das wichtigste Ergebnis der hier dargestellten Untersuchungen. Es zeigt sich anschließend, dass die Annahme eines absolut ruhenden Raums zwar im Widerspruch zur SRT steht, aber bei Berücksichtigung der Konstanz der Phasengeschwindigkeit des Lichts nur einen Sonderfall ohne Verletzung experimenteller Ergebnisse darstellt.

8.1 Unvereinbarkeit mit spezieller Relativitätstheorie bei konventionellem Ansatz

In Bild 8.1a und b ist die Situation dargestellt, dass zwei Beobachter A und B miteinander Signale austauschen. Zum Zeitpunkt 1 wird von A ein Signal ausgesandt, das bei 2 von B aufgenommen und reflektiert wird. Zum Zeitpunkt 3 empfängt A das zurückkommende Signal und der Versuch ist beendet. A und B befinden sich entweder relativ zueinander in Ruhe (Fall a, d und g) bewegen sich voneinander fort (Fall b und c) oder bewegen sich aufeinander zu (Fall e und f). Die ausgesendeten und empfangenen Signale werden untersucht. Wie bekannt wird das ausgesendete Signal eines bewegten Beobachters von einem anderen Beobachter mit höherer Frequenz wahrgenommen, wenn sie sich aufeinander zubewegen; entfernen sie sich voneinander so ist diese geringer. Diese ist

$$f' = \frac{1}{T'} = f_0 \left(\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}} \right)^{1/2} = f_0 \cdot \gamma \left(1 + \frac{v}{c}\right) \tag{8.01}$$

Es ist hierbei berücksichtigt, dass die Frequenz des bewegten Beobachters aufgrund der Zeitdilatation um den Faktor γ niedriger ist. Die jeweiligen Werte für die berechnete Frequenz f, den zurückgelegten Weg a, die erforderliche Zeit t und die Anzahl n der in diesem Intervall auftretenden Schwingungen sind in einer Tabelle beigefügt.

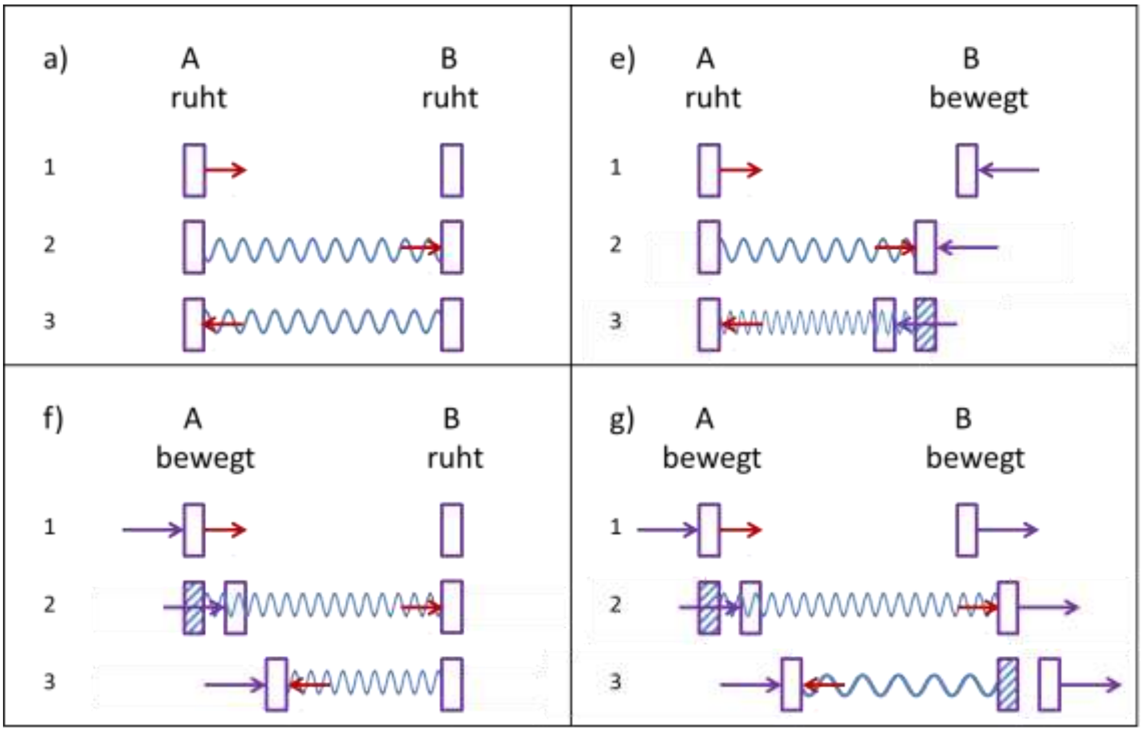


1: Abstrahlung Lichtimpuls von A
2: Empfang bei B, Reflektion nach A
3: Empfang bei A

Fall	f_A	$f_{A\to B}$	f_B	$f_{B\to A}$	f_A
a	f_0	f_0	f_0	f_0	f_0
b	f_0	f_0	$f_0\left(\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}\right)^{1/2}$	$f_0\left(\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}\right)$	$f_0\left(\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}\right)$
c	$\frac{f_0}{\gamma}$	$\frac{f_0}{\gamma}\cdot\left(\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}\right)^{1/2}$	$\frac{f_0}{\gamma}\cdot\left(\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}\right)^{1/2}$	$\frac{f_0}{\gamma}\cdot\left(\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}\right)^{1/2}$	$\frac{f_0}{\gamma}\cdot\left(\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}\right)$
d	$\frac{f_0}{\gamma}$	$\frac{f_0}{\gamma}\cdot\left(\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}\right)^{1/2}$	$\frac{f_0}{\gamma}$	$\frac{f_0}{\gamma}\cdot\left(\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}\right)^{1/2}$	$\frac{f_0}{\gamma}$

Fall	$a_{A\to B}$	$a_{B\to A}$	$t_{A\to B}$	$t_{B\to A}$	$n_{A\to B}$	$n_{B\to A}$
a	a_0	a_0	t_0	t_0	n_0	n_0
b	$a_0\frac{1}{1-\frac{v}{c}}$	$a_0\frac{1}{1-\frac{v}{c}}$	$t_0\frac{1}{1-\frac{v}{c}}$	$t_0\frac{1}{1-\frac{v}{c}}$	$n_0\frac{1}{1-\frac{v}{c}}$	$n_0\frac{1}{1+\frac{v}{c}}$
c	a_0	$a_0\left(\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}\right)$	t_0	$t_0\left(\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}\right)$	$n_0\left(1-\frac{v}{c}\right)$	$n_0\left(1+\frac{v}{c}\right)$
d	$a_0\frac{1}{1+\frac{v}{c}}$	$a_0\frac{1}{1-\frac{v}{c}}$	$t_0\frac{1}{1+\frac{v}{c}}$	$t_0\frac{1}{1-\frac{v}{c}}$	$n_0\left(\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}\right)$	$n_0\left(\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}\right)$

Abb. 8.1a: Signalaustausch zwischen Beobachtern A und B und Analyse der dabei auftretenden Frequenzen und der Schwingungsdauer.



1: Abstrahlung Lichtimpuls von A
2: Empfang bei B, Reflektion nach A
3: Empfang bei A

Fall	f_A	$f_{A\to B}$	f_B	$f_{B\to A}$	f_A
a	f_0	f_0	f_0	f_0	f_0
e	f_0	f_0	$f_0\left(\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}\right)^{1/2}$	$f_0\left(\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}\right)$	$f_0\left(\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}\right)$
f	$\frac{f_0}{\gamma}$	$\frac{f_0}{\gamma}\cdot\left(\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}\right)^{1/2}$	$\frac{f_0}{\gamma}\cdot\left(\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}\right)^{1/2}$	$\frac{f_0}{\gamma}\cdot\left(\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}\right)^{1/2}$	$\frac{f_0}{\gamma}\cdot\left(\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}\right)$
g	$\frac{f_0}{\gamma}$	$\frac{f_0}{\gamma}\cdot\left(\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}\right)^{1/2}$	$\frac{f_0}{\gamma}$	$\frac{f_0}{\gamma}\cdot\left(\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}\right)^{1/2}$	$\frac{f_0}{\gamma}$

Fall	$a_{A\to B}$	$a_{B\to A}$	$t_{A\to B}$	$t_{B\to A}$	$n_{A\to B}$	$n_{B\to A}$
a	a_0	a_0	t_0	t_0	n_0	n_0
e	$a_0\frac{1}{1+\frac{v}{c}}$	$a_0\frac{1}{1+\frac{v}{c}}$	$t_0\frac{1}{1+\frac{v}{c}}$	$t_0\frac{1}{1+\frac{v}{c}}$	$n_0\frac{1}{1+\frac{v}{c}}$	$n_0\frac{1}{1-\frac{v}{c}}$
f	a_0	$a_0\left(\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}\right)$	t_0	$t_0\left(\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}\right)$	$n_0\left(1+\frac{v}{c}\right)$	$n_0\left(1-\frac{v}{c}\right)$
g	$a_0\frac{1}{1-\frac{v}{c}}$	$a_0\frac{1}{1+\frac{v}{c}}$	$t_0\frac{1}{1-\frac{v}{c}}$	$t_0\frac{1}{1+\frac{v}{c}}$	$n_0\left(\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}\right)$	$n_0\left(\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}\right)$

Abb. 8.1b: Signalaustausch zwischen Beobachtern A und B und Analyse der dabei auftretenden Frequenzen und der Schwingungsdauer.

Für die Versuchsteilnehmer ist es aufgrund einer Frequenzanalyse nicht feststellbar, ob sie sich im System a), d), g) oder b), c) bzw. e), f) befinden. Betrachtet man hingegen die Anzahl der Schwingungen zwischen den Teilnehmern, so müssten A und B wegen des Identitätsprinzips (vgl. Kap. 1.6) sowohl für die Fälle a, d und g bei Hin- und Rückweg (Situation 2 und 3) die gleiche Anzahl messen. Das gleiche gilt für b) und c) sowie e) und f).

In der Tabelle sind für alle Fälle die Ergebnisse für die Frequenzen zusammengestellt, die sich für einen ruhenden Beobachter ergeben. Dabei ist berücksichtigt, dass die erzeugten Frequenzen in einem bewegten System für einen ruhenden Beobachter um den Faktor γ verringert erscheinen. Im zweiten Teil der Tabelle sind auch die Werte für den Abstand a, die beim Signalaustausch verstreichende Zeit t sowie für die Anzahl der Schwingungen n zusammengefasst. Dabei ergibt sich die Anzahl der Schwingungen aus der Beziehung

$$n = f \cdot t \tag{8.02}$$

Lässt man die Lichtstrahlen miteinander wechselwirken, so müssen aus Sicht des ruhenden Beobachters Interferenzerscheinungen in Form von Schwebungen auftreten. Wird das System um 90° zur Bewegungsrichtung gedreht, so verschwinden diese wieder.

Offensichtlich lassen sich die Ergebnisse aus dem ruhenden und dem bewegten System auf diese Weise nicht zur Übereinstimmung bringen. Nach den hier dargestellten Diagrammen ist das Ergebnis völlig unterschiedlich. Aufgrund der zuvor angestellten generellen Überlegungen müsste es sich demnach hier um eine Verletzung des Relativitätsprinzips handeln.

Dies ist jedoch nicht der Fall. Die Erklärung ist darin zu suchen, dass es sich bei den aus Sicht des ruhenden Beobachters ergebenden Messeffekten nicht um objektive Größen handelt. Da die ausgesandten Wellen naturgemäß abhängig von Zeit und Raum sind, so wird ein Beobachter in einem beliebigen Referenzsystem andere Effekte messen als ein zu ihm relativ bewegter. Es müssen an dieser Stelle die Phasengeschwindigkeiten betrachtet werden, die sich für alle Beobachter stets mit Lichtgeschwindigkeit bewegen.

Werden die Phasengeschwindigkeiten herangezogen, so ergibt sich zwanglos eine Übereinstimmung zwischen den Messungen der Schwingungsanzahl zwischen den Beobachtern. Insbesondere sind die Ergebnisse zwischen den Fällen a, d und g in diesen Fällen gleich. Eine ausführliche Ableitung dieses Effekts ist im nachfolgenden Kapitel dargestellt.

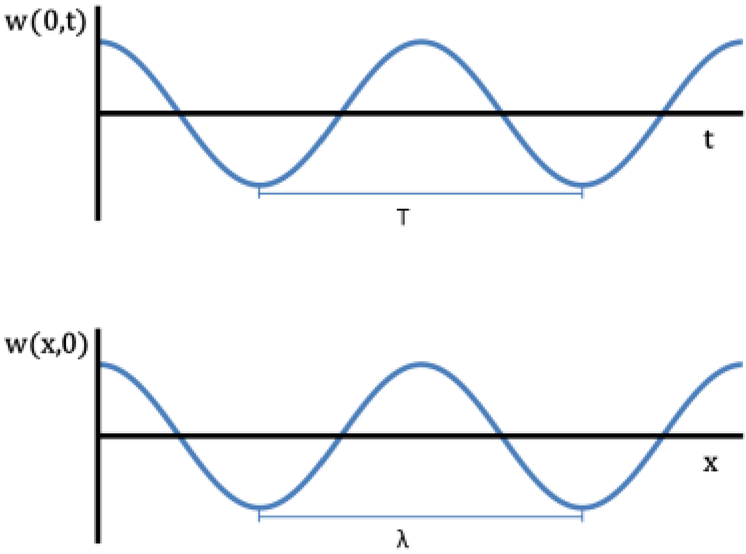
8.2 Auflösung des Widerspruchs durch Betrachtung der Phasengeschwindigkeit

Bei einem Signalaustausch zwischen zwei Beobachtern, der üblicherweise mit Licht-impulsen vorgenommen wird, liegen normalerweise harmonische Schwingungen vor. Diese können nicht direkt in ein Raum-Zeit-Schaubild (z. B. in ein Minkowski-Diagramm) eingetragen werden. Kurz zusammengefasst wird eine Welle üblicherweise so dargestellt, dass eine Variable (z. B. die Zeit) konstant gehalten wird, während die andere (in diesem Beispiel der Weg) variiert. Am simplen Beispiel einer durch einen in Wasser geworfenen Stein verursachten Welle könnte die Auswertung durch ein Foto erfolgen, bei dem aus den Abständen der Wellenberge die Wellenlänge ermittelt wird. Wird dagegen der Weg konstant gehalten und z. B die Bewegung eines auf dem Wasser schwimmenden Korkens betrachtet, so ergibt sich die Frequenz der Welle über eine Messung des zeitlichen Abstands von 2 definierten Punkten, z. B. der Maxima. Aus der Kombination beider Messungen lässt sich dann die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle, bezeichnet als Phasengeschwindigkeit, bestimmen. Es gibt jedoch auch die Möglichkeit, die sich bewegenden Maxima einer Welle in Abhängigkeit von Weg und Zeit direkt, z. B. mit einer Videoaufnahme zu dokumentieren.

Bei der allgemeinen Betrachtung einer Welle liegt folgende Situation vor: Die Oszillation ist abhängig von Raum (x) und Zeit (t) und wird mit folgendem Ansatz beschrieben [46a]

$$w(x,t) = A_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x - \alpha\right) \tag{8.10}$$

Hierbei sind A_0 die Amplitude, T die Schwingungsdauer (bei ortsfester Betrachtung), λ die Schwingungslänge (bei Betrachtung mit konstanter Zeit) sowie α der Ausgangswinkel.



$$\alpha = 0, \qquad x = 0$$

$$w(0,t) = A_0 cos \frac{2\pi}{T} t$$

$$\alpha = 0, \qquad t = 0$$

$$w(x,0) = A_0 cos \frac{2\pi}{\lambda} x$$

Abb. 8.2: Wellenbild bei festem Ort ($x = 0$) und fester Zeit ($t = 0$) mit $\alpha = 0$

Eine starke Vereinfachung kann erzielt werden, wenn man die zeitliche und räumliche Veränderung eines bestimmten Punktes dieser Welle (z. B ein Maximum) zusammen betrachtet (vgl. Abb. 8.3). In diesem Fall bleibt der Kosinus unverändert und es gilt

$$\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x - \alpha = const. \tag{8.11}$$

Nach Differentiation der Gleichung mit

$$\frac{\Delta t}{T} - \frac{\Delta x}{\lambda} = 0 \tag{8.12}$$

folgt dann für die Phasengeschwindigkeit u dieser Welle

$$u = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\lambda}{T} \tag{8.13}$$

Liegt keine Dispersion durch ein Medium vor (wie z. B. im Vakuum der Fall) so ergibt sich

$$u = \frac{\lambda}{T} = c \tag{8.14}$$

Diese Ableitung mit Nutzung des mathematischen Konzepts von Differenzialquotienten und Limesbildung beschreibt die Situation besonders anschaulich [46a], es sind aber auch komplexere Formulierungen mit Vierervektor und Gradientenbildung möglich, die natürlich zum gleichen Ergebnis kommen [27].

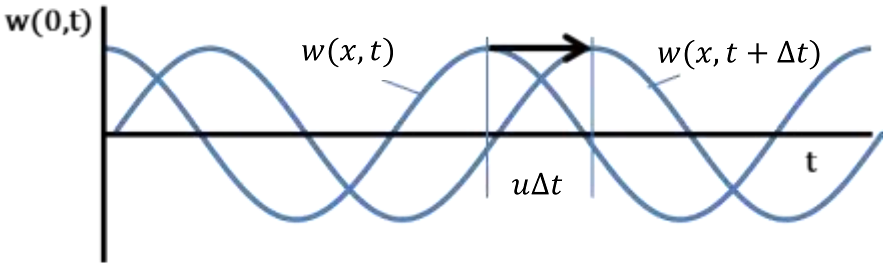


Abb.8.3: Phasengeschwindigkeit u als Fortpflanzungsgeschwindigkeit gleicher Punkte auf der Oszillationskurve (z. B. der Maxima)

Das wesentliche Ergebnis ist also, dass die gemessene Phasengeschwindigkeit einer elektromagnetischen Welle **exakt der Lichtgeschwindigkeit** entspricht [46a]. In Abb. 8.4 ist die Phasengeschwindigkeit als Funktion von Ort und Zeit eingetragen. Da es sich um eine lineare Abhängigkeit handelt ergibt sich eine Gerade mit dem Ursprung Null und nach Normierung ein Winkel zur Abszisse von 45°. Im rechten Teildiagramm sind zusätzlich die sich ergebenden Verläufe für die Geschwindigkeiten eines sich bewegenden Beobachters von $v = 0.2c$; $0.5c$; $0.8c$ aufgeführt.

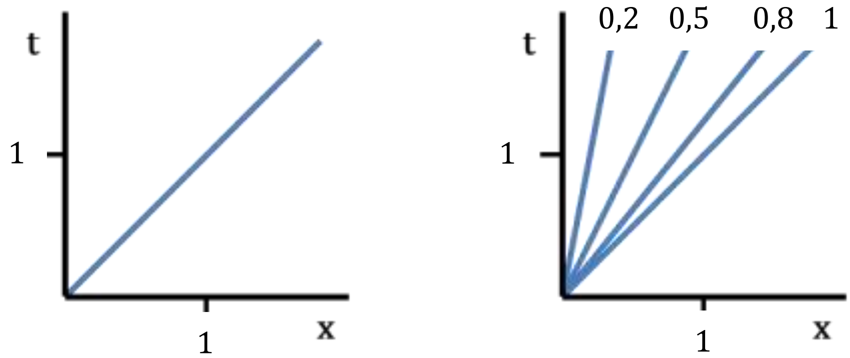


Abb. 8.4: Links: Phasengeschwindigkeit als Funktion von Zeit und Ort (normiert)
Rechts: Geschwindigkeiten eines bewegten Beobachters hinzugefügt

Hier wird klar erkennbar, dass diese Darstellung genau der Eintragung in einem Minkowski-Diagramm entspricht. Dies bedeutet, dass eine Fortpflanzung gleicher Phase (z. B. das Maximum einer Welle) auch als kurzer Lichtimpuls aufgefasst und in ein solches Diagramm eingetragen werden kann.

In Abb. 8.5 ist diese Situation beispielhaft dargestellt. Die Gestaltung des Diagramms erscheint zunächst unüblich. Bei genauer Durchsicht sind aber einige wichtige Erkenntnisse hieraus abzuleiten, so dass die Details dieses Minkowski-Diagramm im Folgenden im Einzelnen diskutiert werden sollen. Da aus diesem Diagramm weitere wesentliche Folgerungen abzuleiten sind, die Übersicht aber mit der Fülle an Informationen leiden würde, sind in den Abbildungen 8.6 und 8.7 bei Nutzung der gleichen grundlegenden Grafik zusätzliche Angaben eingetragen worden, wobei dafür andere weggelassen wurden.

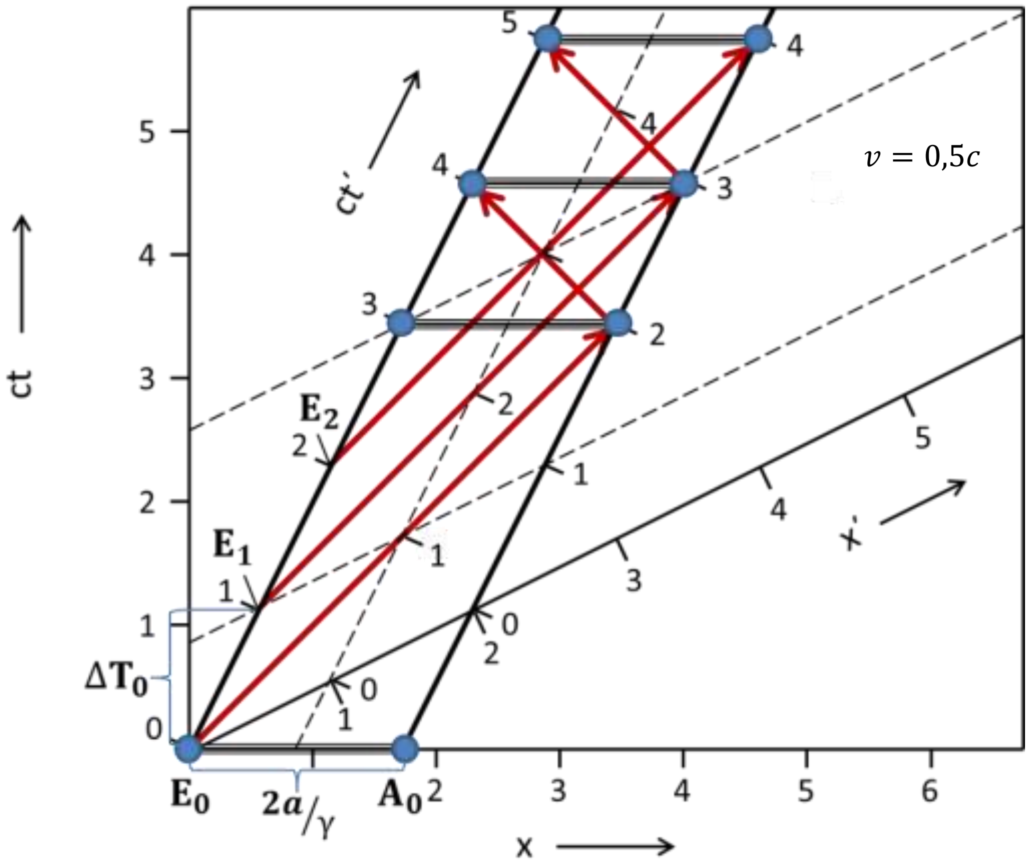


Abb. 8.5: Minkowski Diagramm zum Signalaustausch innerhalb eines bewegten Systems

Zunächst wird der Versuchsaufbau für dieses Beispiel dargestellt. Ein Labor mit der Länge $2a$ bewegt sich im Vergleich zu einem ruhenden Beobachter mit der Geschwindigkeit $v = 0{,}5\ c$. Das Diagramm ist zur Vereinfachung der Darstellung bezüglich des Wegs und der Zeit auf 1 normiert (d. h. es gilt $a = 1$ für ein ruhendes Labor). Zum Zeitpunkt 0 beginnt der Versuchsteilnehmer am Punkt E_0 mit der Sendung einer harmonischen Schwingung von 1Hz und beginnt mit einem Maximum. Diese Schwingung wird beim Erreichen des Punktes A reflektiert und an E zurückgeschickt.

Aus Sicht des ruhenden Beobachters hat der Körper die Länge $2a/\gamma$. Da die Zeit im bewegten System langsamer abläuft, ist die Schwingung aus seiner Sicht erst bei $\Delta T_0 = \gamma$ beendet (Punkt E_1). Die nächsten Maxima starten demnach bei E_1, E_2 usw. und können damit ebenfalls als gesonderte Impulse interpretiert werden, die in das Diagramm eingetragen wurden.

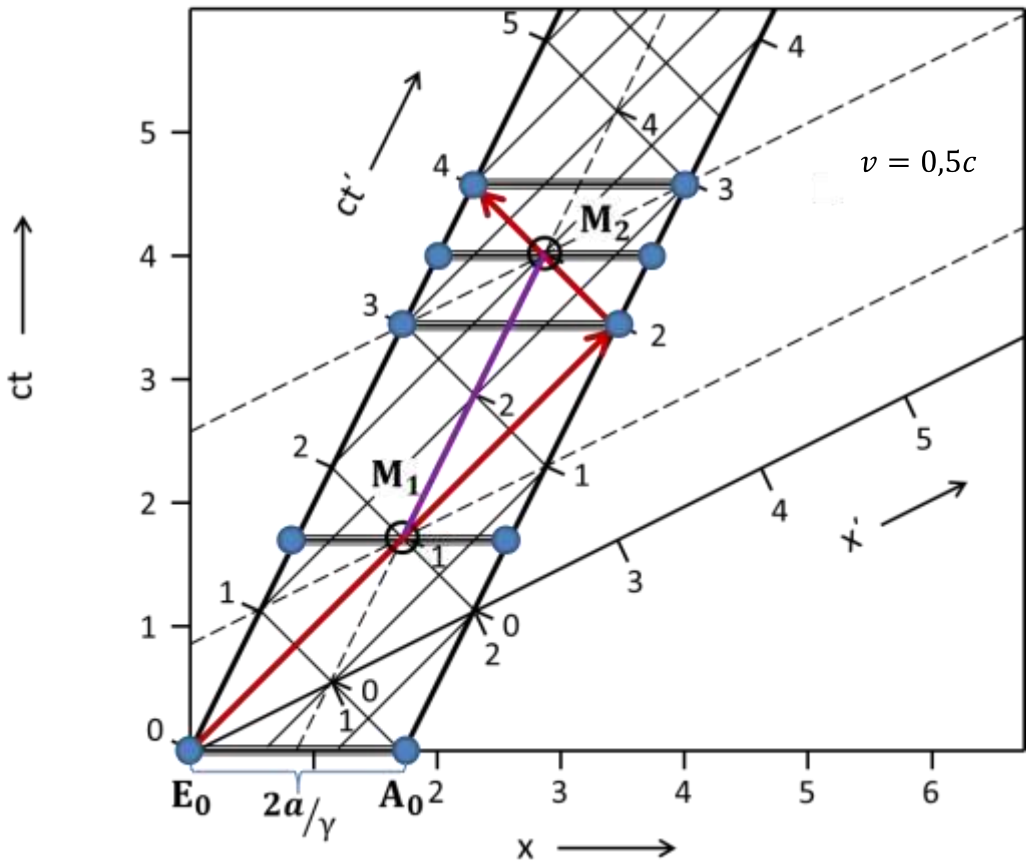


Abb. 8.6: Minkowski Diagramm zum Signalaustausch innerhalb eines bewegten Systems (Mittenbereich), Variante von Abb. 8.5

Betrachtet man den Verlauf des Maximums der Schwingung, so bewegt sich diese mit $v = c$ fort und erreicht die Mitte bei

$$t_{M_1} = \frac{1}{\gamma \cdot \left(1 - \frac{v}{c}\right)} \tag{8.15}$$

(vgl. Abb. 8.6) Der Punkt A wird nach der doppelten Zeit erreicht. Nach Reflexion der Welle wird der Punkt M_2 bei

$$t_{M_2} = \frac{2}{\gamma \cdot \left(1 - \frac{v}{c}\right)} + \frac{1}{\gamma \cdot \left(1 + \frac{v}{c}\right)} = \gamma \cdot \left(3 + \frac{v}{c}\right) \tag{8.16}$$

erreicht. Dies entspricht exakt dem Wert, der sich für einen von E_2 ausgestrahlten Impuls (entsprechend dem Maximum einer Welle) ergibt

$$t_{M_2} = 2\gamma + \frac{1}{\gamma \cdot \left(1 - \frac{v}{c}\right)} = \gamma \cdot \left(3 + \frac{v}{c}\right) \tag{8.17}$$

Dies bedeutet, dass in der Mitte des bewegten Labors exakt die gleichen Bedingungen herrschen wie es bei einem unbewegten Beobachter der Fall wäre. Im unbewegten Zustand wird von E_0 ein Signal abgegeben, dass bei $t = 3$ nach Reflexion zur Mitte zurückgelaufen ist. Ein Signal, dass bei $t = 2$ von E_0 ausgesandt wird erreicht diesen Punkt zur gleichen

Zeit. Dies trifft, wie gezeigt, auch für einen bewegten Beobachter zu, wenn hier die *Phasengeschwindigkeit* betrachtet wird.

Die hier dargestellten Zusammenhänge können einfach auf andere Gegebenheiten übertragen werden, in dem z. B. die Frequenz, die Geometrie oder andere Bedingungen modifiziert werden. Dies führt zu der generellen Aussage, dass sich durch Messung der Anzahl von Schwingungen unter keinen Umständen der Bewegungszustand eines Inertialsystems erfassen lässt.

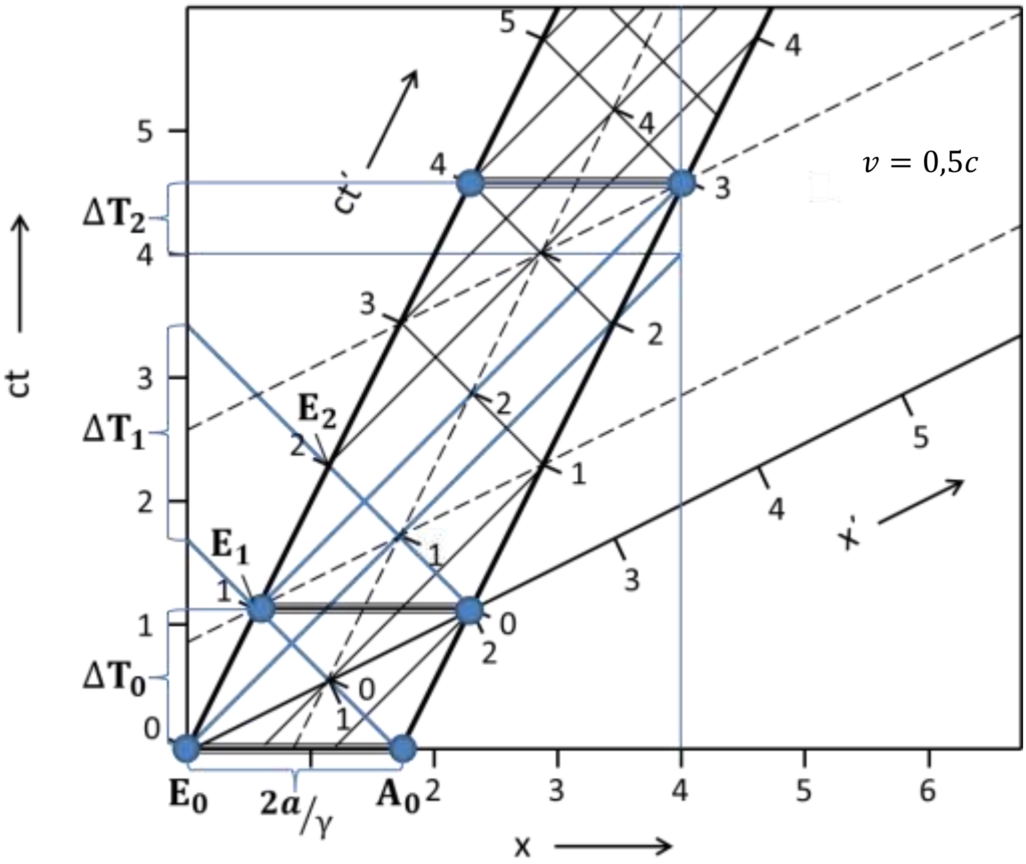


Abb. 8.7: Minkowski Diagramm zum Signalaustausch relativ zu ruhenden Beobachtern, Variante von Abb. 8.5

Ergänzend seien hier noch die aus dem Diagramm ermittelten Werte für Schwingungsdauer und Frequenz für einen ruhenden Beobachter dargestellt.

Entfernt sich der Testkörper, so ist der Wert

$$\Delta T_1 = \frac{1}{f_1} = \frac{1}{\gamma \cdot \left(1 - \frac{v}{c}\right)} \tag{8.18}$$

nähert er sich, so ergibt sich

$$\Delta T_2 = \frac{1}{f_2} = \frac{1}{\gamma \cdot \left(1 + \frac{v}{c}\right)} \tag{8.19}$$

Dies stimmt mit den Angaben aus der Literatur überein (z. B. [46b]).

Als wesentliches Ergebnis hat sich hier also gezeigt, dass für Licht in jedem beliebig zueinander bewegten Inertialsystem die Phasenausbreitungsgeschwindigkeit von den aus einer Lichtquelle stammenden Lichtwellen gleich der in jedem System gemessenen Lichtgeschwindigkeit ist (dies gilt jedoch nicht analog für das zuvor gewählte einfache Beispiel der Oberflächenwelle des Wassers!). Die wichtige Erkenntnis aus den hier erarbeiteten Zusammenhängen ist demnach die Tatsache, dass beim Übergang von einem beliebigen Referenzsystem in ein relativ dazu bewegtes Inertialsystem bei der Betrachtung desselben Lichtstrahls nicht die Lichtgeschwindigkeit, sondern die Phasengeschwindigkeit des Lichts konstant bleibt. Es wurde klar herausgearbeitet, dass dies in eindeutiger Weise durch das Relativitätsprinzip gefordert wird und dass ansonsten Widersprüche auftreten.

In der Literatur wird die Darstellung der Phasengeschwindigkeit sehr unterschiedlich bewertet. Während sie in den meisten Literaturstellen und Lehrbüchern im Zusammenhang mit der Relativitätstheorie keine Rolle spielt, wird sie z. B. von R. K. Pathria [27] ausführlich behandelt. Hier wird auch ausdrücklich auf die „Invarianz der Phasengeschwindigkeit“ zwischen zueinander bewegten Systemen hingewiesen, aber es werden keine weiteren Schlussfolgerungen gezogen.

Obwohl die hier abgeleiteten Zusammenhänge bisher kaum Beachtung gefunden haben, sind sie von großer Bedeutung. Aus diesem Grunde müssen auch die klassischen Experimente, insbesondere die Versuche von Michelson und Morley sowie von Kennedy und Thorndike kritisch hinterfragt werden. Es zeigt sich hier, dass bei Verwendung der hier diskutierten Beziehungen andere Darstellungen gefunden werden müssen. Dies wird in Kapitel 9 ausführlich dargestellt.

Abschließend kann hier vor der Durchführung weiterer theoretischer Untersuchungen bereits ein mögliches Ergebnis dargestellt werden:

- Es ist möglich, dass sich das gesamte Universum als ein System absoluter Ruhe beschreiben lässt, in dem sich elektromagnetische Signale als Wellen mit der Lichtgeschwindigkeit c fortbewegen.
- Beobachter aus jedem beliebig darin bewegten Inertialsystem können bei diesen Wellen nur die Phasengeschwindigkeit bestimmen und werden dabei ebenfalls den Wert c messen.

Zunächst werden die hier gewonnenen Erkenntnisse auf die Neu-Interpretation klassischer Versuche angewendet. Nach weiterführenden Diskussionen wird dann in Kap. 13 ein Änderungsvorschlag zur klassischen SRT formuliert.

9. Neue Interpretation von experimentellen Befunden

Im Folgenden werden die wichtigsten Experimente zur Speziellen Relativitätstheorie dargestellt und bewertet. Insbesondere für das Michelson-Morley- und das Kennedy-Thorndike-Experiment ergibt sich ein neuer Ansatz, wenn das Konzept der Phasengeschwindigkeit des Lichts berücksichtigt wird. Des Weiteren werden auch andere wesentliche Versuche kurz diskutiert.

9.1 Das Michelson-Morley-Experiment

Zunächst wird der von A. A. Michelson und E. W. Morley durchgeführte Versuch beschrieben. Wegen der großen Bedeutung dieses Experiments erfolgt anschließend eine weiterführende Literaturauswertung und dann werden die sich daraus ergebenden Konsequenzen bewertet.

9.1.1 Versuchsaufbau und Auswertung

Die Skizze des Versuchsaufbaus in Abb. 9.1 ist eine Wiedergabe aus der Originalliteratur von 1887 [7]. Hierin ist ein Experiment dargestellt, bei dem ein Lichtstrahl bei a mit Hilfe eines halb durchlässigen Spiegels aufgespalten, an den Stellen b und c reflektiert und an der Stelle d mit Hilfe eines Interferometers untersucht wird. Teil 1 stellt die Situation einer ortsfesten, Teil 2 die einer (gegenüber dem angenommenen Äther) bewegten Messvorrichtung dar.

Es liegt hier die Annahme zugrunde, dass die Lichtgeschwindigkeit und die gegenüber einem ruhenden Äther vorliegende Geschwindigkeit sich addieren und sich letztere mit Hilfe dieses Versuchs messen lässt. Für die Zeit für Hin- und Rückweg zwischen a und c ergibt sich

$$T_{\parallel} = \frac{D}{c+v} + \frac{D}{c-v} = \frac{2Dc}{c^2 - v^2} \tag{9.01}$$

wobei D der Abstand zwischen a und c ist. Für die insgesamt zurückgelegte Strecke gilt

$$D_{\parallel} = 2D\frac{c^2}{c^2 - v^2} \tag{9.02}$$

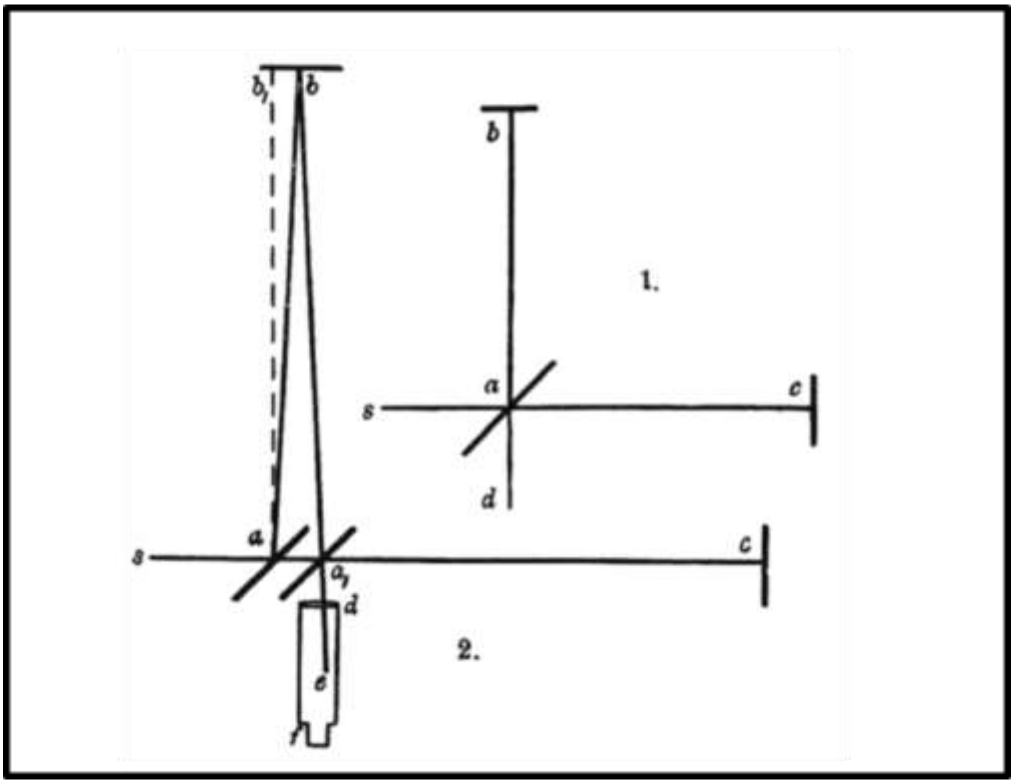


Abb. 9.1: Aufbau des Michelson-Morley-Experiments, entnommen aus [7]

In Querrichtung folgt dann aus

$$T_{\perp} = \frac{D_{\perp}}{v_{\perp}} \tag{9.03}$$

und

$$v_{\perp}^2 = c^2 + v^2 \tag{9.04}$$

$$D_{\perp} = 2D\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}} \tag{9.05}$$

Unter Vernachlässigung von Termen 4. Ordnung und höher ergibt sich aus den Gleichungen (9.02) und (9.05) nach einer Taylorentwicklung

$$D_{\parallel} \approx 2D\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) \tag{9.06}$$

$$D_{\perp} \approx 2D\left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right) \tag{9.07}$$

Die Differenz beträgt dann

$$\Delta D = D_{\parallel} - D_{\perp} = 2D\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) - 2D\left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right) = D\frac{v^2}{c^2} \tag{9.08}$$

Aus heutiger Sicht besteht ein offensichtliches Problem bei dieser Berechnung, da in den Gleichungen Geschwindigkeiten $v > c$ auftreten. Dies wird bei korrekter Ermittlung vermieden und die entsprechende Herleitung soll im Folgenden dargestellt werden.

Zunächst wird dabei $T_{\parallel}$ betrachtet. Hierzu werden die in Kapitel 2 abgeleiteten Beziehungen verwendet (vgl. Tab. 2.1)

$$T_{\parallel} = \frac{D}{c\left(1 - \frac{v}{c}\right)} + \frac{D}{c\left(1 + \frac{v}{c}\right)} = \frac{2D}{c}\gamma^2 \tag{9.09}$$

Es wird deutlich, dass bei dieser Betrachtung die für Hin- und Rückweg geltenden Beziehungen exakt umgekehrt sind wie von Michelson und Morley angenommen, in der Summe ergibt sich damit aber das gleiche Ergebnis.

In Querrichtung verhält es sich etwas anders. Zur Ermittlung werden die in Abb. 9.2 dargestellten Beziehungen genutzt (vgl. auch Darstellungen in Kap. 2.1.2 und 2.2.3).

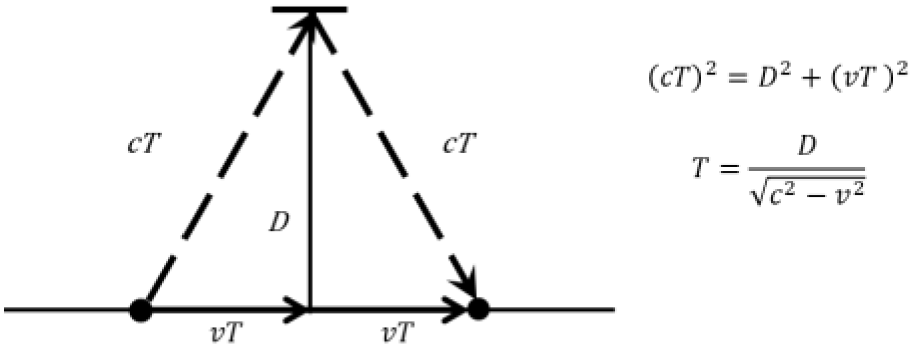


Abb. 9.2: Zusammenhang zwischen dem Abstand D zum Reflektor und den Geschwindigkeiten v und c.

Daraus ergibt sich folgende Abhängigkeit für $T_{\perp}$

$$T_{\perp} = \frac{2D}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2D}{c}\gamma \tag{9.10}$$

und damit

$$D_{\perp} = \frac{2D}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 2D\gamma \tag{9.11}$$

Dieses Resultat weicht vom Ergebnis von Michelson und Morley aus Gl. (9.05) ab. Der Unterschied liegt im folgenden Term mit seiner Taylorentwicklung

$$\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} - \frac{1}{8}\frac{v^4}{c^4} + \frac{3}{48}\frac{v^6}{c^6} - \cdots \tag{9.12}$$

im Vergleich zur korrekten Darstellung

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \frac{15}{48}\frac{v^6}{c^6} + \cdots \tag{9.13}$$

Vernachlässigt man Terme 4. Ordnung und höher so sind die Ergebnisse gleich und damit sind die Beziehungen ohne Einschränkungen verwendbar.

Es folgt somit

$$\Delta D = \frac{T_{\parallel} - T_{\perp}}{c} = 2D(\gamma^2 - \gamma) \tag{9.14}$$

und für $v \ll c$ wegen

$$\gamma \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2} \tag{9.15}$$

ergibt sich

$$\Delta D \approx 2D\left(\left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right)^2 - \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right)\right) \approx D\frac{v^2}{c^2} \tag{9.16}$$

Die aufgebaute Versuchseinrichtung hätte mit Hilfe von Interferenzmessungen Geschwindigkeiten von 8 km/s nachweisen können, zeigte aber ein Nullresultat. Die Bewegung der Erde um die Sonne (ohne weitere Berücksichtigung der Bewegung der Sonne in der Milchstraße) führt jedoch zu Werten von etwa 30 km/s.

Von G. F. FitzGerald wurde bereits im Jahre 1889 die These aufgestellt, dass sich der Raum bei Geschwindigkeiten nahe der Lichtgeschwindigkeit kontrahieren muss [8]. Er nahm an, dass die Kontraktion quadratisch von der Geschwindigkeit des bewegten Beobachters abhängt. H. A. Lorentz kam 1892 unabhängig davon zum gleichen Ergebnis [13]. Erst später, als die Lorentz-Transformationen vollständig formuliert waren, wurde dem Verhältnis zwischen Quer- und Längsrichtung der Faktor γ (vgl. Gl. 1.03) zugeordnet (z. B. [12,13]).

Aus den Versuchsergebnissen wurde zusätzlich gefolgert, dass ein erwarteter „Ätherwind“ nicht existiert. Diese Interpretation ist korrekt, wenn die Ausbreitung des Lichts mit einem Trägermedium wie z. B. einem Gas oder einer Flüssigkeit zur Leitung des Schalls verglichen wird. Unterstellt man jedoch bei einem absolut ruhenden Raum die auftretende Zeitdilatation und Raumkontraktion in Bewegungsrichtung eines darin bewegten Körpers als Eigenschaften des Raums, so ist ebenfalls eine einfache und in sich schlüssige Darstellung möglich. Betrachtet man die Phasengeschwindigkeit des Lichts treten keine Widersprüche beim Übergang von dem ruhenden in ein dazu bewegtes System auf.

Zusammenfassend ist als Ergebnis für das Michelson-Morley-Experiment festzustellen, dass es in Bewegungsrichtung eine Kontraktion geben muss. Dies widerlegte die bis dahin vorherrschende Annahme, dass es einen der Luft entsprechenden Ätherwind gibt. Weiterführende Interpretationen können aber daraus nicht getroffen werden.

9.1.2 Literaturauswertung

Das Michelson-Morley-Experiment wird in einer Vielzahl von Veröffentlichungen diskutiert. Die im Jahre 1927 im Mount Wilson Observatorium in Pasadena durchgeführte „Conference on the Michelson-Morley-Experiment“ stellt aber sicher einen Höhepunkt dar. Aufgrund der Bedeutung der beteiligten namhaften Wissenschaftler und der ausführlichen

Diskussionen liegt in den 1928 veröffentlichten Tagungsunterlagen [49] ein sehr aussagekräftiges Dokument des wissenschaftlichen Stands der damaligen Zeit vor, an dem sich bis heute nichts Wesentliches geändert hat. Aus diesem Grunde soll im Folgenden ausführlich auf Details dieser Konferenz eingegangen werden. Neben ihrem wissenschaftlichen Rang ergeben sich auch interessante historische Aspekte, die ebenfalls gewürdigt werden sollen.

Zunächst berichtete A. A. Michelson über den historischen Hintergrund [49a]. Er beschrieb die ersten Versuche am Helmholtz-Institut in Berlin, die aber aufgrund der störenden Einflüsse des Verkehrs nicht zum Erfolg führten und dann später im Observatorium in Potsdam wiederholt wurden. Das erzielte Nullresultat wurde damals von vielen Wissenschaftlern wegen der geringen Armlänge des Geräts von etwa 1m angezweifelt. Erst die Verbesserungen durch E. W. Morley ergaben dann bei einem erneuten Versuch in Cleveland ein eindeutiges Ergebnis.

Von H. A. Lorentz [49b] wurde der theoretische Ansatz des Experiments erläutert, wobei hier deutlich komplexere Betrachtungen als von A. A. Michelson durchgeführt wurden, insbesondere bezüglich der von Michelson bis dahin nicht untersuchten Winkelabhängigkeiten (vgl. Kap. 8.1.1). Anschließend wurde von D. C. Miller [49c] der zur damaligen Zeit aktuelle Stand der Versuche dargestellt. Dabei berichtete er auch über Versuche, die positive Effekte zur Messung eines Äthers gezeigt haben sollten. (Anm.: Diese konnten später nicht bestätigt werden). R. S. Kennedy berichtete dann über die Interferometer-Messtechnik [49d].

E. R. Hedrick [49e] und danach P. S. Epstein [49f] gingen in ihren Präsentationen ausführlich auf zusätzliche theoretische Aspekte ein. Hierbei ist insbesondere die Berücksichtigung des gegenüber einem potenziellen Äther bewegten Spiegelsystems zu nennen. Es wird ausführlich auf Bewertungen von A. Righi [50] eingegangen, allerdings gibt es auch ältere Untersuchungen zu diesem Thema (z. B. [51,52]). (Anmerkung: Wegen des plötzlichen Todes von A. Righi gibt es von ihm nur unvollständige Aufzeichnungen. Diese wurden von J. Stein S. J., dem damaligen Leiter des vatikanischen Observatoriums zusammengefasst [50]). Von E. R. Hedrick werden allein 15 Literaturstellen aufgeführt, die sich mit Interferenz-Problemen beim Michelson-Morley-Experiment beschäftigen [49e].

Es ist bemerkenswert, dass die Ergebnisse der verschiedenen Autoren teilweise erheblich voneinander abweichen. Während A. Righi der Auffassung war, dass das Michelson-Morley-Experiment aufgrund der Winkelanordnung der Spiegel bei der Bewegung durch den Äther prinzipiell keine Ergebnisse zeigen konnte, war E. R. Hedrick dagegen der Meinung, dass dieser Effekt vorliegt aber vernachlässigt werden könnte.

Ohne auf die Details einzugehen ist festzuhalten, dass in allen Fällen immer nur die Bewegung des Reflektionsspiegels betrachtet wird, nicht aber das Gesamtsystem des bewegten Interferometers. Seitens H. A. Lorentz wurde in der Diskussion festgestellt, dass die Berechnungen mit bewegtem Spiegel von seinen Ergebnissen abwichen, und regte eine Überarbeitung an [49f]. Eine Betrachtung der Phasengeschwindigkeit, die eine einfache Erklärung der Phänomene ermöglicht hätte, erfolgte hier nicht.

H. A. Lorentz verstarb im Jahr nach der Konferenz und es liegen keine Berichte darüber vor, ob er sich noch mit diesem Problem beschäftigt hat. Auch von anderen Autoren wird hierzu keine Stellung genommen.

9.2 Das Kennedy-Thorndike-Experiment

Bei diesem Experiment werden ebenfalls Messungen mit einem Interferometer durchgeführt. Der Versuch unterscheidet sich vom Michelson-Morley-Experiment im Wesentlichen dadurch, dass hier beim Interferometer unterschiedlich lange Messarme verwendet werden. Außerdem wird durch eine stabile Bauweise und eine extrem genaue Temperaturführung erreicht, dass mit dieser Vorrichtung Langzeitversuche möglich sind. So wurde z. B. die erste bereits im Jahr 1932 gebaute Messvorrichtung mit einem Wasserbad umgeben, dessen Temperatur auf 1/1000 °C konstant gehalten werden konnte. Mit dieser Vorrichtung wurden Versuche über Tage, teilweise Monate durchgeführt.

Die Durchführung dieses Versuches beruht darauf, dass die Messvorrichtung nicht direkt bewegt wird, sondern dass durch die Erdrotation die Apparatur in verschiedenen Winkeln zum angenommenen Äther ausgerichtet und daher sowohl Drehungen als auch Beschleunigungen durch die Drehbewegung der Erde hervorgerufen werden [16]. Es gibt in der Literatur Darstellungen, in denen die Drehbewegung einer solchen Apparatur dem Michelson-Morley Experiment zugeordnet und für den Kennedy-Thorndike Versuch nur die Beschleunigungskomponente betrachtet wird [54]; da die Effekte aber stets zusammen auftreten sollen sie hier auch gemeinsam dargestellt werden.

Es wurde im ersten sowie in nachfolgenden Versuchen mit noch erheblich gesteigerter Genauigkeit wie auch beim Michelson-Morley-Experiment ein Nullresultat ermittelt.

Im Folgenden wird zunächst gezeigt, dass die von den Autoren im Jahr 1932 entwickelte Interpretation [16] nicht korrekt ist, sondern einige konzeptionelle Mängel enthält. Aus diesem Grunde werden heute Darstellungen des Sachverhalts ausschließlich in modifizierter Form verwendet, wie z. B. von D. Giulini [19] wiedergegeben. Es wird weiterhin gezeigt, dass auch diese Schwachstellen enthalten, die durch eine modifizierte Darstellung aufgehoben werden können. Diese wird ausführlich diskutiert und dann abschließend bewertet.

9.2.1 Darstellungen aus der Originalliteratur

Betrachtet wird ein System S in dem ein Lichtstrahl in der Zeit dt die Distanz ds zurücklegt [16]. Es gilt

$$ds = cdt \tag{9.20}$$

Wird nun ein System S′ betrachtet, dass sich gegenüber S mit der Geschwindigkeit v bewegt, dann gilt

$$c^2(dt')^2 = (ds')^2 + v^2(dt')^2 + 2vds'dt'cos\theta' \tag{9.21}$$

wobei θ' der Winkel zwischen Lichtausbreitung und Bewegungsrichtung ist. Für $\theta' = 0$ führt dies zu

$$cdt' = ds' + vdt' \tag{9.22}$$

Werden die Ergebnisse des Michelson-Morley-Experiments berücksichtigt, so ergeben sich folgende Beziehungen in Längsrichtung ($\theta\ bzw.\ \theta' = 0°$) sowie in Querrichtung ($\theta\ bzw.\ \theta' = 90°$)

	Bewegtes System S'		Nicht bewegtes System S
$\theta' = 0°$	$dt' = \frac{ds'}{c\left(1 - \frac{v}{c}\right)}$	$\theta = 0°$	$dt' = \frac{ds}{\gamma c\left(1 - \frac{v}{c}\right)}$
$\theta' = 90°$	$dt' = \frac{ds'}{c}\gamma$	$\theta = 90°$	$dt' = \frac{ds}{c}\gamma$

Nach Integration folgt dann gemäß [11] die Beziehung

$$t'_{\parallel} - t'_{\perp} = \frac{s'_{\parallel} - s'_{\perp}}{c}\gamma \tag{9.23}$$

Hier zeigt sich ein offensichtlicher konzeptioneller Mangel, da nur der Weg in Richtung zum reflektierenden Spiegel aber nicht zurück betrachtet wird. Sind Lichtausbreitung und Bewegungsrichtung des Systems gleichgerichtet, so ergeben sich für Hin- und Rückweg unterschiedliche Werte. Außerdem wird hier vorausgesetzt, dass die Raumkontraktion und Zeitdilatation exakt gleich sind, was an dieser Stelle ohne zusätzliche Annahmen jedoch nicht möglich ist. Es soll daher hier die Bewertung der Originalliteratur abgebrochen und zu neueren Darstellungen übergegangen werden.

9.2.2 Neuere Darstellungen

In neuerer Literatur (z. B. nach [19]) wird der Sachverhalt anders wiedergegeben. Hierbei kann demnach nur die Beziehung

$$t'_{\parallel} - t'_{\perp} = B\,\frac{2\left(s'_{\parallel} - s'_{\perp}\right)}{c}\gamma \tag{9.24}$$

dargestellt werden, wobei die Konstante B später, z. B. durch das Ives-Stilwell-Experiment (vgl. Kap 9.3) bestimmt wird und sich dann dabei zu $B = 1$ ergibt.

Das eigentliche Problem bei der Interpretation des Kennedy-Thorndike-Experiments auch in seiner neueren Darstellung liegt jedoch in der Auswertung. Hierbei entsteht die Situation, dass gemäß der Beziehung

$$\Delta N = f \cdot B\,\frac{2\left(s'_{\parallel} - s'_{\perp}\right)}{c}\gamma \tag{9.25}$$

mit f als Frequenz eine Abhängigkeit zwischen der Anzahl der Schwingungen, die auf dem Hin- und Rückweg zwischen Lichtquelle und Interferometer auftreten und der Frequenz ein Zusammenhang hergestellt wird. Berücksichtigt man jedoch die unterschiedliche Länge der Messarme so wird sofort klar, dass ein aufgespaltener und gleichzeitig in unterschiedliche Richtungen ausgestrahlter Lichtstrahl nicht zum selben Zeitpunkt zurückkommt, sondern dass hier eine Verzögerung vorliegt. Daher wird im Folgenden eine alternative Formulierung des Sachverhalts vorgenommen.

9.2.3 Neuinterpretation des Experiments

Wie bereits ausgeführt ist ein wesentliches Merkmal des Versuchsaufbaus, dass unterschiedlich lange Messarme eingesetzt werden. Aus diesem Grund ist es nicht sinnvoll die Gesamtzahl an Schwingungen des Lichts bezüglich der Armdistanzen miteinander zu vergleichen. Das Konzept der Konstanz der Phasengeschwindigkeit des Lichts erlaubt hier eine andere Betrachtung für die auftretenden Interferenzeffekte. Betrachtet man also die Wechselwirkung von Lichtimpulsen und möchte diese beim Eintreffen am Interferometer miteinander vergleichen so wird deutlich, dass der Impuls, der den kürzeren Arm durchläuft, mit einer Verzögerung gestartet werden muss.

Wenn die Längen der Arme L_C (länger) und L_B (kürzer) sind, so ist Wartezeit T_0 bis zum Absenden des Impulses bei der Betrachtung eines unbewegten Systems

$$T_0 = \frac{2L_C}{c} - \frac{2L_B}{c} = \frac{2L_C(1-k_A)}{c} \tag{9.30}$$

mit

$$k_A = \frac{L_B}{L_C} \tag{9.31}$$

als Apparate-Konstante für das Verhältnis der Armlängen. Die Gesamtzeiten für Hin- und Rückweg eines Lichtsignals sind demnach

$$T_B = \frac{2L_C(1-k_A)}{c} + \frac{2L_C k_A}{c} \tag{9.32}$$

$$T_C = \frac{2L_C}{c} \tag{9.33}$$

wobei Gl. (9.32) und Gl. (9.33) offensichtlich gleich sind. Betrachtet man nun ein bewegtes System längs und quer zur Bewegungsrichtung und setzt für den Verlauf in Längsrichtung die Verkürzung um den Faktor γ gemäß den Ergebnissen des Michelson-Morley-Versuchs ein, so ergeben sich die folgenden Gleichungen für die jeweiligen Situationen

$$T_{\parallel B} = T_{\perp B} = a\frac{2L_C(1-k_A)}{c} + b\frac{2L_C k_A}{c}\gamma \tag{9.34}$$

$$T_{\parallel C} = T_{\perp C} = b\frac{2L_C}{c}\gamma \tag{9.35}$$

wobei a eine zunächst unbekannte Korrekturkonstante der erforderlichen Startzeit des Signals für den kürzeren Messarm ist. Die Konstante b wird verwendet, weil aus dem Ergebnis des Michelson-Morley-Experiments nur das Verhältnis zwischen der Kontraktion von Längs- zu Querrichtung nicht aber deren absolute Größe bekannt ist.

Es werden nun Gl. (9.34) und Gl. (9.35) gleichgesetzt. Die Rechnung ergibt

$$b\frac{2L_C}{c}\gamma = a\frac{2L_C(1-k_A)}{c} + b\frac{2L_C k_A}{c}\gamma \tag{9.36}$$

$$b\frac{2L_C}{c}(1-k_A)\,\gamma = a\frac{2L_C(1-k_A)}{c} \tag{9.37}$$

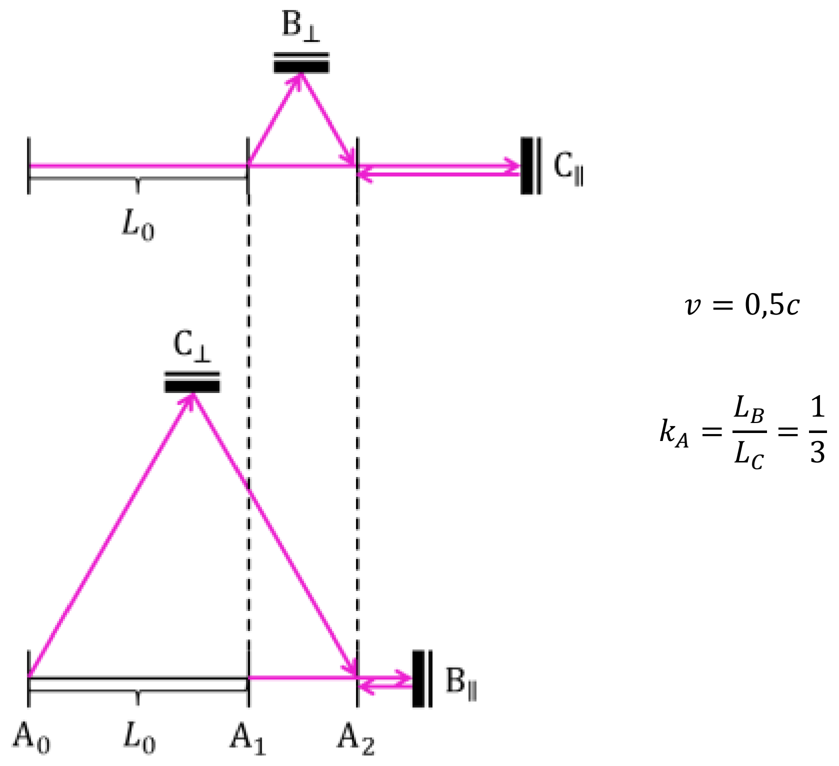


Abb. 9.3: Kennedy-Thorndike Versuch: Drehung

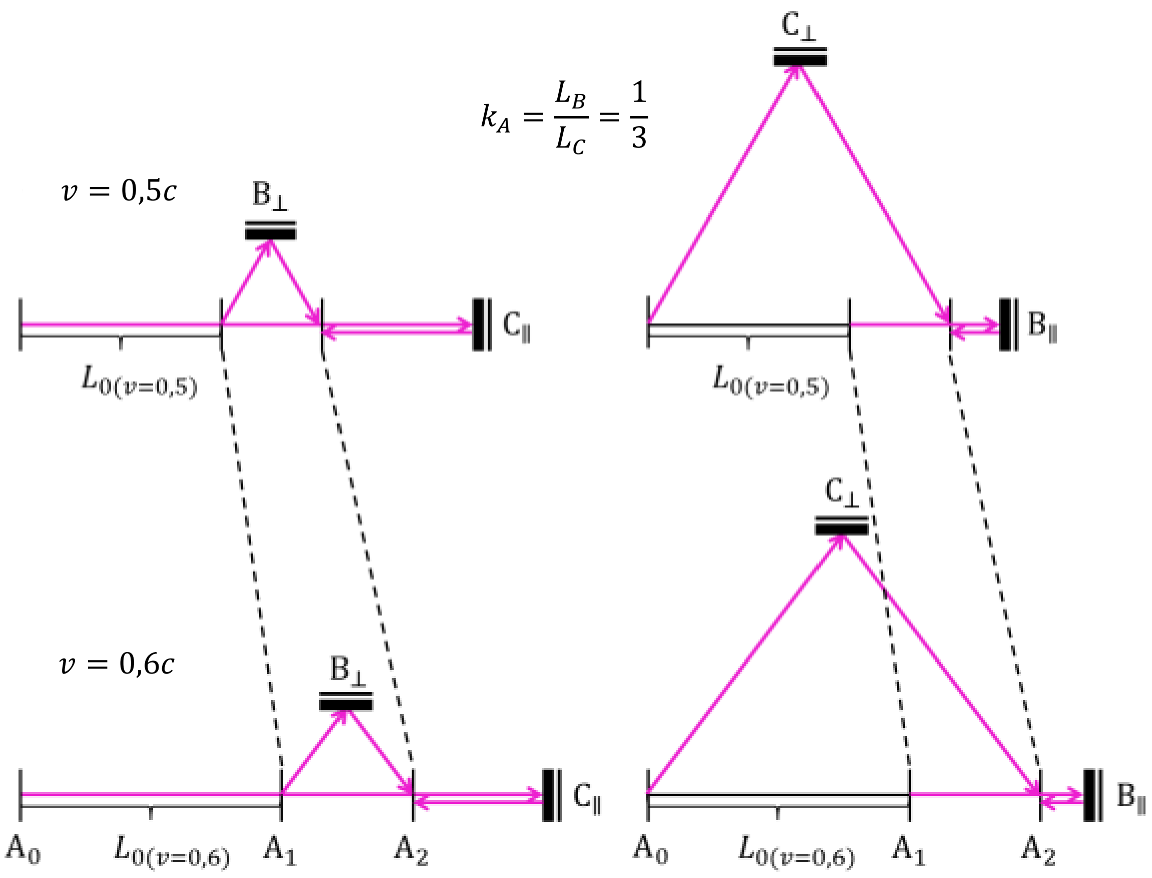


Abb. 9.4: Kennedy-Thorndike Versuch: Beschleunigung

mit

$$\frac{a}{b} = \gamma \tag{9.38}$$

Damit ist gezeigt, dass ein Nullresultat der Messungen nur dann auftreten kann, wenn das Verhältnis vom Faktor für die Startzeit des Signals des verkürzten Messarms und der Korrekturfaktor der Längenkontraktion exakt dem Lorentz-Faktor γ entsprechen. Wir wissen heute aus zusätzlichen Versuchen bezüglich der Zeitdilatation (z. B. von Ives-Sitwell, vgl. Kap. 9.3), dass der Faktor $b = 1$ ist. Zum Zeitpunkt der ersten Veröffentlichung im Jahr 1932 war dies jedoch noch nicht bekannt.

Der Versuchsaufbau lässt sich gemäß Abb. 9.3 und Abb. 9.4 darstellen, wobei für das Verhältnis der Messarmlängen die Größe 1/3 gewählt wurde Zunächst wird hier das Verhalten bei einer Drehbewegung betrachtet (Abb. 9.3) außerdem ist die Situation für eine Beschleunigung dargestellt (Abb. 9.4). In der Praxis wird sich in der Regel immer der Fall einstellen, dass beide Situationen zusammen auftreten und sich die Effekte überlagern. Es werden Lichtimpulse ausgesandt, die an den Spiegeln B und C reflektiert werden; die Bezeichnungen $C_{\parallel}$, $C_{\perp}$, $B_{\parallel}$ und $B_{\perp}$ zeigen an, ob die Reflektion längs zur Bewegungsrichtung oder quer dazu erfolgt.

Die Koordinaten der entsprechenden Punkte sind in nachfolgender Zusammenstellung wiedergegeben. Es wurde das Format x, y, t gewählt; in z-Richtung findet keine Bewegung statt und diese wurde daher nicht aufgeführt (d. h. $z = 0$). Für das Verhältnis der Raumkontraktion zwischen Längs- und Querrichtung wurde der Faktor γ gemäß dem Versuch von Michelson-Morley angesetzt.

Koordinate	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$	$\boldsymbol{t}$
$C_{\parallel}$	$\frac{L_C}{\gamma\left(1-\frac{v}{c}\right)}$	0	$\frac{L_C}{\gamma c\left(1-\frac{v}{c}\right)}$
$C_{\perp}$	$\frac{\gamma L_C v}{c}$	L_C	$\frac{\gamma L_C}{c}$
A_1	$\frac{2\gamma L_C v}{c}(1-k_A)$	0	$\frac{2\gamma L_C}{c}(1-k_A)$
$B_{\parallel}$	$\frac{2\gamma L_C v}{c}(1-k_A)+\frac{L_C k_A}{\gamma\left(1-\frac{v}{c}\right)}$	0	$\frac{2\gamma L_C}{c}(1-k_A)+\frac{L_C k_A}{\gamma c\left(1-\frac{v}{c}\right)}$
$B_{\perp}$	$\frac{2\gamma L_C v}{c}(1-k_A)+\frac{\gamma L_C v}{c}k_A$	$L_C k_A$	$\frac{2\gamma L_C}{c}(1-k_A)+\frac{\gamma L_C}{c}k_A$
A_2	$\frac{2\gamma L_C v}{c}$	0	$\frac{2\gamma L_C}{c}$

Tab. 9.1: Darstellung der Koordinaten aus Abb. 9.3

Die in Tab. 9.1 dargestellten Werte für A_2 lassen sich gemäß des Strahlenverlaufs auf 4 verschiedene Arten berechnen, die alle zu dem gleichen Endergebnis führen (Tab. 9.2). Es wurde hier also gezeigt, dass eine Drehung der Apparatur und der Vergleich zwischen unbewegtem und bewegtem System zu den gleichen Ergebnissen führen. Aus den Betrachtungen ergibt sich darüber hinaus, dass die Startzeit des Signals des verkürzten Messarms und der Korrekturfaktor der Längenkontraktion exakt γ entsprechen müssen. Dies soll im folgenden Kapitel noch weiter diskutiert werden.

Die Darstellung der Verhältnisse bei einer Beschleunigung in Abb. 9.4 ergeben die gleichen Verhältnisse wie sie bereits in den Kap. 4 und 5 präsentiert wurden und deshalb ist hier keine weitere Diskussion erforderlich. Beim Übergang zwischen Systemen unterschiedlicher Geschwindigkeit ergeben sich keine prinzipiellen Unterschiede.

Weg über:	x	t
$C_\parallel$	$\frac{L_C}{\gamma\left(1-\frac{v}{c}\right)} - \frac{L_C}{\gamma\left(1+\frac{v}{c}\right)}$	$\frac{L_C}{\gamma c\left(1-\frac{v}{c}\right)} + \frac{L_C}{\gamma c\left(1+\frac{v}{c}\right)}$
$C_\perp$	$\frac{\gamma L_C v}{c} + \frac{\gamma L_C v}{c}$	$\frac{\gamma L_C}{c} + \frac{\gamma L_C}{c}$
$B_\parallel$	$\frac{2\gamma L_C v}{c}(1-k_A) + \frac{L_C k_A}{\gamma\left(1-\frac{v}{c}\right)} - \frac{L_C k_A}{\gamma\left(1+\frac{v}{c}\right)}$	$\frac{2\gamma L_C}{c}(1-k_A) + \frac{L_C k_A}{\gamma c\left(1-\frac{v}{c}\right)} + \frac{L_C k_A}{\gamma c\left(1+\frac{v}{c}\right)}$
$B_\perp$	$\frac{2\gamma L_C v}{c}(1-k_A) + \frac{\gamma L_C v}{c}k_A + \frac{\gamma L_C v}{c}k_A$	$\frac{2\gamma L_C}{c}(1-k_A) + \frac{\gamma L_C}{c}k_A + \frac{\gamma L_C}{c}k_A$

Tab. 9.2: Berechnung des Wertes für A_2 bei einem Weg über die Positionen $C_\parallel$, $C_\perp$, $B_\parallel$ und $B_\perp$. Alle Berechnungen führen zum selben Endresultat.

9.2.4 Bewertung der Ergebnisse

Betrachtet man die Ergebnisse der Versuche von Michelson-Morley und Kennedy-Thorndike mit den erzielten Nullresultaten so wird deutlich, dass eine abschließende Bewertung der Konstanten a und b ohne weitere Angaben nicht erfolgen kann und damit eine Aussage bezüglich der Gültigkeit der Lorentz-Transformation unvollständig bleibt. Üblicherweise wird hierzu das Experiment von Ives-Stilwell verwendet, das in Kurzform in Kap.9.3 dargestellt ist. Es gibt jedoch auch andere einfache Möglichkeiten dies zu verifizieren.

Nimmt man z. B. an, dass $a = 1$ und damit $b = 1/\gamma$ ist, so würde dies bedeuten, dass ein bewegtes System keiner Zeitdilatation unterworfen ist, dafür aber die Raumkontraktion in Bewegungsrichtung γ^2 und zusätzlich in Querrichtung γ ist. Dieser Effekt würde jedoch bei einer Reihe von Versuchen feststellbar sein. Dies wäre z. B. beim Austausch von Signalen zwischen bewegten Körpern (vgl. Kap.2.1) oder auch bei der Frequenzbestimmung von Signalen aus bewegten Körpern (vgl. Kap. 8) der Fall. Neben den messbaren Unterschieden tritt auch der Fall auf, dass das Relativitätsprinzip verletzt wird und es bei der Betrachtung aus einem Zustand der Ruhe und der Bewegung zu unterschiedlichen Ergebnissen kommen würde. Dies gilt neben dem hier dargestellten Beispiel für alle möglichen Konstellationen, in denen nicht die Konstanten $a = \gamma$ und $b = 1$ gewählt werden.

Der Titel der von Kennedy und Thorndike herausgegebenen Veröffentlichung lautet „Experimental Establishment of the Relativity of Time“. Aufgrund der dargestellten Abhängigkeiten der Konstanten wird heute der Anspruch, dass hiermit ein echter Nachweis geführt wurde, als nicht erfüllt zurückgewiesen, z. B. [19]. Wäre es jedoch seitens der Verfasser 1932 zu einer korrekten Ableitung und einer zusätzlichen Interpretation mit zum damaligen Zeitpunkt bereits bekannten Versuchsergebnissen gekommen, so hätte die Aussage Bestand. Unabhängig davon ist dieses Experiment und die zwischenzeitlich erfolgten Verbesserungen in der Genauigkeit ein wichtiges Element zum Verständnis der Vorgänge beim Signalaustausch von bewegten Beobachtern.

9.3 Weitere wichtige Experimente

Es gibt eine Vielzahl von weiteren bahnbrechenden Experimenten, von denen die für die hier angestellten Überlegungen wichtigsten im Folgenden in Kürze vorgestellt werden sollen.

a) Rømer-Experiment

Hierbei handelt es sich um das erste Experiment, mit dem die Größe der Lichtgeschwindigkeit gemessen wurde. Wichtig war hier insbesondere, dass erstmalig (im Jahr 1676!) der Nachweis geführt wurde, dass diese endlich ist. Der Nachweis erfolgte von O. C. Rømer durch Messung der Verfinsterung des Jupiter-Mondes Io, die bei Erdnähe des Jupiters früher, bei Erdferne später auftritt. Aus seinen Messergebnissen wurde von C. Huygens im Jahr 1678 die Lichtgeschwindigkeit zu 213.000 km/s berechnet, was etwa 71% des tatsächlichen Wertes entspricht.

b) Aberration des Lichts

Diese Messeffekt wurde von J. Bradley im Jahre 1725 erstmalig nachgewiesen. Er entdeckte, dass der Stern Gamma Draconis im Laufe eines Jahres eine geringfügige Ortsveränderung am Himmel zeigt und führte diese auf die Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit zurück. Seine Messergebnisse erreichten bereits eine Genauigkeit von 2% (zu weiteren Details vgl. auch Darstellung in Kap. 1.3).

c) Doppelstern Experiment

Hierbei wird durch Betrachtung von Doppelsternsystemen gezeigt, dass die Lichtgeschwindigkeit unabhängig von der Geschwindigkeit des Körpers ist, der die Signale aussendet. Diese Überlegungen wurden maßgeblich von W. de Sitter vorgenommen, der durch spektroskopische Untersuchungen nachwies, dass eine Addition der Geschwindigkeiten des Lichts und der Quelle zu Widersprüchen mit den Keplerschen Gesetzen führen würde [55].

d) Ives-Stilwell-Experiment

Dieses Experiment liefert den direkten Nachweis, dass die Zeit in bewegten Systemen langsamer abläuft als in einem Referenzsystem [17,18]. Hierzu wurde der transversale Dopplereffekt von Licht untersucht, der aus sich nähernden und entfernenden Kanalstrahlen stammte. Die Ergebnisse sind zwischenzeitlich sehr genau und haben den Wert des Lorentz-Faktors γ eindrucksvoll bestätigt.

e) Trouton-Noble-Experiment

Hier wurde ein geladener Plattenkondensator benutzt, der sich frei um eine Achse drehen kann. Beim Vorhandensein eines „Ätherwindes" würde sich dieser während der Bewegung der Erde drehen. Dieser Versuch ist somit mit dem Michelson-Morley-Experiment vergleichbar. Obwohl elektromagnetische Effekte nicht Gegenstand der hier durchgeführten Überlegungen sind, soll dieses wichtige Experiment nicht unerwähnt bleiben [56].

Weitere Experimente sind in anderen Zusammenstellungen z. B. [19,21,57,58] ausführlich dargestellt.

9.4 Zusammenfassende Bewertung der Experimente

Im Jahr 1949 wurde von H. P. Robertson eine zusammenfassende Klassifizierung der verschiedenen Messverfahren vorgenommen und dabei ein Konzept entwickelt, dass bis heute verwendet wird [59]. Es werden dabei die folgenden Messverfahren und ihre Bedeutung unterschieden:

1. *Michelson-Morley:*
   Die Lichtgeschwindigkeit ist unabhängig von der Richtung bezüglich eines angenommenen bevorzugten Bezugssystems.
2. *Kennedy-Thorndike*
   Die Lichtgeschwindigkeit ist unabhängig von der Relativgeschwindigkeit eines Beobachters bezüglich eines beliebigen Bezugssystems.
3. *Ives-Stilwell*
   Die Zeit in einem bewegten System läuft um den Faktor γ langsamer ab als in einem beliebigen Bezugssystem.

Bei neueren Präsentationen der Experimente werden manchmal etwas andere Interpretationen genutzt. Die hier gewählte Zusammenfassung orientiert aber sich an der ersten von Robertson gewählten Darstellung.

Berücksichtigt man die zuvor dargestellten Zusammenhänge bezüglich der Invarianz der Phasengeschwindigkeit des Lichts so ist festzustellen, dass eine Neuinterpretation der Versuche eine verbesserte Erklärung der Vorgänge zur Folge hat, die grundsätzlichen Zusammenhänge gelten jedoch weiter. Michelson-Morley- und Kennedy-Thorndike-Experiment reichen zusammen nicht aus und die Vorgänge eindeutig zu erklären. Es sind aber neben dem Ives-Stilwell-Experiment andere, einfachere Versuche denkbar, die zum gleichen Ergebnis führen (vgl. Kap. 9.2.4).

Es bleibt abschließend die Frage, warum die große Bedeutung des Themas der Invarianz der Phasengeschwindigkeit des Lichts in zueinander bewegten Inertialsystemen nicht schon früher diskutiert worden ist. Die grundsätzlichen Zusammenhänge gehören seit vielen Jahrzehnten zum Standardwissen der Physik [46a]. Der Einfluss der Bewegung der Versuchseinrichtung wurde ebenfalls vielfach diskutiert (z. B. [49,50,51,52]). Außerdem gibt es ausführliche theoretische Arbeiten zur „Invarianz der Phasengeschwindigkeit" [27]. Trotzdem ist es bisher nicht zu einer Kombination dieser Erkenntnisse gekommen, die eine große Bedeutung für elementare Grundlagen der heutigen Physik haben. Sicherlich hat der konsequente Ansatz zur Betrachtung von ruhenden und bewegten Beobachtern hierzu wesentlich beigetragen.

Abschließend soll noch auf die zwischenzeitlich erreichte hohe Präzision von Messungen und dadurch mögliche grundlegende Definitionen eingegangen werden.

- Im Jahre 1960 wurde die Definition der Länge eines Meters über die Wellenlänge eingeführt: Ein Meter ist demnach das 1650763,73-fache der Wellenlänge der von Atomen des Nuklids 86Kr beim Übergang vom Zustand $5d5$ zum Zustand $2p10$ ausgesandten, sich im Vakuum ausbreitenden Strahlung [87].
- Diese Festlegung hatte viele Jahre Bestand, bevor sie durch eine neuere, noch genauere Definition abgelöst wurde, bei der Zeit als Definitionsgrundlage gewählt wurde. Die Sekunde ist demnach das 9192631770-fache der Periodendauer der dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustandes von Atomen des Nuklids 133Cs entsprechenden Strahlung [88].

Ohne Das Prinzip der Invarianz der Phasengeschwindigkeit wären beide Definitionen nicht möglich gewesen, da bereits kleinste Bewegungen eines Beobachters zu einem solchen Referenzsystem zu Messabweichungen führen würden.

Es gibt noch einen weiteren Aspekt zu diesem Thema. Hierbei handelt es sich um den „Frequenzkamm", bei dem mit einem Femtolaser extrem kurze Impulse erzeugt werden, die sich in einem Spiegelsystem überlagern. Dabei entsteht eine stehende Welle, die auch als Kamm bezeichnet wird (zu Hintergrund und historischer Entwicklung siehe z. B. [53]). Bei dieser Technik handelt es sich interessanterweise um eine „hybride" Erzeugung von Lichtwellen; die kurzen Impulse kann man auch in ihrer Gesamtheit als Wellen auffassen. Eine klassische Interpretation mit einem Frequenzvergleich versagt hier völlig.

10. Elektromagnetismus und Gravitation

Im 19. Jahrhundert wurden elektrische und magnetische Effekte intensiv erforscht. Mit der Erfindung der ersten funktionsfähigen Batterie durch Alessandro Volta wurden grundlegende experimentelle Untersuchungen möglich. Dies wurde bereits in Kap. 1.4 dargestellt, außerdem sind dort weitere Details zu den wesentlichen Entwicklungen und den vielen daran beteiligten Personen zusammengefasst.

Das wichtigste Ergebnis ist, dass sich alle elektromagnetischen Vorgänge auf die Darstellungen der Maxwell-Gleichungen zusammenfassen lassen. Diese sind in Kap. 10.1 aufgeführt, anschließend wird ein formaler Vergleich mit den Gegebenheiten bei der Gravitation vorgenommen. Zum Verständnis sind Grundlagen der Vektorrechnung erforderlich, deren wichtigste Elemente in kurzer Form in Anlage E zusammengefasst sind.

10.1 Maxwell-Gleichungen

Die Maxwell-Gleichungen bestehen aus 4 Gesetzen. Nachfolgend ist deren Bezeichnung und eine kurze Erklärung aufgeführt. Die Formelmäßige Darstellung und die grundlegende Bedeutung sind in der Tab. 10.1 zusammengefasst. In Tab. 10.2 folgen die Bezeichnung der Formelzeichen und die zugehörigen Dimensionen.

1. *Gaußsches Gesetz*
   Das Gaußsche Gesetz beschreibt in der Elektrostatik und Elektrodynamik den elektrischen Fluss durch eine geschlossene Fläche. Es ist benannt nach dem Mathematiker Carl Friedrich Gauß, der den nach ihm benannten Integralsatz für ein Vektorfeld entwickelte.
2. *Gaußsches Gesetz für Magnetfelder*
   Hiermit wird analog zum elektrischen Feld der magnetische Fluss durch eine geschlossene Fläche beschrieben.
3. *Induktionsgesetz*
   Dieses von Michael Faraday entdeckte Gesetz beschreibt den Aufbau von elektrischen Feldern.
4. *Erweitertes Durchflutungsgesetz*
   Hiermit wird basierend auf dem Gesetz von André-Marie Ampère der Aufbau eines magnetischen Feldes beschrieben.

Zum besseren Verständnis der Zusammenhänge wurden die 4 Maxwell-Gleichungen in Tab. 10.1 so angeordnet, dass sich vom statischen elektrischen Feld über die dynamischen Veränderungen von elektrischen und magnetischen Eigenschaften die Abfolge bis zum statischen Magnetfeld ergibt. Dabei stellt die Kopplung der elektrischen und magnetischen Feldkonstanten die Verbindung zwischen den beiden Elementen dar. In der rechten Hälfte der Abbildung wurde die jeweilige Bedeutung der Beziehungen hinzugefügt.

(1) $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho_{el}}{\varepsilon_0}$ $\vec{F} = \frac{Q_1\,Q_2}{4\pi\varepsilon_0 s^2}\cdot\vec{s}_0$ $\varepsilon_0 = 8{,}8542\cdot 10^{-12}\,\frac{C^2}{Nm^2}$	**Elektrisches Feld** Quelle: Ladung Gleichartige Ladungen stoßen sich ab
(3) $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$	Die Änderung eines Magnetfelds $\vec{B}$ bewirkt den Aufbau eines elektrischen Felds $\vec{E}$ (in Form eines geschlossenen Wirbelfelds)
$\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$	Die Feldkonstanten sind mit der Lichtgeschwindigkeit gekoppelt
(4) $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j}_{el} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$	Das Fließen eines elektrischen Stroms $\vec{j}_{el}$ und die Änderung eines elektrischen Felds $\vec{E}$ bewirken den Aufbau eines Magnetfelds $\vec{B}$
(2) $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ $\vec{M} = \vec{m}\times\vec{B}$ $\mu_0 = 1{,}2566\cdot 10^{-6}\,\frac{Ns^2}{C^2}$	**Magnetisches Feld** Quellenfrei (Wirbelfeld) Gleichartige Pole stoßen sich ab

Tab. 10.1: Maxwell-Gleichungen und deren Interpretation (Def. der Größen in Tab. 10.3) Die Nummern der Gesetze sind der jeweiligen Formel vorangestellt.

10.2 Vergleich zwischen elektrischem Feld und Gravitation

Wegen der formalen Ähnlichkeit zwischen elektrischem Feld und Gravitationsfeld wurde schon früh angenommen, dass die Maxwell-Gleichungen auch hierbei Anwendung finden müssten. Als erster hat Heaviside bereits im Jahr 1895 diese These vertreten. Heute besteht allgemein Konsens darüber, dass diese Annahme zwar korrekt ist aber nur für den Grenzbereich kleiner Massen und Geschwindigkeiten gilt [94]. Für andere Gegebenheiten, insbesondere wenn Vorgänge mit großen Massen, wie z. B. bei schwarzen Löchern, betrachtet werden, gelten andere Zusammenhänge und es müssen Raumkrümmung etc. berücksichtigt werden wie dies z. B. in der allgemeinen Relativitätstheorie der Fall ist.

Es gibt einen formalen Unterschied zwischen den Darstellungen des elektrischen Felds und der Gravitation. Weil die Beziehungen beim elektrischen Feld für einen homogenen Verlauf (wie z. B. in einem Kondensator der Fall mit Q als Ladung und s als Plattenbstand) abgeleitet wurden, die Gravitation aber für eine räumliche Verteilung (mit m als Masse, r als Radius), unterscheiden sich die Berechnungen für die Kräfte:

Kraft im elektrischen Feld	Kraft im Gravitationsfeld
$\vec{\mathrm{F}} = \frac{\mathrm{Q}_1\,\mathrm{Q}_2}{4\pi\varepsilon_0 \mathrm{s}^2} \cdot \vec{s}_0$ (10.01)	$\vec{\mathrm{F}} = -G\,\frac{m_1\,\mathrm{m}_2}{r^2} \cdot \vec{r}_0$ (10.02)

Für einen Vergleich der Felder ist es sinnvoll, eine der Größen entsprechend umzuwandeln; wird hierfür die Gravitationskonstante gewählt dann entsteht

$$G' = \frac{1}{4\pi G} \tag{10.03}$$

Dies vorausgesetzt ergibt sich bei einer Gegenüberstellung die in Tab. 10.2 wiedergegebene Form. Hier sind zunächst die Maxwell-Gleichungen in abgewandelter Weise dargestellt, bei der auf die Nutzung der magnetischen Feldkonstante verzichtet und stattdessen die Kopplung mit der Lichtgeschwindigkeit genutzt wurde (vgl. Tab. 10.1). Auf diese Weise ist es nicht erforderlich, für das Gravitationsfeld entsprechende Größen neu zu definieren. Die entstehende Analogie zu den Maxwell-Gleichungen führt zur Definition eines Gleichungssystems, dessen physikalische Bedeutung heute allgemein als „Gravitoelektromagnetismus (GEM)" [94] gedeutet wird (Tab. 10.2).

Maxwell-Gleichungen für Elektromagnetismus	Maxwell-Gleichungen für Gravitoelektromagnetismus
(1) $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathrm{E}} = \frac{\rho_{\mathrm{el}}}{\varepsilon_0}$	(1) $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathrm{E}}_{\mathrm{g}} = -\frac{\rho_{\mathrm{g}}}{G'}$
(3) $\vec{\nabla} \times \vec{\mathrm{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathrm{B}}}{\partial t}$	(3) $\vec{\nabla} \times \vec{\mathrm{E}}_{\mathrm{g}} = -\frac{\partial \vec{\mathrm{B}}_{\mathrm{g}}}{\partial t}$
(4) $\vec{\nabla} \times \vec{\mathrm{B}} = \frac{\vec{\mathrm{J}}_{\mathrm{el}}}{\varepsilon_0 \cdot \mathrm{c}^2} - \frac{1}{\mathrm{c}^2}\frac{\partial \vec{\mathrm{E}}}{\partial t}$	(4) $\vec{\nabla} \times \vec{\mathrm{B}}_{\mathrm{g}} = -\frac{\vec{\mathrm{J}}_{\mathrm{g}}}{G' \cdot \mathrm{c}^2} + \frac{1}{\mathrm{c}^2}\frac{\partial \vec{\mathrm{E}}_{\mathrm{g}}}{\partial \mathrm{t}}$
(2) $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathrm{B}} = 0$	(2) $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathrm{B}}_{\mathrm{g}} = 0$

Tab. 10.2: Anwendung der Maxwell-Gleichungen auf das Gravitationsfeld.
Die Nummern der Gesetze sind der jeweiligen Formel vorangestellt.
Zu Definition und Anwendung des Nabla-Operators $\vec{\nabla}$ vgl. Anlage E.

Es wird hierbei vorausgesetzt, dass die Lichtgeschwindigkeit c und die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Gravitation gleich sind.

Die dargestellten Gleichungen entsprechen sich mit dem Unterschied, dass die Vorzeichen für die Gleichungen 1 und 4 verschieden sind. Dies hat für die Gleichungen 1 zunächst die einfache Bedeutung, dass sich Massen anziehen, während sich gleichartige Ladungen abstoßen. Bezüglich der Gleichungen 4 folgt daraus in gleicher Weise, dass sich gleichartige Pole im GEM-Feld nicht wie beim Elektromagnetismus abstoßen, sondern anziehen.

In diesem Zusammenhang besteht die interessante Frage, ob es für die Gravitation ein Äquivalent für positive und negative Ladungen gibt. Dies könnte für das Paar Materie/Antimaterie gelten. Für theoretische Betrachtungen ist von großer Bedeutung, ob sich Materie und Antimaterie anziehen, abstoßen, oder, wie manche Theorien voraussagen, schwächer anziehen als reine Materie. Hierzu hat es im Jahr 2023 einen ersten Durchbruch gegeben, als bei Untersuchungen am CERN an Antiwasserstoffatomen festgestellt wurde, dass diese von der Erdgravitation angezogen werden [95]. Es handelt sich hierbei um eines der interessantesten aktuellen Experimente, dessen Genauigkeit weiter erhöht werden soll, um grundlegende Fragen zu klären.

	Physikalische Größe	Dim.		Physikalische Größe	Dim.
$\vec{E}$	Elektrische Feldstärke	$\frac{N}{C}$	$\vec{E}_g$	Gravitationsfeldstärke	$\frac{m}{s^2}$
$\vec{B}$	Magnetische Flussdichte	$\frac{Ns}{Cm}$	$\vec{B}_g$	Gravitomagnetische Feldstärke	$\frac{1}{s}$
$\vec{M}$	Moment	Nm	$\vec{m}$	Magnetisches Moment	$\frac{Cm^2}{s}$
$\vec{J}_{el}$	Elektrischer Volumenstrom	$\frac{C}{m^2 s}$	$\vec{J}_g$	Massenvolumenstrom	$\frac{kg}{m^2 s}$
ρ_{el}	Elektrische Ladungsdichte	$\frac{C}{m^2}$	ρ_g	Massendichte	$\frac{kg}{m^2}$

Tab. 10.3: Definition der verwendeten physikalischen Größen mit Dimensionen.

Trotz formaler Ähnlichkeit zwischen den in den Tab. 10.2 und Tab. 10.3 dargestellten Größen gibt es erhebliche Unterschiede in deren Ausprägung. Dies soll zunächst für elektrisches Feld und Gravitationsfeld betrachtet werden. Wird in einem einfachen Beispiel der Unterschied in den jeweiligen Anziehungskräften zwischen einem Proton und einem Elektron berechnet, so können dazu die Formeln (10.01) und (10.02) benutzt werden. Die Werte für die spezifischen Größen sind in Tab10.4 zusammengestellt. Werden die Werte eingesetzt, so ergibt sich für diesen Fall ein extremer Unterschied zwischen elektrischer und gravitativer Anziehungskraft, und zwar um den Faktor $2{,}27 \cdot 10^{39}$!

Masse Proton	$m_P = 1{,}6726 \cdot 10^{-27}\text{kg}$	Masse Elektron	$m_E = 9{,}1094 \cdot 10^{-31}\text{kg}$
Ladung Proton	$\mathrm{Q_P} = 1{,}6022 \cdot 10^{-27}\text{C}$	Ladung Elektron	$\mathrm{Q}_E = -1{,}6022 \cdot 10^{-27}\text{C}$
Gravitations-konstante	$G = 6{,}6743 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\ s}^2}$	Elektrische Feldkonstante	$\varepsilon_0 = 8{,}8542 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2}$

Tab. 10.4: Werte der für die Berechnungen verwendeten physikalischen Größen.

Anmerkung zu Tab. 10.4: Die Werte für ε_0 werden in der Literatur oft mit der Dimension As/Vm angegeben. Dies lässt sich leicht umrechnen unter Nutzung der Leistung P in Watt [W] und ergibt mit der Ladung C (Coulomb) als As (Ampere·Sekunden)

$$\left[1\mathrm{W} = 1\,\frac{\mathrm{kg\ m}^2}{\mathrm{s}^3} = 1\,\frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{s}} = 1\ \mathrm{VA}\right]$$

Der Unterschied zwischen elektrischem Feld und Gravitationsfeld besteht nicht nur in der Größe der Anziehungskraft, sondern vor Allem in der Tatsache, dass elektrische Ladungen sich im täglichen Leben kompensieren, d. h. jedem positiven Atomkern steht ein negatives Elektron gegenüber. Außerdem lassen sich elektrische Ladungen abschirmen. Bei der Gravitation addieren sich hingegen alle Massen auf und die wirksamen Anziehungskräfte lassen sich nach heutigem Wissen in keiner Weise beeinflussen.

Weitere wichtige Unterschiede bestehen darin, dass elektrische Ladungen immer als Vielfaches der Elementarladungen auftreten, während bei der Gravitation keine kleinste unteilbare Einheit bekannt ist. Außerdem ist die kinetische Energie von Massen vom Bewegungszustand abhängig, während dies für elektrische Ladungen nicht gilt. Des Weiteren sind Permeabilitätseffekte bei der Gravitation unbekannt.

Trotz der geringen Effekte gelang es bereits im Jahr 1798 mit der vom Engländer H. Cavendish [1731-1810] entwickelten Gravitationswaage Dichteunterschiede in der Erde zu bestimmen und die Gravitationskonstante zu berechnen.

Ein direkter experimenteller Nachweis für die Existenz des Gravitomagnetismus in der hier dargestellten Form ist auf der Erdoberfläche wegen der auftretenden extrem geringen Effekte bislang nicht gelungen. Nach Kalkulationen von D. Giulini würde ein am Nordpol aufgestellter Kreisel mit einer Geschwindigkeit von 0,6 Millibogensekunden pro Tag präzedieren; bei den derzeitigen experimentellen Gegebenheiten ist dies noch 1 bis 2 Größenordnungen außerhalb der Nachweisgrenzen [96].

In kosmischen Dimensionen treten dagegen größere Effekte auf, wobei die Gestalt eines solchen Feldes durch Berechnungen ermittelt werden kann. In Abb. 10.1 ist die Ausprägung eines gravitomagnetischen Dipolfeldes in einer graphischen Wiedergabe dargestellt, ausgewertet an Punkten im Winkelabstand von 30°, die auf einem Kreis um das Zentrum liegen [96]. Im Zentrum befindet sich der rotierende Stern, dessen Drehimpuls durch einen nach oben zeigenden Pfeil (Vektor) symbolisiert wird. Er erzeugt das Dipolfeld.

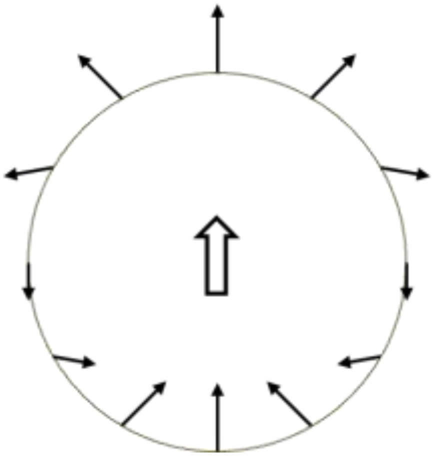


Abb. 10.1: Ausprägung eines gravitomagnetischen Dipolfeldes, das durch einen rotierenden Stern in der Mitte erzeugt wird [96].

Erst mit dem Start der Raumsonde Gravity Probe B im Jahr 2004, mit der die Wechselwirkungen zwischen 4 gegenläufig rotierenden Kreiseln und der rotierenden Erde untersucht wurden, war ein experimenteller Nachweis möglich. Nach langwierigen und komplizierten Auswertungen aufgrund von aufgetretenen Störeffekten wurden 2011 Ergebnisse veröffentlicht, die im Rahmen von Untersuchungen zur Verifizierung der Allgemeinen Relativitätstheorie gewonnen werden konnten [97]. Es handelt sich dabei um Auswirkungen der Raumzeit-Krümmung und um den Lense-Thirring-Effekt. Zu Details sei auf weiterführende Literatur verwiesen [96, 97].

Abschließend soll noch ein anderer interessanter Aspekt betrachtet werden. Es gibt seit Jahren Untersuchungen zur Verstärkung von gravitomagnetischen Effekten, ähnlich wie sie bei der Steigerung der Permeabilität von Magnetfeldern beobachtet werden (z. B. durch Zuführung eines Eisenkerns in eine Spule). Ein solcher Nachweis hätte enorme Auswirkungen auf die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie und unterliegt daher besonderer Beobachtung. In einem der Versuche wurde z. B. eine große Menge an rotierendem flüssigem Helium in einem supraleitenden Nb-Rohr verwendet und darin ein Gyroskop platziert. Nach ersten positiven Ergebnissen zur Steigerung des gravitomagnetischen Effektes zeigte sich aber, dass diese nicht reproduzierbar waren [98]. Keiner der bisher durchgeführten Versuche war erfolgreich und somit sind auch keine Auswirkungen auf die Theorie erkennbar.

11. Grenzen der Speziellen Relativitätstheorie

Wie bereits ausführlich dargestellt wurde, gibt es eine beeindruckende Anzahl von Beispielen, die die Gültigkeit der Speziellen Relativitätstheorie stützen. Es handelt sich hierbei u. a. um kinematische Betrachtungen zwischen bewegten Beobachtern, außerdem um die Vorgänge beim Uhrentransport sowie um die Relationen für Masse, Impuls, Kraft, Energie und um die Verhältnisse bei Stoßprozessen oder relativistischer Betrachtung des Raketenantriebs. Für eine Vielzahl von Konfigurationen wurde gezeigt, dass bei Verwendung der Lorentz-Transformation keine Unterschiede für einen absolut ruhenden oder einen bewegten Beobachter vorliegen und es keine Möglichkeit gibt innerhalb eines Systems auf einen Ruhezustand zu schließen. Hierdurch sind gemäß dem zentralen Postulat der Speziellen Relativitätstheorie alle Beobachter als gleichwertig zu betrachten und die Theorie wäre daher als gültig anzusehen.

Alle bisher diskutierten Beispiele haben gemeinsam, dass die Übertragung von Signalen mit Lichtimpulsen erfolgt. Treten dagegen Überlichtgeschwindigkeiten auf, wie sie z. B. beim Tunneleffekt gemessen wurden, so wird hier gezeigt, dass – sofern sich hierbei auch Informationen überlichtschnell übertragen lassen – die auftretenden Effekte mit der Speziellen Relativitätstheorie nicht in Übereinstimmung gebracht werden können. Abschließend wird noch der Sachverhalt bezüglich der Synchronisation nach Beschleunigungen betrachtet, der ebenfalls Ansätze zu Widersprüchen beinhaltet.

11.1 Überlichtgeschwindigkeit beim Tunneleffekt und seine Bedeutung

Optische Untersuchungen an Prismen werden schon seit langer Zeit durchgeführt. So haben Newton, Huygens und viele andere Wissenschaftler die grundlegenden Zusammenhänge erforscht.

Mit der Entwicklung moderner Untersuchungsmethoden rückten dann quantenmechanische Effekte in den Fokus. Von Fritz Goos (1883-1968) und Hilda Hänchen (1919-2013) wurde entdeckt, dass eine linear polarisierte Welle (z. B. Licht) beim Übergang von einem optisch dichten in ein optisch dünneres Medium nicht an der Grenzfläche, sondern in einer dazu parallelen virtuellen Ebene im optisch dünneren Medium reflektiert wird. Der Effekt ist nur mit einem quantenmechanischen Ansatz zu deuten und kann mit Standardmethoden nicht erklärt werden. Die Arbeiten fanden während des 2. Weltkriegs in Berlin statt und konnten teilweise erst 1947 veröffentlicht werden [60,61].

Weitere Untersuchungen ergaben, dass an optischen Grenzflächen Tunneleffekte auftreten, bei denen die Durchlaufzeiten unabhängig von deren Dicke sind [62] was zu intensiven Diskussionen über das Auftreten von Überlichtgeschwindigkeiten führte.

11.1.1 Der Tunneleffekt

Tunneleffekte und die damit verbundenen Messungen der Geschwindigkeiten beim Passieren einer Grenzfläche sind bereits Gegenstand zahlreicher Untersuchungen gewesen. Ein Überblick über die verschiedenen Versuche mit Prismen oder anderen Objekten, durchgeführt bei unterschiedlichen Frequenzbereichen wurde z. B. von H. G. Winful umfassend zusammengestellt [63].

Aus der Vielzahl der Möglichkeiten sollen hier beispielhaft Messungen mit Doppelprismen beschrieben werden. Ein hierzu typischer Versuchsaufbau lässt sich in folgender Weise darstellen (vgl. Abb. 11.1).

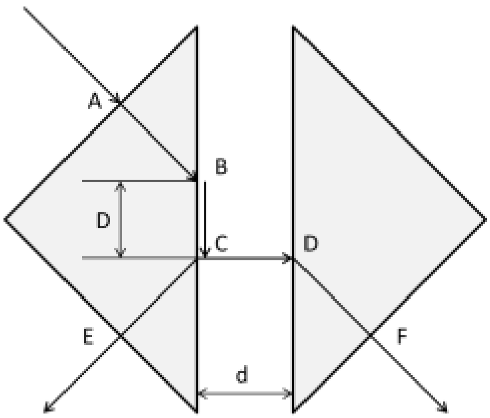


Abb. 11.1: Versuchsaufbau zur Messung eines Tunneleffekts (nach [64])

Eine elektromagnetische Welle trifft an der Stelle A auf ein Prisma und tritt in den Körper ein. Bei geeignetem Winkel (siehe hierzu z. B. [64]) wird die Welle am Punkt B reflektiert. Ist ein zweites gleichartiges Prisma gegenüber angeordnet, so wird ein (nur quantenmechanisch erklärbarer) Tunneleffekt auftreten. Dabei werden die Strecken $\overline{BC}$ sowie $\overline{CD}$ ohne Zeitverlust durchlaufen. Der größte Teil der Welle wird bei E austreten, ein kleiner Anteil am Punkt F. Der Austritt erfolgt dabei zu exakt der gleichen Zeit. Bei Versuchen dieser Art können auch größere Dimensionen untersucht werden, allerdings ist die Intensität des Strahls auf dem Weg $\overline{DF}$ stark abhängig vom Abstand d der Prismen. Versuchsaufbauten mit $d = 280$ mm konnten bereits realisiert und die entsprechenden Effekte gemessen werden. Bezüglich der Vielzahl der hier möglichen Versuche sei für weitere Details auf Übersichtsarbeiten verwiesen [63,64]).

Es besteht derzeit keine Einigkeit über die Interpretation dieser Ergebnisse. Häufig wird argumentiert, dass zwar tatsächlich Überlichtgeschwindigkeiten vorliegen, dass aber in diesen Fällen keine Informationen schneller als das Licht transportiert werden. Dies wird damit begründet, dass es sich bei den Ergebnissen der Messungen nicht um die

Geschwindigkeiten eines Impulses, sondern der Gruppengeschwindigkeit handelt. Da komplexe Informationen (z. B. Sprache) nur als Wellenpaket transportierbar sind würden sich diese maximal mit Lichtgeschwindigkeit bewegen. Wegen der Bedeutung dieses Arguments sollen vor einer abschließenden Bewertung im Folgenden zunächst diese Zusammenhänge genau beschrieben werden.

Um den Effekt der Gruppengeschwindigkeit auf einfache Weise zu verstehen, gibt es in der Literatur verschiedene bildhafte Vergleiche, z. B. im Verhalten zwischen Mücke und Elefant, das Ergebnis eines Schildkrötenrennens oder für die Betrachtung eines langen Zugs [63,65]. Letzteres Beispiel ist besonders geeignet und soll im Folgenden kurz dargestellt werden:

> Ein Zug benötigt für die Zurücklegung einer Strecke zwischen 2 Zielen eine definierte Zeit. Ist dieser Zug aber sehr lang, so ist eine einfache Angabe nicht mehr ausreichend, sondern es ergeben sich Unterschiede zwischen den Ankunftszeiten der Lokomotive, der Mitte des Zugs und des letzten Wagens. Fährt danach ein gleichlanger Zug mit gleicher Geschwindigkeit die gleiche Strecke und werden bei diesem unterwegs einzelne Wagen abgehängt so treffen Mitte und Ende, die sich dann nach vorn verlagert haben, früher ein als beim Beispiel zuvor. Die Lokomotiven sind jedoch unabhängig davon gleichzeitig da. Folgt man diesem Beispiel dann ist die Geschwindigkeit der Mitte des Zuges (die Gruppengeschwindigkeit) größer als die Geschwindigkeit der Lokomotive.

Übertragen auf das hier vorliegende Beispiel ergibt sich damit, dass die getunnelte Welle keiner gleichmäßigen Dämpfung unterliegt, sondern dass gezielt das Ende des Wellenpakets gekürzt wird. Damit breitet sich zwar das beobachtete Wellenpaket schneller als das Licht aus, der Beginn der Wellenfront ist aber trotzdem nicht überlichtschnell und somit tritt keine Verletzung des Relativitätsprinzips auf.

Von den Autoren, die sich mit dem Thema Überlichtgeschwindigkeiten bei Prismen und anderen Optiken befasst haben, werden stark unterschiedliche Interpretationen vorgenommen. Neben dem bereits beschrieben Argument der Gruppengeschwindigkeit reicht dies von der völligen Ablehnung aufgrund von Fehlinterpretation [63], vermuteten Kontaminationseffekten, wenn sinnvolle Signalübertragung erwünscht ist, mit erforderlicher unendlicher Größe der eingesetzten Prismen [66] oder das Ergebnis dazu bleibt offen [67,68]. Es wird jedoch auch heute noch von einigen Autoren die Ansicht vertreten, dass in diesen Fällen eine Informationsübertragung überlichtschnell erfolgt [65,69]. Dies wird hauptsächlich damit begründet, dass die getunnelte Welle nach einer Verstärkung die gleiche Form hat wie die reflektierte Welle und keine Verkürzung aufweist wie aus dem dargestellten Beispiel zu folgern wäre.

Für einen eindeutigen Versuch würde es nicht auf komplexe Informationen ankommen, sondern es genügt hierfür ein einziger Impuls (vgl. Morsealphabet). Daher erscheint die These, dass Messungen aufgrund einer nicht durchführbaren Informationsübertragung unmöglich sind nicht stichhaltig zu sein. Wenn aber tatsächlich eine Impulsübertragung mit Überlichtgeschwindigkeit gemessen werden könnte, so ergeben sich weitreichende Konsequenzen, die im Folgenden diskutiert werden sollen.

11.1.2 Bedeutung von Überlichtgeschwindigkeiten für die Spezielle Relativitätstheorie

Während bisher alle Betrachtungen zu der Erkenntnis geführt haben, dass Beobachter beim Austausch von Signalen in einem ruhenden und einem bewegten System zu den gleichen Messergebnissen kommen, so ist dies beim Vorhandensein eines Informationsaustauschs mit Überlichtgeschwindigkeit nicht mehr der Fall. Dies kann aus der folgenden Darstellung (Abb. 11.2) entnommen werden.

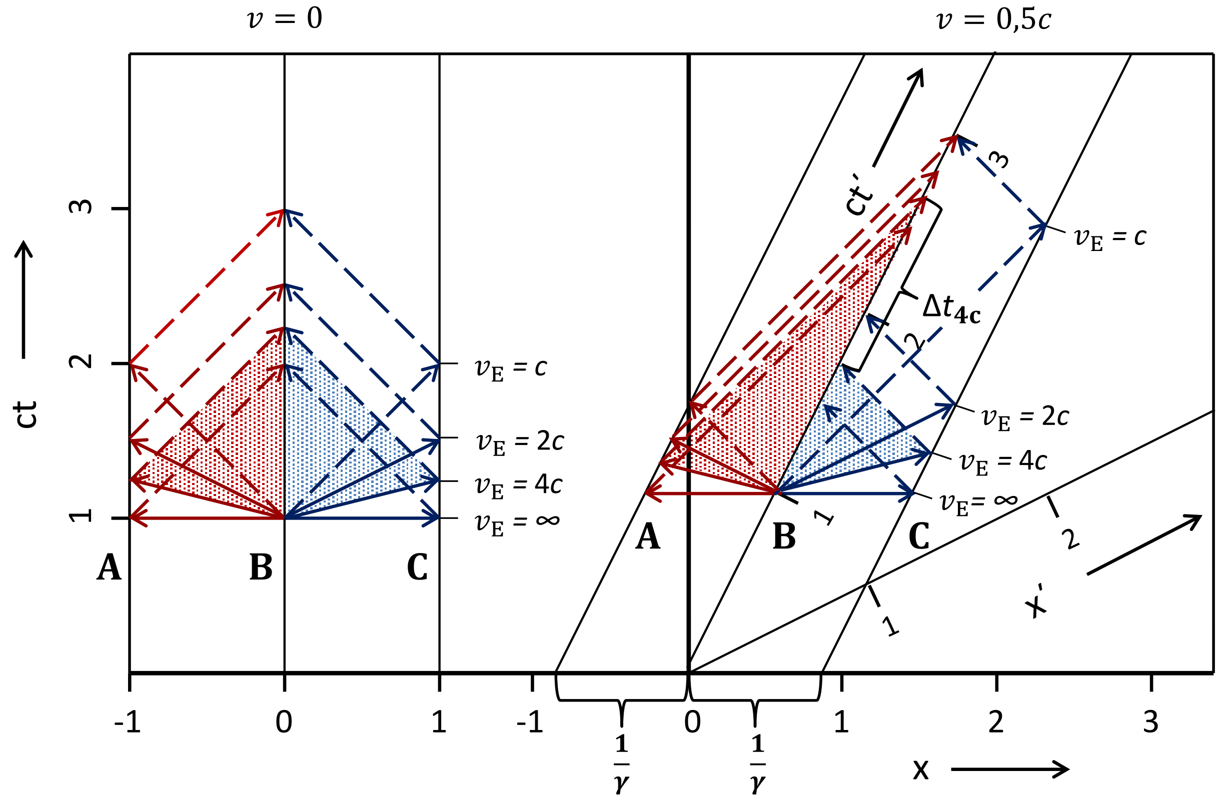


Abb. 11.2: Unterschiede zwischen einem System absoluter Ruhe und einem bewegten System bei einer Signalübertragung mit Überlichtgeschwindigkeit

Auf der linken Seite ist wie üblich das System absoluter Ruhe dargestellt. Eine Signalübertragung erfolgt nun mit Überlichtgeschwindigkeit v_E vom Beobachter B zu den Stellen A und C. Beim Eintreffen wird jeweils ein Lichtsignal ($v = c$) an B zurückgeschickt. Die Ankunft der beiden Signale erfolgt aus Symmetriegründen gleichzeitig.

Auf der rechten Seite ist der gleiche Sachverhalt für ein bewegtes System dargestellt. Durch das Vor- bzw. Nacheilen der Beobachter C und A kommt es dazu, dass das zurückgesendete Lichtsignal zu unterschiedlichen Zeiten eintrifft. Die Zeitdifferenz hängt hierbei ab von der Größe der Übertagungsgeschwindigkeit (eingetragen sind Werte für $v_E = 2c, 4c$ und ∞) sowie von der Systemgeschwindigkeit v_S (hier Werte von $v_S =$ 0 und 0,5c). In diesem Diagramm ist zusätzlich die Zeitdifferenz Δt_{4C} eingetragen, die sich bei einer Überlichtgeschwindigkeit von $v_E = 4c$ einstellen würde.

Die für die Überlichtgeschwindigkeit benötigte Zeit lässt sich mit Hilfe einfacher geometrischer Beziehungen ableiten, die in Abb. 11.3 dargestellt sind.

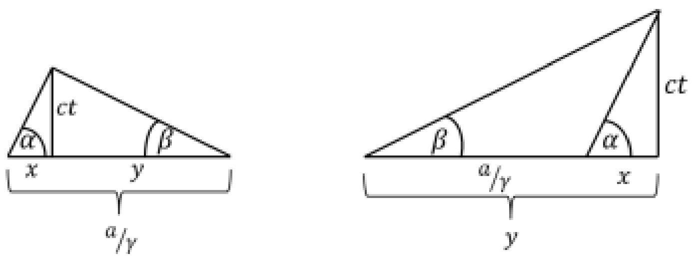


Abb. 11.3: Geometrische Beziehung der benutzten Größen am Beispiel für $v_E = 2c$

Allgemein gilt

$$tan\alpha = \frac{ct}{x} = \frac{c}{v_S} \qquad tan\beta = \frac{ct}{y} = \frac{c}{v_E} \qquad \Rightarrow \qquad xv_E = yv_S \tag{11.01}$$

Die Fälle für die Signalübertragung in Bewegungsrichtung und entgegengesetzt dazu müssen im Folgenden getrennt betrachtet werden. Es gilt dabei

Signal entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung	*Signal in Bewegungsrichtung*	
$\frac{a}{\gamma} = x + y$	$\frac{a}{\gamma} = y - x$	(11.02)
$\Rightarrow \quad xv_E = \frac{a}{\gamma} v_S - xv_S$	$\Rightarrow \quad xv_E = \frac{a}{\gamma} v_S + xv_S$	(11.03)
$t_1 = \frac{a}{\gamma(v_E + v_S)}$	$t_3 = \frac{a}{\gamma(v_E - v_S)}$	(11.04)

Um die Gesamtzeit für den Rückweg zu bestimmen, muss noch der Anteil für den Lichtimpuls hinzugefügt werden. Es ergibt sich für den Weg B→A→B:

$$t_T(C) = t_1 + t_2 = \frac{a}{\gamma(v_E + v_S)} + \frac{a}{\gamma(c - v_S)} \tag{11.05}$$

Für die Strecke B→C→B folgt

$$t_T(A) = t_3 + t_4 = \frac{a}{\gamma(v_E - v_S)} + \frac{a}{\gamma(c + v_S)} \tag{11.06}$$

Um den Einfluss der Signalgeschwindigkeit auf den Messeffekt zu ermitteln wird die Differenz betrachtet

$$t_T = t_T(C) - t_T(A) = \frac{a}{\gamma(v_E + v_S)} + \frac{a}{\gamma(c - v_S)} - \frac{a}{\gamma(v_E - v_S)} - \frac{a}{\gamma(c + v_S)} \tag{11.07}$$

und mit dem Messeffekt für $v_E \to \infty$ ins Verhältnis gesetzt. Dies ergibt

$$t_D = \frac{t_T}{t_\infty} \tag{11.08}$$

In der Abb. 11.4 sind die Ergebnisse für unterschiedliche Signal- und Systemgeschwindigkeiten aufgetragen. Generell ist festzustellen, dass die Systemgeschwindigkeit erst bei sehr hohen Werten einen nennenswerten Einfluss auf das Messergebnis hat. Des Weiteren ist zu erkennen, dass die Signalgeschwindigkeit bereits bei $v_E = 2c$ Werte erreicht, die der Hälfte des für $v_E \to \infty$ erzielbaren Wertes entsprechen. Es ist also keineswegs nötig extrem hohe Signalgeschwindigkeiten vorauszusetzen da die Sensitivität der Messungen sehr stark ist.

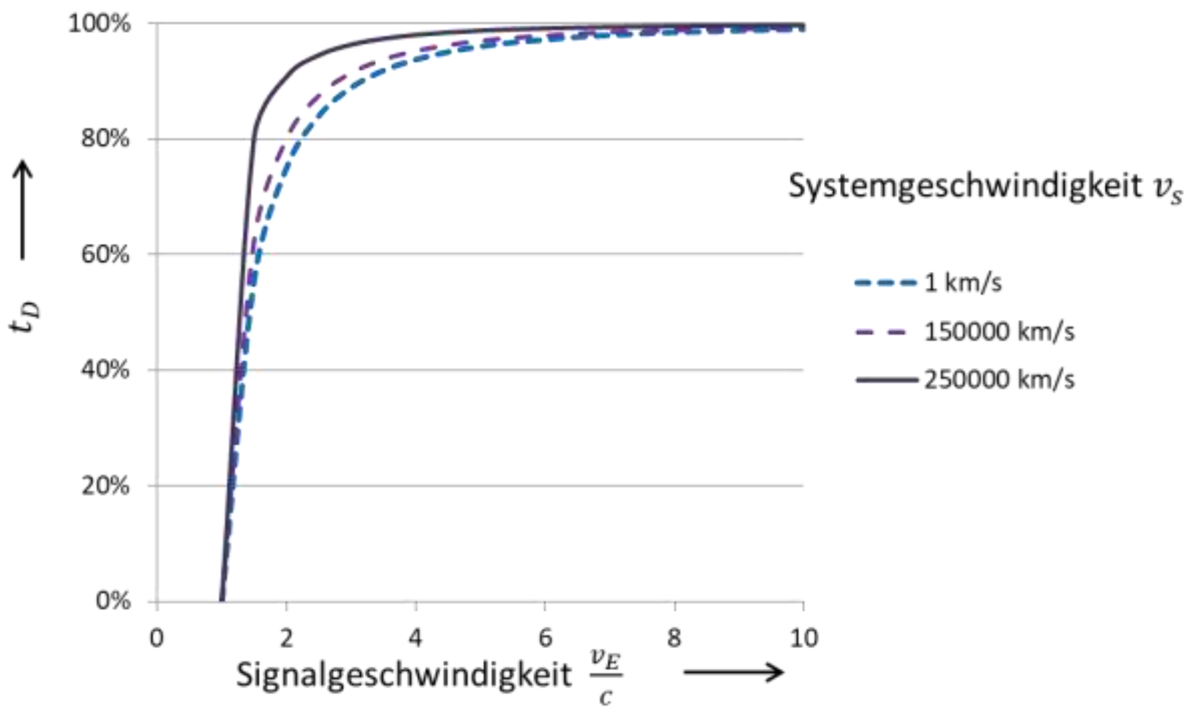


Abb. 11.4: Abhängigkeit der Größe des zu erwartenden Messeffektes t_D von der Signalgeschwindigkeit v_E und Systemgeschwindigkeit v_S

In weiteren Überlegungen zum Auftreten von Überlichtgeschwindigkeiten wird angeführt, dass hiermit das Kausalitätsprinzip verletzt wird [63]. Es gibt zu diesem Thema aber auch Darstellungen, dass dies nicht der Fall ist [64,65].

Prinzipiell würde die Verletzung des Kausalprinzips bedeuten, dass ein zurückkommendes Signal vor dessen Ausgang eintrifft. Dies würde aber einen negativen Zeitverlauf bedeuten, für den es experimentell keine Beweise gibt. Es ist aber klar, dass innerhalb eines Systems mit hoher Geschwindigkeit (z. B. dargestellt in Abb. 10.2, rechte Seite) das eingehende Signal vor der Zeit eintrifft, die aufgrund einer zuvor durchgeführten Synchronisation zu erwarten ist. Hiermit ist jedoch keine Verletzung des Kausalitätsprinzips verbunden, da das Signal zwar je nach Geschwindigkeit schneller (oder wenn der Signalverlauf umgekehrt ist, langsamer) zurückkommt als erwartet, aber niemals vor dessen Ausgang.

Abschließend ist festzuhalten, dass es bei der Überschreitung der Lichtgeschwindigkeit für eine Signalübertragung zu nicht auflösbaren Konflikten mit dem Relativitätsprinzip kommt. Es wären Unterschiede bei den Messeffekten zwischen Systemen feststellbar, die sich mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten bewegen. Ein eindeutiger Beweis für einen Effekt dieser Art wäre der eindeutige Nachweis, dass es einen Zustand absoluter Ruhe geben muss. In Kap. 13.1 werden die Größen der möglicherweise auftretenden Effekte und ein denkbarer Klärungsversuch diskutiert.

11.2 Synchronisation nach Beschleunigungen

Wie bereits ausgeführt, kann die Einweglichtgeschwindigkeit in einem bewegten System nicht direkt gemessen werden. Hierzu wurden vielfach Überlegungen angestellt; eine davon ist der „langsame Uhrentransport“. Die prinzipielle Idee hierbei ist, dass in einem bewegten Labor eine Uhr aus einem Ende (z. B. den hinteren Bereich) langsam in den vorderen Teil transportiert und dort mit einer vorhandenen und zuvor synchronisierten Uhr verglichen wird. wird. Es wurde jedoch bereits gezeigt, dass bei einem solchen Transport, egal wie langsam er abläuft, die Synchronisation bestehen bleibt und ein Nullresultat entsteht (vgl. Kap. 5).

Eine andere, zunächst von E. Dewan und M. Beran [70], später ausführlich von J. S. Bell [71] sowie D. J. Miller [72] und F. Fernflores [73] betrachtete Möglichkeit ist die indirekte Bestimmung in Systemen vor und nach einer Beschleunigung. Hierbei werden mehrere Beobachter, deren Uhren zuvor synchronisiert wurden, gleichförmig in der Weise beschleunigt, dass sie jeweils vorher und nachher die gleichen Geschwindigkeiten aufweisen. Es wird hierbei die Forderung gestellt, dass die Beschleunigungsphase exakt gleich abläuft, weitere Voraussetzungen sind nicht erforderlich.

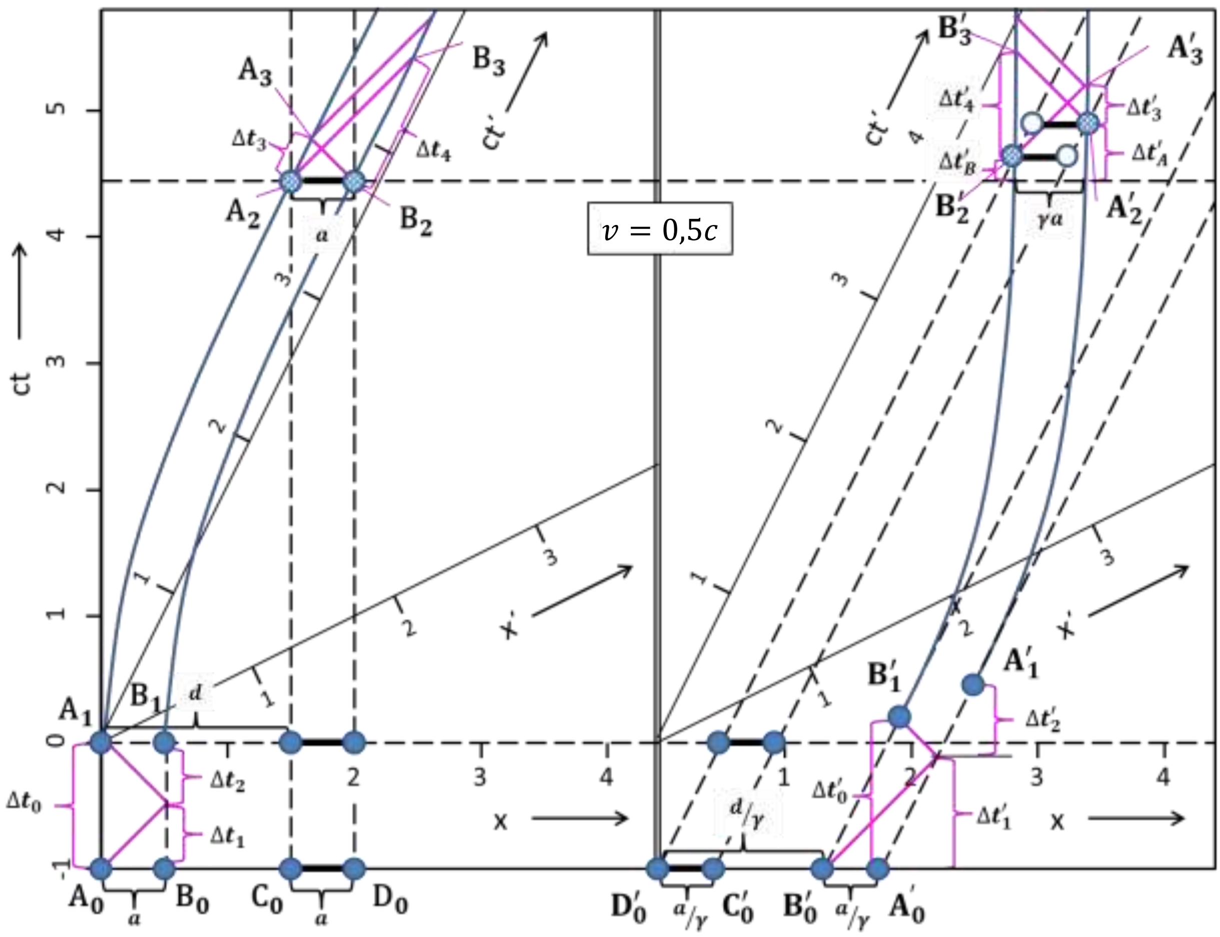


Abb. 11.5: Signalaustausch vor und nach Beschleunigung (Beispiel für $v = 0{,}5c$)
a) Links: Vom ruhenden ins bewegte System
b) Rechts: Vom bewegten ins ruhende System

Zunächst wird hierbei der Fall betrachtet, dass die Beobachter in Bewegungsrichtung angeordnet sind. Die dabei entstehende Situation ist in Abb. 11.5 zusammengestellt. Die linke Seite zeigt den Fall, dass aus einem ruhenden System die Versuchsteilnehmer A und B ihre Uhren synchronisieren und dann zum gleichen Zeitpunkt mit der Beschleunigung beginnen. Hierzu wurde vereinbart, dass A beim Eintreffen des Signals von B startet, B hingegen hat die Startzeit berechnet und startet bei Δt_2 nach dem Eintreffen des Signals von A (vgl. Diagramm). Die Zeit Δt_2 ist genau die Hälfte von Δt_0, die ein Signal von B nach A und zurück benötigt. Die Beschleunigung läuft so lange, bis sie die fest miteinander verbundenen Punkte C und D erreichen (A begegnet C; B trifft auf D). Zu diesem Zeitpunkt wird die Beschleunigung beendet und jeweils ein Signal ausgestrahlt.

A und B stellen nun fest, dass

1. der Abstand zwischen ihnen (subjektiv) auf γa angewachsen ist,
2. die Zeiten Δt_3 größer und Δt_4 kleiner als Δt_2 sind.

Der unter Punkt 1 dargestellte Sachverhalt wird auch als „Bell´sches Raketenparadoxon“ bezeichnet. Von Bell wurde hierzu angenommen, dass zwischen den Raketen ein Seil gespannt sei, das ebenfalls der Längenkontraktion unterworfen ist.

In einer weiteren Untersuchung wird ein bewegtes System unter den subjektiv für die Teilnehmer A bis D genau gleichen Bedingungen getestet (rechte Seite). Hierbei stellt ein ruhender Beobachter fest, dass Δt_1 hier größer ist als im ruhenden System. Aus diesem Grunde wird A seine Beschleunigung später starten als B, da er $\Delta t_2 = \Delta t_0/2$ nach dem Eintreffen des Signals von B beginnt. Daher wird A den Teilnehmer C später erreichen als B den Teilnehmer D. Nach Beendigung des Versuchs werden erneut Abstand und Zeiten gemessen und es wird festgestellt, dass exakt die gleichen Ergebnisse wie zuvor erzielt worden sind. Im Folgenden sind im Detail die Berechnungen für die Zeit- und Ortskoordinaten dargestellt.

a) Vom ruhenden in ein bewegtes System

Hier ist die Ableitung einfach. Aufgrund der parallel verlaufenden Beschleunigungskurven bleibt (aus Sicht des ruhenden Beobachters) der Abstand a auch im bewegten System erhalten. Darüber hinaus gilt

$$\Delta t_0 = \frac{2a}{c} \tag{11.11}$$

$$\Delta t_1 = \Delta t_2 = \frac{a}{c} \tag{11.12}$$

$$\Delta t_3 = \frac{a}{c\left(1 - \frac{v}{c}\right)} \tag{11.13}$$

$$\Delta t_4 = \frac{a}{c\left(1 + \frac{v}{c}\right)} \tag{11.14}$$

b) Vom bewegten ins ruhende System

Hier sind einige Zwischenrechnungen erforderlich.

$$\Delta t_0' = \frac{2a\gamma}{c} \tag{11.15}$$

$$\Delta t_1' = \frac{a}{c\gamma\left(1-\frac{v}{c}\right)} = \frac{a\gamma}{c}\left(1+\frac{v}{c}\right) \tag{11.16}$$

$$\Delta t_2' = \frac{a\gamma}{c} \tag{11.17}$$

$$\Delta t_B' = \Delta t_0' - \Delta t_0 + t_2 = \frac{2a}{c}(\gamma - 1) + t_2 \tag{11.18}$$

$$\Delta t_A' = \Delta t_1' + \Delta t_2' - \Delta t_0 + t_2 = \frac{a}{c}\left(2\gamma + \gamma\frac{v}{c} - 2\right) + t_2 \tag{11.19}$$

$$x(\mathrm{B}_2') = \Delta t_B' \cdot v = \left(\frac{2a}{c}(\gamma - 1) + t_2\right)v \tag{11.20}$$

$$x(\mathrm{A}_2') = \Delta t_A' \cdot v + \frac{a}{\gamma} = \left(\frac{a}{c}\left(2\gamma + \gamma\frac{v}{c} - 2\right) + t_2\right)v + \frac{a}{\gamma} \tag{11.21}$$

$$\begin{aligned}\Delta x\left(\frac{\mathrm{A}_2'}{\mathrm{B}_2'}\right) &= \left(\frac{a}{c}\left(2\gamma + \gamma\frac{v}{c} - 2\right) + t_2\right)v + \frac{a}{\gamma} - \left(\frac{2a}{c}(\gamma - 1) + t_2\right)v \\ &= \frac{av}{c}\gamma\frac{v}{c} + \frac{a}{\gamma} = a\gamma\end{aligned} \tag{11.22}$$

$$\Delta t_3' = \frac{a\gamma}{c} + \Delta t_B' - \Delta t_A' = \frac{a}{\gamma c\left(1-\frac{v}{c}\right)} = \frac{1}{\gamma}\Delta t_3 \tag{11.23}$$

$$\Delta t_4' = \frac{a\gamma}{c} + \Delta t_A' - \Delta t_B' = \frac{a}{\gamma c\left(1+\frac{v}{c}\right)} = \frac{1}{\gamma}\Delta t_4 \tag{11.24}$$

Aus diesen Berechnungen folgt, dass a, $\Delta \mathrm{t}_3$ und Δt_4 im ruhenden und bewegten System durch γ gekoppelt sind und es subjektiv für die Beobachter A und B nach Beendigung nicht unterscheidbar ist, ob sie ihren Standort vom ruhenden ins bewegte System verändert haben oder umgekehrt.

Bezüglich des Verhaltens eines „Bell´schen“ Seils, das zwischen beiden Raketen gespannt wird, ist hier aber zunächst ein Unterschied zu den Bedingungen zwischen den Betrachtungen von a) und b) festzustellen. Während bei a) der Abstand und damit die Belastung des Seils zwischen den Versuchsteilnehmern kontinuierlich steigt, tritt bei b) zu Beginn eine starke Veränderung auf. Diese ist darauf zurückzuführen, dass Versuchsteilnehmer B vor A mit der Beschleunigung beginnt und damit ungleichmäßige Belastungen auftreten. Dieser Unterschied ist jedoch nur scheinbar, da das Seil nicht als unendlich starrer Körper aufgefasst werden darf. Vergleichbar mit der Situation bei der Ansteuerung von Aggregaten nach einer Synchronisation (Kap.4.4) wird sich die Beanspruchung des Seils mit beliebiger Unterlichtgeschwindigkeit im Seil fortpflanzen und damit heben sich alle Unterschiede auf.

Die Gültigkeit dieser Behauptung soll im Folgenden an einem einfachen Beispiel gezeigt werden. Für den Beginn des Versuchs gilt im Fall absoluter Ruhe, dass beide Raketen zur gleichen Zeit starten. Wenn nun keine völlige Starrheit des Körpers unterstellt wird, sondern eine Kraftübertragung mit einer beliebigen Geschwindigkeit, so folgt zwangsläufig, dass sich beim nachlaufenden Körper eine Schlaufe bilden muss, die eine quantitative Auswertung außerordentlich erschwert. Um dies zu vermeiden, wird in einem stark vereinfachten Modell angenommen, dass

1. die Kraft nicht nur durch Zug (von B, vgl. Abb. 11.5) sondern auch durch Druck (von A) in einen Stab (kein Seil) eingeleitet wird,
2. eine Ausknickung des Stabs nicht auftritt.

Für den Fall des Starts bei absoluter Ruhe ergibt sich aus Symmetriegründen sofort, dass bei beliebiger Geschwindigkeit der Kraftübertragung im Stab die Mitte gleichzeitig von Zug- und Druckkomponenten erreicht wird. Im bewegten System gelten die bereits in Kap. 4.3 und 4.4 dargestellten Bedingungen. Die relativistische Geschwindigkeitsaddition führt in Zusammenhang mit der Synchronisationsdifferenz ebenfalls zum Effekt, dass beide Komponenten gleichzeitig in der Mitte eintreffen. Es treten also subjektiv bei den Versuchsteilnehmern keine Unterschiede auf.

In der Literatur gibt es unterschiedliche Auffassungen darüber, ob das Seil nach der Beschleunigung einer Spannung ausgesetzt ist oder nicht, oder einfacher gesagt, ob es reißt oder hält (Der Betrachtung liegt an dieser Stelle selbstverständlich die Annahme zugrunde, dass das Seil als annähernd masselos angenommen wird und keine Rückwirkung auf die Positionierung der Raketen hat). Nach den hier vorgenommenen Berechnungen ist von einer Belastung auszugehen, d. h. es reißt. Dies ergibt sich einfach aus der Überlegung, dass die Beschleunigungsphasen für die einzelnen Raketen auch jeweils separat durchgeführt und beobachtet werden können und dann, weil die Raketen unabhängig voneinander agieren, die gleichen Ergebnisse liefern müssen.

Abschließend soll hier noch der Fall betrachtet werden, dass die Beobachter nicht in Beschleunigungsrichtung angeordnet sind, sondern senkrecht dazu. In einem solchen Fall tritt der einfache Fall ein, dass bei einem Signalaustausch nach einer Beschleunigung der Weg des Signals um den Faktor γ länger ist als im Ruhezustand. Dieser Effekt wird jedoch subjektiv genau kompensiert durch die langsamer ablaufende Zeit im bewegten System.

Zusammenfassend lassen sich hier zwei Punkte festhalten. Einerseits treten bei den gewählten Versuchsbedingungen zwischen zwei voneinander unabhängig, aber vollständig gleichförmig beschleunigten Beobachtern Spannungen auf, die Gegenstand von Messungen sein könnten. Es sind hier also Unterschiede bei Messergebnissen zu erwarten, je nachdem ob ein Körper als punktförmig oder räumlich ausgedehnt betrachtet wird. Zum Zweiten zeigen die Berechnungen, dass es im Fall von hintereinander angeordneten synchronisierten Uhren nach einer Beschleunigung zu Synchronisationsdifferenzen kommen muss; dies gilt sowohl für unabhängige Beobachter wie im vorliegenden Beispiel aber auch innerhalb eines geschlossenen räumlich ausgedehnten Körpers. Bei nebeneinander angeordneten Uhren treten diese Effekte dagegen nicht auf. Dies wird wegen der „Relativität der Gleichzeitigkeit“ durch die Spezielle Relativitätstheorie gefordert und stellt daher einen grundlegenden Test dar. Details dazu werden in Kap. 13.2 diskutiert.

12. Schlussfolgerungen und Vorschläge zur Modifikation

Mit dem von Einstein postulierten Relativitätsprinzip, den von Larmor, Lorentz und Poincaré entwickelten Transformationsgleichungen und der relativistischen Masseerhöhung bei steigender Geschwindigkeit können alle denkbaren Konstellationen zwischen bewegten Körpern in Inertialsystemen widerspruchsfrei beschrieben werden. Eine Vielzahl von Versuchsergebnissen zu diesem Themengebiet wurde bereits diskutiert.

Hiermit sind jedoch nicht alle kosmologischen Themen hinreichend abgedeckt. Zu Beginn der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts wurde entdeckt, dass im Universum eine kosmische Hintergrundstrahlung existiert, die in allen Raumrichtungen völlig gleichmäßig verläuft. Aufbauend auf den bereits zum Ende des 19. Jahrhunderts entwickelten Äthertheorien wurde insbesondere aufgrund dieser Beobachtungen erneut versucht, die spezielle Relativitätstheorie mit einem übergeordneten Ruhezustand in Einklang zu bringen. Keiner der Ansätze war jedoch erfolgreich und es traten stets Widersprüche zu experimentellen Befunden auf. Die wichtigsten Theorien aus den Anfängen und die Weiterentwicklungen werden hier erläutert. Außerdem wird die bereits in Kap. 3.4 diskutierte Einstein Synchronisation erneut diskutiert und bewertet.

Weiterhin wird nachgewiesen, dass sich bei Verwendung von Lichtimpulsen zum Signalaustausch bei der Betrachtung von zwei beliebig zueinander bewegten Beobachtern zusätzlich ein übergeordnetes System absoluter Ruhe integrieren lässt. Dieses kann unter ausschließlicher Verwendung der Lorentz-Transformation widerspruchsfrei eingebunden werden. Dies wird zunächst für den Fall gezeigt, dass zwei Beobachter sich auf einer Geraden bezüglich des Ruhesystems befinden, anschließend für beliebige Konstellationen.

12.1 Alternative Theorien

Im folgenden Kapitel sollen Theorien dargestellt werden, die nicht mit dem Formalismus der Lorentz-Transformation (LT) übereinstimmen. Sie wurden entwickelt, um die „Relativität der Gleichzeitigkeit" zu umgehen, die integraler Bestandteil der LT ist. Stattdessen wurde eine absolute und in allen Inertialsystemen gleiche Zeit eingeführt. Obwohl diese Theorien einer experimentellen Prüfung in ihrer ursprünglichen Form nicht standhalten, sind sie doch aus historischer Sicht wichtig und teilweise noch heute Basis für die Suche nach Verletzungen der LT.

12.1.1 Einfache Addition der Geschwindigkeiten

In der Anfangsphase der Diskussionen um Lichtgeschwindigkeit und „Ätherdrift" wurde vielfach angenommen, dass die Geschwindigkeit der Bewegung eines Beobachters (mit einer von ihm mitgeführten Messvorrichtung) und die Lichtgeschwindigkeit einfach addiert werden können [12c]. Auch bei den theoretischen Ansätzen des Michelson-Morley-Versuchs wird dies bei der Berechnung der Werte für Hin- und Rückweg der ausgesandten Lichtstrahlen angenommen [7].

Es wurde jedoch bereits 1913 von W. de Sitter durch Betrachtung von Doppelsternsystemen gezeigt, dass die Lichtgeschwindigkeit unabhängig von der Geschwindigkeit des Körpers ist, der die Signale aussendet [55]. Damit war der erste Nachweis erbracht, dass diese Annahme nicht den Tatsachen entsprechen kann.

12.1.2 Theorie des „Neo-Lorentzianismus"

Nach einer ähnlichen Idee wie unter Kap. 12.1.1 beschrieben wurde von H. Ives und weiterentwickelt von J. S. Prokhovnik [74] angenommen, dass in allen Punkten des Universums ein (ruhendes) Referenzsystem S existiert. Bewegt sich relativ dazu ein anderes Inertialsystem A so wird diesem als einziges Merkmal die Eigenschaft zugeordnet, dass der Raum sich gemäß

$$x_A = \frac{x_S}{\gamma} \tag{12.01}$$

verkürzt. Für den Hin- und Rückweg eines Lichtsignals werden unterschiedliche Geschwindigkeiten angenommen, und zwar

$$c_1 = c + u_A \tag{12.02}$$

$$c_2 = c - u_A \tag{12.03}$$

Die Eigenschaften für die Zeit lassen sich dann für den geschlossenen Hin- und Rückweg eines Lichtsignals berechnen

$$t_A = \frac{x_A}{c_1} + \frac{x_A}{c_2} = \frac{x_S(c - u_A + c + u_A)}{\gamma(c + u_A)(c - u_A)} = \frac{2x_S}{c}\gamma = \gamma t_S \tag{12.04}$$

Dies würde bedeuten, dass die Zeitdilatation nur scheinbar auftritt. Da dieser Effekt innerhalb des Inertialsystems auf einfache Weise z. B. wegen Synchronisationsunterschieden messbar sein müsste, aber nicht zu finden ist, wird diese Theorie heute nicht mehr diskutiert. Interessant sind aber die Beteiligten, insbesondere H. Ives (1882-1953). Er war Zeit seines Lebens ein erklärter Gegner Einsteins und versuchte dabei neben der Aufstellung einer alternativen Theorie ihn in vielfältiger Weise zu diskreditieren. So bestritt er die Urheberschaft Einsteins an der Speziellen Relativitätstheorie und versuchte auch nachzuweisen, dass der Ausdruck

$$E = mc^2 \tag{6.17}$$

ursprünglich nicht von Einstein stammt [75]. Trotzdem hat er mit dem auch nach ihm benannten Ives-Stilwell Experiment [17,18] einen Beweis für die Zeitdilatation von bewegten

Körpern erbracht und damit auch – sicher unbeabsichtigt – die Gültigkeit der Lorentz-Gleichungen gestützt.

12.1.3 RMS Test Theorie

Eine andere alternative Theorie wurde auf Basis der Vorschläge von H. Robertson [59] durch R. Mansouri und R. Sexl formuliert [24] und wird heute allgemein als Robertson-Mansouri-Sexl- oder RMS-Theorie bezeichnet. Hierbei wird angenommen, dass ein System absoluter Ruhe (bezeichnet als „Äthersystem") existiert. Für die Notation der Koordinaten des Äthersystems werden Großbuchstaben, für die des bewegten Systems kleine Buchstaben verwendet. Es werden dafür allgemein die Transformations-Gleichungen

$$t = aT + \varepsilon x \tag{12.10}$$

$$x = b(X - vT) \tag{12.11}$$

aufgestellt, wobei die Faktoren a und b aus Messungen (Michelson-Morley und Kennedy-Thorndike Experimente) und ε aufgrund der Synchronisationsbedingungen als

$$\frac{1}{a} = b = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \qquad \varepsilon = -v \tag{12.12}$$

bestimmt werden. Daraus folgt

$$t = \frac{T}{\gamma} - vx \tag{12.13}$$

$$x = \gamma(X - vT) \tag{12.14}$$

Die Gl. (12.14) entspricht offensichtlich der Lorentz-Transformation gemäß Gl. (1.08). Die Gl. (12.13) lässt sich umformen, und zwar

$$t = \frac{T}{\gamma} - vx = \gamma T(1 - v^2) - vx = \gamma T - \gamma T v^2 - vx \tag{12.15}$$

Wird Gl. (12.11) nach T aufgelöst so folgt

$$T = \frac{X - \frac{x}{\gamma}}{v} \tag{12.16}$$

und damit

$$t = \gamma T - \gamma \frac{X - \frac{x}{\gamma}}{v} v^2 - vx = \gamma T - \gamma v X + vx - vx \tag{12.17}$$

und

$$t = \gamma(T - vX) \tag{12.18}$$

Die Gleichungen entsprechen also exakt der Lorentz-Transformation. Beim Ansatz nach Mansouri-Sexl wird jetzt aber unterstellt, dass beim Passieren eines bewegten Systems und Gleichsetzung der Ursprungskoordinaten ein Uhrenabgleich gemäß

$$\Delta t = -vx \tag{12.19}$$

durchgeführt wird. Die Gleichung (12.13) erhält dadurch die Form

$$t = \frac{T}{\gamma} \tag{12.20}$$

In einer grafischen Darstellung führt das zu der in Abb. 12.1 dargestellten Situation. Es ist klar, dass hierdurch bei einer späteren Synchronisation mit Lichtsignalen ein Unterschied innerhalb des Systems feststellbar sein müsste, was sich aber experimentell nicht nachweisen lässt [54,75].

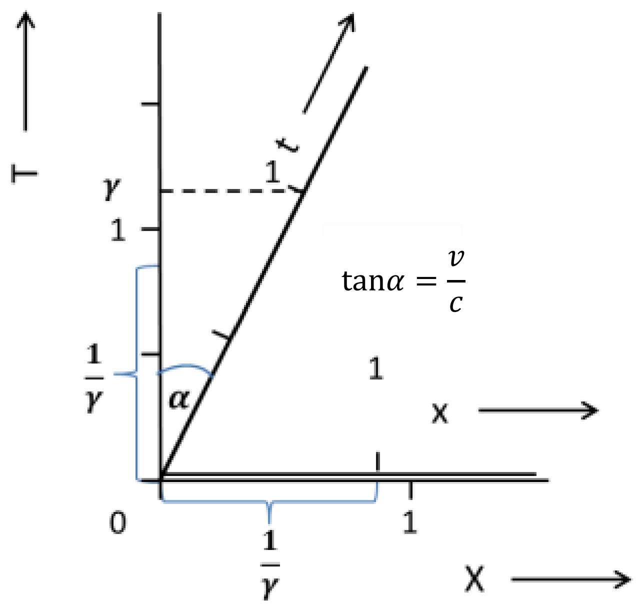


Abb. 12.1: Weg-Zeit-Diagramm entsprechend Gleichung Gl. (12.18) (entnommen aus [24])

Obwohl die Theorie offensichtliche Mängel hat, wird sie noch heute weiterentwickelt [54]. Der Grund liegt darin, dass neuere Ansätze zu Quantengravitations- bzw. Stringtheorien Verletzungen der Lorentz-Transformation nahelegen. Zusammen mit den Beziehungen

$$y = d \cdot Y \qquad\qquad z = d \cdot Z \tag{12.21}$$

wird versucht, Unterschiede zu den gemäß der Lorentz-Transformation gegebenen Beziehungen

$$\frac{1}{a} = b = \left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \qquad\qquad d = 1 \tag{12.22}$$

zu finden. Man erhofft sich, dass bei steigender Genauigkeit von Experimenten des Typs Michelson-Morley, Kennedy-Thorndike und Ives-Stilwell diese festgestellt werden und dann in ein Gesamtbild integriert werden können. Beispiele für weiterführende hochgenaue Messungen sind z. B. in [76,77,78,79] dargestellt, bisher konnten jedoch keine Verletzungen der Lorentz-Invarianz experimentell bestätigt werden.

11.1.4 Weitere Alternativen

Es wurden in der Vergangenheit weitere vom Formalismus der Lorentz-Gleichungen abweichende Alternativen formuliert. Dies erfolgt in aller Regel im Zusammenhang mit der Weiterentwicklung der „Allgemeinen Relativitätstheorie“ und hat zum Ziel, einen übergeordneten Ansatz zu entwickeln und diesen mit der Quantenmechanik zu verbinden. Die Theorien sind teilweise hoch komplex, haben aber trotz aller Bemühungen in den letzten Jahrzehnten nicht zu verwertbaren Resultaten geführt. Hier stellt sich die Frage, warum ein solcher Aufwand getrieben wird und ob er zu rechtfertigen ist. Dazu soll aus einer neueren Studie von C. M. Will zitiert werden [64]:

[Übersetzung:] „Wir erkennen, dass die Allgemeine Relativitätstheorie allen mit größtmöglicher Sorgfalt durchgeführten Experimenten entspricht. Nun stellt sich die Frage: Warum machen wir damit weiter? Eine Antwort ist, dass die Schwerkraft eine der fundamentalsten Eigenschaften der Natur ist und daher die größtmögliche empirische Untermauerung verdient. Eine andere, dass alle Versuche zur Quantisierung der Schwerkraft und zur Vereinheitlichung mit den anderen Kräften vermuten lassen, dass die Allgemeine Relativitätstheorie von Einstein nicht das letzte Wort ist… Obwohl es erstaunlich ist, dass diese Theorie, die vor mehr als 80 Jahren aus reiner Gedankenkraft geboren wurde, bis heute überlebt hat, wird die Möglichkeit zum Auffinden einer Abweichung auch in den nächsten Jahrzehnten die Experimente vorantreiben.“

12.2 Bewertung der Einstein Synchronisation

Im Kapitel 3.4 wurde die Einstein Synchronisation bereits grundlegend betrachtet. Wegen der übergeordneten Bedeutung wird sie an dieser Stelle noch einmal genau untersucht. Hierzu sollen zunächst die theoretisch auftretenden Synchronisationsunterschiede in unbewegten und bewegten Systemen ermittelt werden.

Im nachfolgenden Raum-Zeit-Diagramm (Abb. 12.2) werden aus Sicht eines ruhenden Beobachters A die bezogen auf einen bewegten Bobachter B auftretenden Synchronisationsunterschiede ΔS und $\Delta S'$ wiedergegeben. Die Darstellung ist normiert (dies bedeutet $\Delta t = \Delta x = 1$), daher verlaufen im Diagramm Lichtimpulse stets im Winkel von 45°. Die angenommene Geschwindigkeit für B ist $v = x/t = 0{,}5c$.

Es werden die Fälle unterschieden, dass

a) A ein Signal aussendet, das von B reflektiert wird,

b) B ein Signal aussendet, das von A reflektiert wird.

In Tab. 12.1 sind die für die Berechnung der Synchronisationsdifferenzen wesentlichen Gleichungen zusammengestellt. Für A ist die Auswertung von Bild a) einfach und es folgt sofort aus Symmetriegründen $\Delta t_0 = \Delta t_2 = \Delta t_1$.

Bei der Betrachtung von b) ergibt sich dagegen eine komplexere Situation. Aus subjektiver Sicht von A wird der Impuls von B später ausgesandt (die Zeit läuft aus Sicht von A für B um den Faktor γ langsamer ab), trifft aber aufgrund der zunehmenden Entfernung von B während der Signalausbreitung früher ein als das von ihm abgestrahlte Signal bei B (zur genauen Definition siehe auch Kap. 2).

Für A gilt also die Synchronisationsdifferenz

$$\Delta S = \Delta t_S \frac{1-\frac{1}{\gamma}}{1-\frac{v}{c}} \tag{12.30}$$

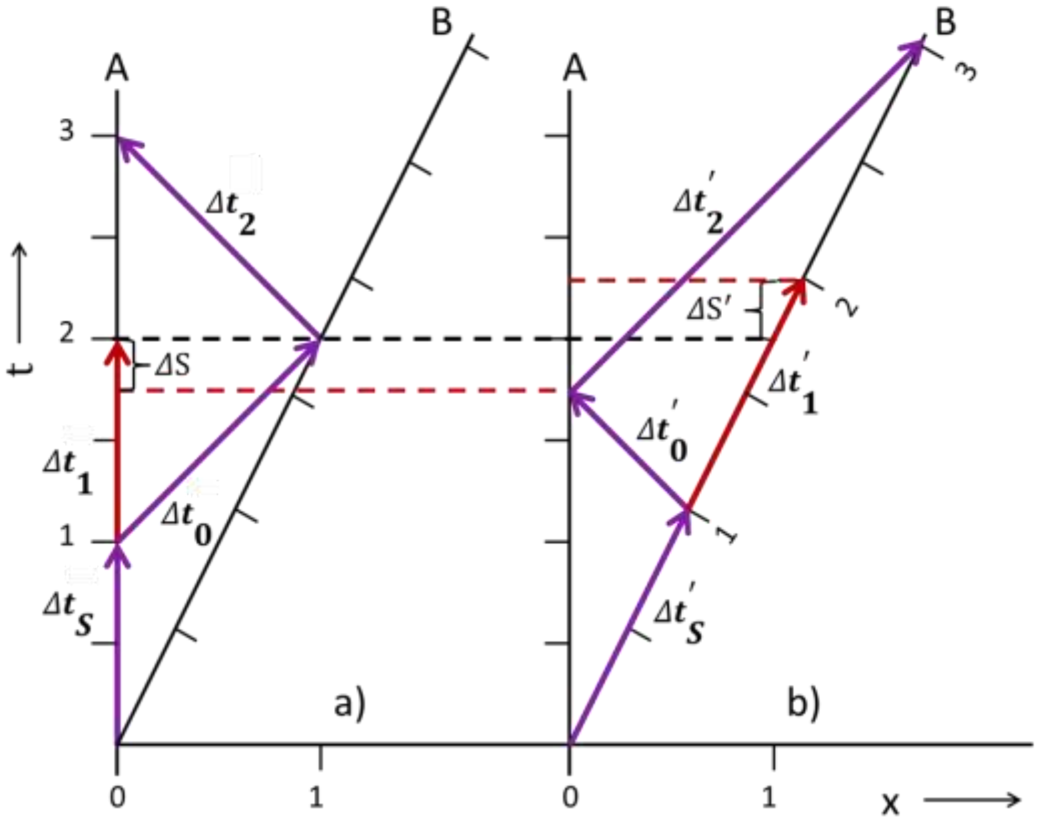


Abb. 12.2: Darstellung der Synchronisationsdifferenzen ΔS bzw. $\Delta S'$

Δt_S	$\Delta t_S' = \gamma \Delta t_S$
$\Delta t_0 = \Delta t_S \left[\frac{v}{c\left(1-\frac{v}{c}\right)}\right]$	$\Delta t_0' = \Delta t_S \gamma \frac{v}{c}$
$\Delta t_2 = \Delta t_S \left[\frac{v}{c\left(1-\frac{v}{c}\right)}\right]$	$\Delta t_2' = \Delta t_S \gamma \left[\frac{v\left(1+\frac{v}{c}\right)}{c\left(1-\frac{v}{c}\right)}\right]$
$\Delta S = \Delta t_S + \left[\frac{\Delta t_0 + \Delta t_2}{2}\right] - [\Delta t_S' + \Delta t_0']$ $= \Delta t_S \frac{1-\frac{1}{\gamma}}{1-\frac{v}{c}}$	$\Delta S' = \Delta t_S' + \left[\frac{\Delta t_0' + \Delta t_2'}{2}\right] - [\Delta t_S + \Delta t_0]$ $= \Delta t_S \frac{\gamma - 1}{1-\frac{v}{c}}$

Tab. 12.1: Gleichungen zur Berechnung von ΔS bzw. $\Delta S'$

Aus Sicht des bewegten Beobachters B in Bild b) ergibt sich eine vergleichbare Situation: Auch aus seiner Sicht trifft das Signal früher ein wobei hier

$$\Delta S' = \Delta t_S \frac{\gamma - 1}{1 - \frac{v}{c}} \tag{12.31}$$

gilt. Da für ihn die Zeit langsamer abläuft, sind die subjektiv ermittelten Werte aus beiden Systemen identisch und es ergibt sich

$$\Delta S' = \gamma \Delta S \tag{12.32}$$

Die Einstein-Synchronisation legt nun folgendes fest: Zum Zeitpunkt t_S bzw. t'_S wird von den Beobachtern A und B ein Signal ausgesandt. Beim Empfang durch B bzw. A gelten gleichartige Uhren dann als synchronisiert, wenn sie beim Eintreffen des Signals einen Wert von

$$t_1 = t_S + \frac{t_2 - t_0}{2} \tag{12.33}$$

oder

$$t'_1 = t'_S + \frac{t'_2 - t'_0}{2} \tag{12.34}$$

aufweisen.

Für das System a) ergibt sich die Gültigkeit der Festlegung unmittelbar aus der Darstellung im Diagramm und es gibt keine Unterschiede zu den durchgeführten Berechnungen. Für b) kommt es jedoch zu gravierenden Änderungen.

Eine wesentliche Aussage ist zunächst, dass $\Delta t'_1$ hiermit eindeutig festgelegt ist und die Aufteilung zwischen den Einzelzeiten $\Delta t'_0$ und $\Delta t'_2$ dabei keine Rolle spielt. Zusammen mit der Aussage, dass die Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen gleich ist, wird auf diese Weise die Synchronisationsdifferenz zu einer virtuellen Größe, die aus dem bewegten System heraus nicht bestimmbar ist. Da dieser Wert für einen ruhenden Beobachter aber bei der Übertragung von Impulsen mit Überlichtgeschwindigkeiten doch messbar wäre, darf es aufgrund dieser Festlegungen keine Informationsübertragung schneller als das Licht und auch kein System absoluter Ruhe geben. Hiermit wird also eine zentrale Aussage der Speziellen Relativitätstheorie beschrieben.

Die Einstein-Synchronisation ist nicht durch eine Beobachtung gedeckt, sondern es liegt eine Definition vor.

Die Verwendung der Einstein Synchronisation hat neben der Möglichkeit zur Berechnung der Lorentz-Gleichungen noch eine weitere Bedeutung. Wie bereits ausführlich dargestellt wurde ist es aus Sicht eines ruhenden Beobachters nicht möglich, ohne die Verwendung des Prinzips der konstanten Phasengeschwindigkeit in einem bewegten System den Schwingungsverlauf einer elektromagnetischen Welle (z. B. Licht) widerspruchsfrei zu beschreiben. Um dies zu umgehen ist es ein einfaches Mittel, die Definition der Einstein Synchronisation so zu nutzen, dass Schwingungsbetrachtungen grundsätzlich nur innerhalb des jeweiligen Inertialsystems zugelassen werden. Geht man nach diesem Prinzip vor so folgt daraus, dass ein Zustand absoluter Ruhe sich nicht einfügen lässt, zu scheinbaren Widersprüchen führt und dann in der Folge als fehlerhaft zurückgewiesen werden muss.

Im Folgenden wird ein weiterer wichtiger Aspekt zum Thema Lichtgeschwindigkeit behandelt. Die Aussage: „Die Lichtgeschwindigkeit ist in allen Inertialsystemen gleich“ muss sorgfältig betrachtet und interpretiert werden.

Betrachten mehrere Versuchsteilnehmer aus verschieden gegeneinander bewegten Inertialsystemen das *gleiche* Ereignis, z. B. den Signalaustausch zwischen verschiedenen räumlich getrennten Punkten, so muss es zu unterschiedlichen Beobachtungen kommen. Wird für Messungen jeweils die Lichtgeschwindigkeit des eigenen Systems zugrunde gelegt und werden die für den Signalaustausch erforderlichen Zeiten und Distanzen für Hin- und Rückweg ermittelt, so kommen sie zu unterschiedlichen Ergebnissen. Weg und Zeit sind *nicht* symmetrisch aufgeteilt. Dieser Effekt wird durch die „Relativität der Gleichzeitigkeit“ verursacht.

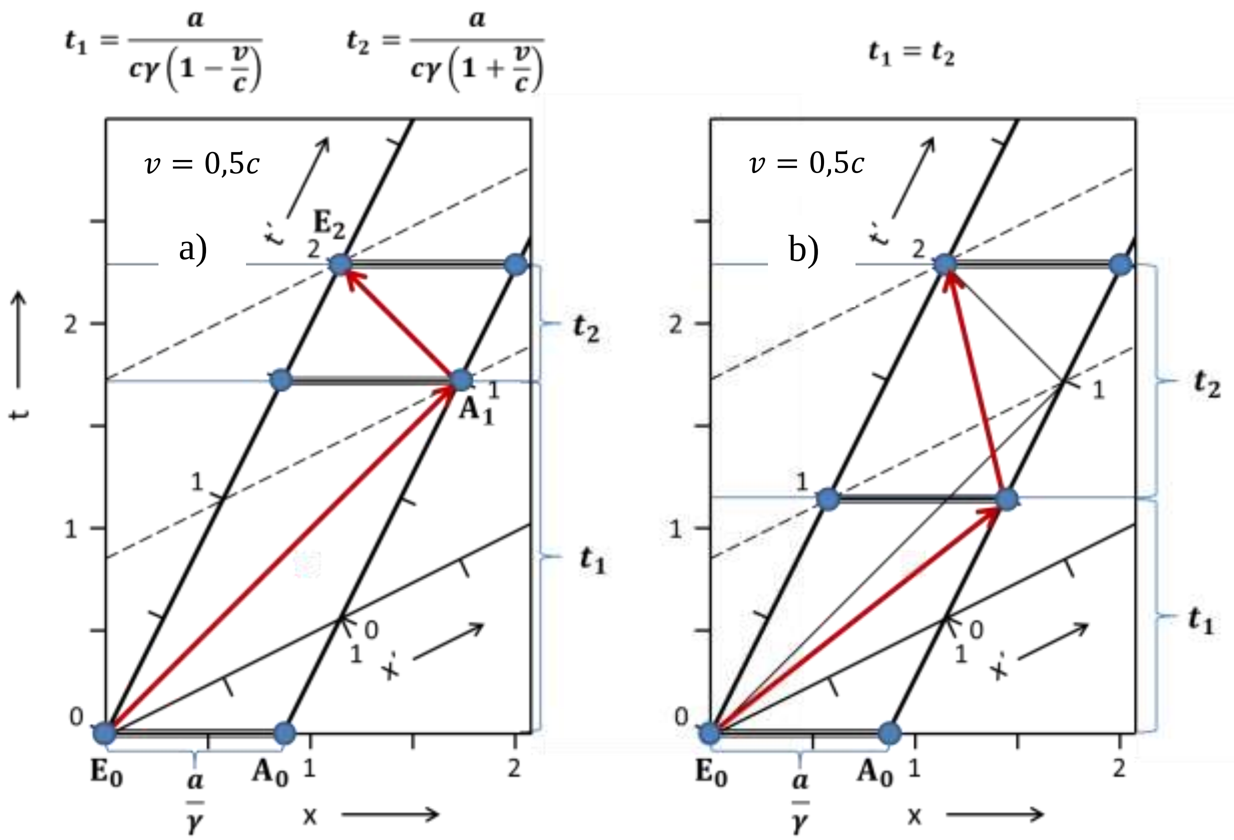


Abb. 12.3: Schematische Darstellung des Signalverlaufs in einem Labor L zwischen E und A aus Sicht eines relativ dazu bewegten Inertialsystems S ($v = 0{,}5c$)
a) Korrekt: $c =$ const. bezogen auf S.
b) Nicht korrekt: $t_1 = t_2$ bezogen auf S

Um dies zu verdeutlichen, ist der Sachverhalt in Abb. 12.3 dargestellt. Während für einen ruhenden Beobachter die Situation immer klar ist (Hin- und Rückweg sind gleich lang und auch die Einzelzeiten sind gleich) gilt dies nicht für einen Beobachter aus einem dazu bewegten Inertialsystem S.

Die Festlegung der Einstein-Synchronisation, d. h. beim Hin- und Rückweg für den Signalaustausch zwischen zwei Punkten (z. B. den Enden eines Labors A und E) sind Zeit und Weg jeweils zur Hälfte ausgeteilt, gilt nur subjektiv für das zum Labor in Ruhe befindliche System L. Würde aus einem anderen Inertialsystem S heraus ebenfalls diese Festlegung gelten und die Zeiten $t_1 = t_2$ gleich sein, so würde die Situation entstehen wie im rechten Teil des Diagramms dargestellt mit Signalgeschwindigkeiten größer oder kleiner als c sowie messbaren Synchronisationsdifferenzen. Darüber hinaus kann eine Situation, bei der der Weg in beiden Richtungen konstant ist, nach diesen Überlegungen noch nicht einmal theoretisch auftreten, weil sich das Laborende nach dem Aussenden des Signals sofort vom ursprünglichen Punkt entfernt und beim Rückweg an anderer Stelle befindet. Stattdessen gilt die Situation wie im linken Teilbild dargestellt. Dies bedeutet, dass die Festlegung eines Referenzsystem immer nur subjektiv sein kann.

12.3 Integration eines Systems absoluter Ruhe in die Lorentz-Gleichungen

Die in Kap. 12.1 dargestellten Versuche zur Integration eines absoluten Ruhesystem unter Verletzung der Lorentz-Gleichungen haben offensichtlich bisher nicht zum Erfolg geführt. Im Folgenden wird untersucht, ob sich bei der Betrachtung von zwei beliebig zueinander bewegten Beobachtern zusätzlich ein übergeordnetes System absoluter Ruhe integrieren und dabei die Verwendung der Lorentz-Transformation widerspruchsfrei einbinden lässt. Bereits eine einfache Betrachtung zeigt, dass dies möglich sein muss da es sich hier im mathematischen Sinn um eine Gruppe handelt. Bei der Anwendung der Lorentz-Transformation von einem System A→ B kann daher ebenfalls die Form A→ S→ B genutzt werden, wobei S ein Ruhesystem sein kann.

Aufgrund der Bedeutung dieser Aussage wird die Gültigkeit dieser Beziehungen jedoch hier noch explizit nachgewiesen. Dabei werden gemäß den möglichen Konstellationen zwischen den Beobachtern nacheinander unterschiedliche Fälle behandelt.

1. Die Beobachter A und B bewegen sich auf einer Geraden bezüglich S

Im Folgenden wird analytisch das Beispiel untersucht, bei dem das Ruhesystem S und Beobachter A im Referenzsystem 1, das sich gegenüber S mit v_0 bewegt sowie Beobachter B im zu untersuchenden System 2 (mit v_1 bezogen auf das Referenzsystem 1) auf einer Linie liegen und $v_0 < v_1$.gilt. Zur Vereinfachung der Darstellung werden generell für die Geschwindigkeiten nicht die absoluten Werte gewählt, sondern durch ihr Verhältnis zu c ersetzt.

Die Lorentz-Gleichungen zwischen dem Referenz-System 1 und einem zu untersuchenden System 2 lauten dann

$$x_2 = \gamma_1(x_1 - v_1 t_1) \tag{12.40}$$

$$t_2 = \gamma_1(t_1 - v_1 x_1) \tag{12.41}$$

wobei x_1 und t_1 die Koordinaten des Referenzsystems und x_2 und t_2 die des sich mit der Geschwindigkeit v_1 fortbewegenden Systems sind. Führt man nun ein System absoluter Ruhe ein so wird sich das System 1 gegenüber diesem bewegen. Aus der Sicht des ruhenden Systems ergeben sich also die folgenden Beziehungen

$$x_1 = \gamma_0(x_0 - v_0 t_0) \tag{12.42}$$

$$t_1 = \gamma_0(t_0 - v_0 x_0) \tag{12.43}$$

$$x_2 = \gamma_2(x_0 - v_2 t_0) \tag{12.44}$$

$$t_2 = \gamma_2(t_0 - v_2 x_0) \tag{12.45}$$

wobei v_0 die Geschwindigkeit zwischen Ruhesystem und Referenzsystem 1 und v_2 zwischen Ruhesystem und System 2 ist. Außerdem gilt die Beziehung für die relativistische Geschwindigkeitsaddition

$$v_2 = \frac{v_0 + v_1}{1 + v_0 v_1} \tag{12.46}$$

Aus den Gleichungen (12.42) und (12.43) ergibt sich die Beziehung für die Koordinaten x_0 und t_0 zu

$$x_0 = \gamma_0(x_1 + v_0 t_1) \tag{12.47}$$

$$t_0 = \gamma_0(t_1 + v_0 x_1) \tag{12.48}$$

Eingesetzt in Gl. (12.44) und (12.45) folgt damit

$$x_2 = \gamma_2\big(\gamma_0(x_1 + v_0 t_1) - v_2 \gamma_0(t_1 + v_0 x_1)\big) \tag{12.49}$$

$$x_2 = \gamma_2 \gamma_0\big((1 - v_0 v_2) x_1 - (v_2 - v_0) t_1\big) \tag{12.50}$$

$$t_2 = \gamma_2\big(\gamma_0(t_1 + v_0 x_1) - v_2 \gamma_0(x_1 + v_0 t_1)\big) \tag{12.51}$$

$$t_2 = \gamma_2 \gamma_0\big((1 - v_0 v_2) t_1 - (v_2 - v_0) x_1\big) \tag{12.52}$$

Die Gleichungen (12.40) und (12.41) sollen identisch sein mit den Gleichungen (12.50) bzw. (12.51). Zum Beweis wird ein Koeffizientenvergleich durchgeführt und es ergibt sich

(12.40) ⇔ (12.50)	x_1:	$\gamma_1 = \gamma_2 \gamma_0 (1 - v_0 v_2)$	(12.53)
(12.40) ⇔ (12.50)	t_1:	$v_1 \gamma_1 = \gamma_2 \gamma_0 (v_2 - v_0)$	(12.54)
(12.41) ⇔ (12.51)	t_1:	$\gamma_1 = \gamma_2 \gamma_0 (1 - v_0 v_2)$	(12.55)
(12.41) ⇔ (12.51)	x_1:	$v_1 \gamma_1 = \gamma_2 \gamma_0 (v_2 - v_0)$	(12.56)

Offensichtlich sind Gleichungen (12.53) und (12.55) sowie (12.54) und (12.56) identisch. Wegen

$$v_1 = \frac{v_2 - v_0}{1 - v_0 v_2} \tag{12.57}$$

geht Gl. (12.54) in Gl. (12.53) über, da

$$(v_2 - v_0)\gamma_1 = \gamma_2 \gamma_0 (v_2 - v_0)(1 - v_0 v_2) \tag{12.58}$$

Damit sind alle 4 Gleichungen identisch. Zum endgültigen Nachweis der Gültigkeit genügt also die Betrachtung einer Beziehung.

Werden nun z. B. aus Gl. (12.54) beide Seiten quadriert und die jeweiligen Beziehungen der Werte für γ eingesetzt, so folgt

$$\frac{v_1^2}{(1-v_1^2)} = \frac{(v_2 - v_0\,)^2}{(1-v_2^2)\cdot(1-v_0^2)} \tag{12.59}$$

mit

$$(1 - v_2 v_0\,)^2 v_1^2 = (v_2 - v_0)^2 \tag{12.60}$$

Wird für v_2 die Gleichung (12.46) eingesetzt, so folgt

$$\left(1 - \frac{v_0 + v_1}{1 + v_0 v_1} v_0\right)^2 v_1^2 = \left(\frac{v_0 + v_1}{1 + v_0 v_1} - v_0\right)^2 \tag{12.61}$$

Wird diese Gleichung vollständig ausmultipliziert so ergeben sich dabei 20 Terme, die sich gegenseitig aufheben. Es wurde also damit für diesen Fall gezeigt, dass die Verwendung eines Ruhesystems nicht zu einem Konflikt bei der Verwendung der Lorentz-Gleichungen führt. Veränderte Randbedingungen mit $v_0 > v_1$ führen zum gleichen Ergebnis, da es sich hier um lineare Beziehungen handelt, die in allen Fällen durch Linearkombinationen dargestellt werden können.

Betrachtet man dagegen eine beliebige Abhängigkeit bei der Kombination von Geschwindigkeiten für Bewegungen in verschiedene Raumrichtungen (d. h. in diesem Fall treffen sich die Beobachter nicht, sondern nähern sich nur auf einen bestimmten Wert an und entfernen sich dann wieder) so wird die Darstellung deutlich schwieriger. Es wurde bereits in Kap. 2.1.2 gezeigt, dass es für einen unbewegten (A) und einen bewegten Beobachter (B) keine Unterschiede bei der jeweiligen Beobachtung der Situation gibt und es für sie aufgrund von Messungen beim Signalaustausch nicht unterscheidbar ist, ob sie sich bewegen oder in Ruhe befinden. Kommt hier ein System absoluter Ruhe hinzu, dessen Geschwindigkeit gegenüber dem zuvor als unbewegt betrachteten Beobachter A von Null verschieden ist, so wird die Darstellung der Situation komplex, kann aber durch geeignete Wahl eines Nullpunkts stark vereinfacht werden.

Es wird dabei die Tatsache genutzt, dass sich die Richtungsvektoren der Beobachter auf definierten Geraden bewegen. Verschiebt man die Vektoren auf dieser Geraden so ändern sich die Beziehungen zwischen den Vektoren um eine lineare Größe, d. h. im mathematischen Sinne wird eine Konstante hinzugefügt, die nach einer erfolgten Vergleichsberechnung wieder abgezogen werden kann. Es lassen sich nun zwei unterschiedliche Fälle betrachten.

2. Die Geraden der Richtungsvektoren schneiden sich

Es wird nun die Tatsache genutzt, dass bei diesem System zwar der Ruhezustand festgelegt ist, aber es keinen definierten Ausgangspunkt gibt, von dem aus die Betrachtungen durchgeführt werden müssen. Zunächst wird hier aus den unendlich vielen Möglichkeiten der Nullpunkt so gewählt, dass sich A von ihm entfernt; diese Linie entspricht der x-Achse. Außerdem werden die Vektoren beider Beobachter so verschoben, dass sie sich schneiden. Mit diesen Voraussetzungen können dann die Koordinaten x, y, t aus Sicht von A und vom Ruhesystem S aus berechnet werden, der Wert in Richtung z ist aufgrund der Wahl des Koordinatensystems stets gleich Null. Die Beziehungen müssen dabei der Lorentz-Transformation gehorchen.

Zum Nachweis wird folgendes Experiment diskutiert: Vom Beobachter A wird sich mit einem beliebigen Winkel α' bezüglich der x-Achse der Beobachter B entfernen. Nach einer definierten Zeit Δt wird dieser ein Signal aussenden. Diese Koordinaten werden von A und aus dem Ruhesystem S bestimmt. Sind diese bei einem Vergleich mittels der Lorentz-Gleichungen identisch so lässt sich das Ruhesystem integrieren.

Es ergeben sich folgende Rechnungen:
Beobachter A stellt fest, dass die ausgesendeten Signale von dem mit Geschwindigkeit v_1 bewegenden Beobachter B mit einer Verzögerung

$$t_1 = \gamma_1 \Delta t \tag{12.62}$$

ausgestrahlt werden. Er findet demnach die Koordinaten

$$x_1 = v_1 t_1 cos\ \alpha' \tag{12.63}$$

$$y_1 = v_1 t_1 sin\ \alpha' \tag{12.64}$$

Vom System S aus gesehen lässt sich die Geschwindigkeit gemäß Gl. (4.20) bestimmen (vgl. Kap. 4.1)

$$v_2 = \frac{\sqrt{(v_0^2 + v_1^2 + 2v_0 v_1 cos\alpha') - (v_0 v_1 sin\alpha')^2}}{1 + v_0 v_1 cos\alpha'} \tag{12.65}$$

wobei aus seiner Sicht v_0 die Geschwindigkeit von A ist. Für den von S bestimmten Winkel α gilt gem. Gl. (7.43)

$$\alpha = arctan\left[\frac{sin\ \alpha'}{\gamma_0\left(cos\alpha' + \frac{v_0}{v_1}\right)}\right] \tag{12.66}$$

(Zu Details vgl. Kap. 7.2). Analog zu den vorher bestimmten Koordinaten gilt nun

$$t_2 = \gamma_2 \Delta t \tag{12.67}$$

$$x_2 = v_2 t_2 cos\alpha \tag{12.68}$$

$$y_2 = v_2 t_2 sin\alpha \tag{12.69}$$

Abschließend werden nun die Koordinaten bestimmt, die sich aus den Lorentz-Gleichungen ergeben müssen und es folgt

$$t_1' = \gamma_0(t_2 - v_0 x_2) \tag{12.70}$$

$$x_1' = \gamma_0(x_2 - v_0 t_2) \tag{12.71}$$

Es muss nun gelten:

$$t_1' = t_1 \tag{12.72}$$

$$x_1' = x_1 \tag{12.73}$$

$$y_2 = y_1 \tag{12.74}$$

Gl. (12.74) zeigt an, dass die Werte in y-Richtung in allen Systemen identisch sein müssen, was direkt aus den Lorentz-Gleichungen folgt.

α'	t_1	x_1	y_1	v_2	α	t_2	x_2	y_2	t_1'	x_1'
0	1,154701	0,577350	0,000000	0,571429	0,00000	1,218544	0,696311	0,000000	1,154701	0,577350
15	1,154701	0,557678	0,149429	0,569508	12,45513	1,216566	0,676539	0,149429	1,154701	0,557678
30	1,154701	0,500000	0,288675	0,563786	25,01756	1,210770	0,618571	0,288675	1,154701	0,500000
45	1,154701	0,408248	0,408248	0,554386	37,79756	1,201548	0,526357	0,408248	1,154701	0,408248
60	1,154701	0,288675	0,500000	0,541551	50,91089	1,189531	0,406181	0,500000	1,154701	0,288675
75	1,154701	0,149429	0,557678	0,525691	64,48031	1,175536	0,266234	0,557678	1,154701	0,149429
90	1,154701	0,000000	0,577350	0,507445	78,63457	1,160518	0,116052	0,577350	1,154701	0,000000
105	1,154701	-0,149429	0,557678	0,487753	93,50218	1,145500	-0,034130	0,557678	1,154701	-0,149429
120	1,154701	-0,288675	0,500000	0,467905	109,19583	1,131505	-0,174078	0,500000	1,154701	-0,288675
135	1,154701	-0,408248	0,408248	0,449528	125,78294	1,119487	-0,294253	0,408248	1,154701	-0,408248
150	1,154701	-0,500000	0,288675	0,434472	143,24177	1,110266	-0,386467	0,288675	1,154701	-0,500000
165	1,154701	-0,557678	0,149429	0,424533	161,41618	1,104469	-0,444435	0,149429	1,154701	-0,557678
180	1,154701	-0,577350	0,000000	0,421053	0,00000	1,102492	-0,464207	0,000000	1,154701	-0,577350
0	1,154701	0,577350	0,000000	0,800000	0,00000	1,666667	1,333333	0,000000	1,154701	0,577350
15	1,154701	0,557678	0,149429	0,796896	6,50446	1,655309	1,310617	0,149429	1,154701	0,557678
30	1,154701	0,500000	0,288675	0,787340	13,06431	1,622008	1,244017	0,288675	1,154701	0,500000
45	1,154701	0,408248	0,408248	0,770588	19,73390	1,569036	1,138071	0,408248	1,154701	0,408248
60	1,154701	0,288675	0,500000	0,745356	26,56505	1,500000	1,000000	0,500000	1,154701	0,288675
75	1,154701	0,149429	0,557678	0,709783	33,60502	1,419606	0,839213	0,557678	1,154701	0,149429
90	1,154701	0,000000	0,577350	0,661438	40,89339	1,333333	0,666667	0,577350	1,154701	0,000000
105	1,154701	-0,149429	0,557678	0,597477	48,45800	1,247060	0,494121	0,557678	1,154701	-0,149429
120	1,154701	-0,288675	0,500000	0,515079	56,30993	1,166667	0,333333	0,500000	1,154701	-0,288675
135	1,154701	-0,408248	0,408248	0,412289	64,43855	1,097631	0,195262	0,408248	1,154701	-0,408248
150	1,154701	-0,500000	0,288675	0,289259	72,80788	1,044658	0,089316	0,288675	1,154701	-0,500000
165	1,154701	-0,557678	0,149429	0,149449	81,35612	1,011358	0,022716	0,149429	1,154701	-0,557678
180	1,154701	-0,577350	0,000000	0,000000	0,00000	1,00000	0,000000	0,000000	1,154701	-0,577350
0	1,005038	0,100504	0,000000	0,571429	0,00000	1,218544	0,696311	0,000000	1,005038	0,100504
15	1,005038	0,097079	0,026012	0,569508	2,15163	1,216566	0,692356	0,026012	1,005038	0,097079
30	1,005038	0,087039	0,050252	0,563786	4,22175	1,210770	0,680763	0,050252	1,005038	0,087039
45	1,005038	0,071067	0,071067	0,554386	6,12440	1,201548	0,662320	0,071067	1,005038	0,071067
60	1,005038	0,050252	0,087039	0,541551	7,76517	1,189531	0,638285	0,087039	1,005038	0,050252
75	1,005038	0,026012	0,097079	0,525691	9,03827	1,175536	0,610295	0,097079	1,005038	0,026012
90	1,005038	0,000000	0,100504	0,507445	9,82643	1,160518	0,580259	0,100504	1,005038	0,000000
105	1,005038	-0,026012	0,097079	0,487753	10,00607	1,145500	0,550222	0,097079	1,005038	-0,026012
120	1,005038	-0,050252	0,087039	0,467905	9,46232	1,131505	0,522233	0,087039	1,005038	-0,050252
135	1,005038	-0,071067	0,071067	0,449528	8,11836	1,119487	0,498198	0,071067	1,005038	-0,071067
150	1,005038	-0,087039	0,050252	0,434472	5,97964	1,110266	0,479755	0,050252	1,005038	-0,087039
165	1,005038	-0,097079	0,026012	0,424533	3,18024	1,104469	0,468161	0,026012	1,005038	-0,097079
180	1,005038	-0,100504	0,000000	0,421053	0,00000	1,102492	0,464207	0,000000	1,005038	-0,100504

Tab. 12.2: Vergleich der Ergebnisse für die Lorentz-Transformation. Felder grau: Werte approximiert (da sonst Division durch 0). Mit Rahmen: 180°+Winkel Formeln von $t_1 \rightarrow$ Gl. (12.33) bis $x_1' \rightarrow$ Gl. (12.42) vgl. Text.

Eine analytische Ableitung der Gültigkeit der Gleichungen ist aufwändig, ein direkter numerischer Vergleich jedoch nicht. In Tab. 12.2 sind die Ergebnisse für verschiedene Geschwindigkeiten gezeigt; es zeigen sich keine Differenzen und die Gl. (12.72), (12.73) und (12.74) gelten daher uneingeschränkt.

3. Die Geraden der Richtungsvektoren schneiden sich nicht

Für den Fall, dass sich die Richtungsvektoren der Beobachter A und B nicht schneiden bedeutet dies, dass die von ihnen beschriebenen Geraden in der Terminologie der Analytischen Geometrie „windschief" sind. Hier wird zunächst das Gemeinlot bestimmt. Diese ist dort, wo der Abstand der Geraden ein Minimum annimmt, und es ist der einzige Punkt, an dem die Verbindungslinie auf *beiden* Geraden gleichzeitig senkrecht steht.

Dieses Lot wird nun als Basis für die z-Achse gewählt, die bisher keine Rolle bei den Betrachtungen gespielt hat. Der Schnittpunkt mit der x-Achse wird als Ursprung des Koordinatensystems bestimmt und die Richtung der y-Achse ist dann senkrecht zu beiden. Wenn Beobachter B sich maximal angenähert hat und der Wert auf der z-Achse z_{min} einnimmt gilt $x = y = 0$. Wird nun der Umstand genutzt, dass gemäß Lorentz-Translation die Werte in z-Richtung sich bei einer Transformation nicht ändern, so kann hier auch ohne Veränderung der Beziehungen eine Projektion um z_{min} vorgenommen werden. Die sich dann ergebende Situation ist identisch mit dem bereits gezeigten Sachverhalt für den Fall, dass die Richtungsvektoren sich schneiden. Es ist also auf diese Weise allgemein gezeigt, dass sich ein System allgemeiner Ruhe in jedes beliebig definierte Inertialsystem integrieren lässt.

13. Mögliche Klärungsversuche

Im folgenden Kapitel sollen Möglichkeiten für Versuche beschrieben werden, die sich aufgrund der hier zusammengestellten Darstellungen ergeben. Dazu werden zunächst denkbare Experimente skizziert und anschließend wird versucht, auf Basis realistischer Daten eine Abschätzung zur Größe der generierbaren Messergebnisse vorzunehmen. Die Vorschläge für diese Versuche basieren auf den Überlegungen in Kap. 10 in dem für die Spezielle Relativitätstheorie wichtige Themen behandelt wurden.

Ein Ansatz ergibt sich, wenn für das bekannte Auftreten von Überlichtgeschwindigkeiten beim Tunneleffekt unterstellt wird, dass dabei auch Informationen – hier in Form eines einfachen Impulses – schneller als das Licht übertragen werden können. Dies wäre nur dann erklärbar, wenn im Gegensatz zu den Prämissen der Speziellen Relativitätstheorie ein absolut ruhendes System unterstellt wird. Des Weiteren wird ein Versuch vorgeschlagen mit dem sich klären lässt, ob Synchronisationsunterschiede nach Geschwindigkeitsänderungen tatsächlich vorhanden sind. Hiermit können eindeutige Aussagen zur Relativität der Gleichzeitigkeit gewonnen werden, die, wie bereits in Kap. 11.1 diskutiert, von einigen alternativen Theorien ausgeschlossen werden. Außerdem wird ein Versuch beschrieben, mit dem auf indirektem Wege die relativistische Massenerhöhung nach einem nicht elastischen Stoß nachgewiesen werden kann.

13.1 Messung des Tunneleffekts in verschiedenen Raumrichtungen

Wie bereits in Kapitel 10.1 ausgeführt wurde, sind das Auftreten von Überlichtgeschwindigkeiten und die Spezielle Relativitätstheorie nicht miteinander zu vereinbaren. Sollten Überlichtgeschwindigkeiten tatsächlich auftreten, so ließe sich der auftretende Widerspruch lösen, wenn für den Kosmos ein System absoluter Ruhe angenommen wird. Im Folgenden wird ein Versuch beschrieben, bei dem mittels des Tunneleffekts und damit verbundener Überlichtgeschwindigkeit eine Relativbewegung bezogen auf diesen Ruhezustand nachgewiesen werden könnte.

Zunächst soll der Stand der Diskussionen bezüglich des Messverfahrens dargestellt werden. Für die Messungen wird wie in Kap. 10.1 dargestellt ein Impuls in ein Doppelprisma eingestrahlt und anschließend werden der reflektierte und der getunnelte Impuls miteinander verglichen. Der im Prisma reflektierte Strahl mit nahezu unveränderter Intensität muss dabei mit dem getunnelten Strahl, der eine erheblich geringere Intensität hat, bezüglich der Laufzeit verglichen werden. Um dies durchführen zu können ist es erforderlich, den Messeffekt des getunnelten Strahls um ein Vielfaches zu verstärken.

Die gemessenen Werte werden daher zunächst auf gleiche Größe verstärkt (Normalisiert). Eines der großen Probleme bei der Analyse der normalisierten Werte der reflektierten und getunnelten Impulse dieses Experimentes liegt darin, dass es sich bei den Ergebnissen nicht um scharf abgegrenzte Einzelwerte handelt, sondern diese in Form einer Gauß`schen Glockenkurve auftreten und entsprechend interpretiert werden müssen. Als Beispiel für diesen Effekt sind in Abb. 13.1 Literaturwerte eines Experiments mit normalisierten Messergebnissen für reflektierten und getunnelten Impuls dargestellt [64]. Um die die Problematik darzustellen wurde – bereits sehr stark überhöht – der „Originalwert" des Tunnelimpulses hinzugefügt.

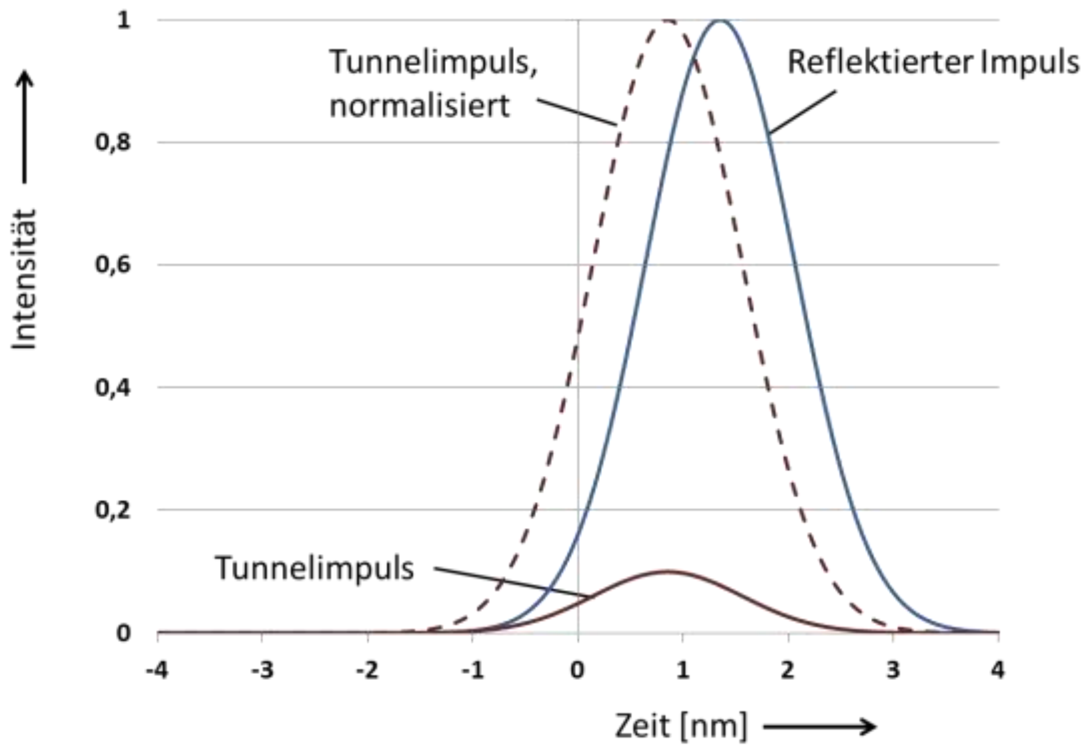


Abb. 13.1 Literaturwerte für normierte Messergebnisse beim Tunnelexperiment [64]
Darstellung von reflektiertem Impuls und Tunnelimpuls.
Originaltunnelimpuls (stark überhöht) wurde hinzugefügt

Bei Auswertung dieser Kurven ergaben sich gemäß G. Nimtz Werte für den reflektierten Impuls $v_R = 0{,}665c$ und für den Tunnelimpuls $v_T = 4{,}7c$ [64]. Obwohl auftretende Messeffekte dieser Art, die auch bei anderen Experimenten gefunden wurden, nicht generell angezweifelt werden, wird vielfach jedoch die Ansicht vertreten, dass bei solchen Versuchen zwar Überlichtgeschwindigkeiten auftreten hiermit jedoch keine Datenübertragung schneller als das Licht erfolgen kann. Die hiermit verbundenen Grundlagen wurden bereits in Kap. 10.1 umfassend dargestellt. Unabhängig von den Überlegungen bezüglich der Speziellen Relativitätstheorie sind die auftretenden Effekte demnach von allgemeinem Interesse und sollten geklärt werden.

Aufgrund der experimentellen Herausforderungen ist eine eindeutige Klärung sehr schwierig. Der Funktionsverlauf wird allgemein beschrieben durch

$$f(t) = \frac{exp\left[-\left(\frac{t-\Delta t}{k}\right)^2\right]}{\sqrt{k \cdot \pi}} \tag{13.01}$$

wobei zur Normierung die Einzelwerte auf den Maximalwert der Funktion an der Stelle

$$f_{max} = f(t - \Delta t) \tag{13.02}$$

bezogen werden. Hierbei beschreibt die Konstante k die Breite der Glockenkurve (schmalere Ausbildung mit steigendem Wert für k) und Δt den Abstand des Maximums dieser Funktion zum Ausgangswert $t = 0$.

Es sind in der Vergangenheit bereits mehrfach Messungen mit Doppelprismen durchgeführt worden. Die größten dabei genutzten Abmessungen lagen bei einem Messabstand von 280 mm. Wie bereits diskutiert kann eine Informationsübertragung nur Im Zusammenhang mit einem absolut ruhenden System erfolgen Es ist bekannt, dass sich unser Sonnensystem mit einer Geschwindigkeit von etwa 369 km/s gegenüber der kosmischen Hintergrundstrahlung bewegt. Wird unterstellt, dass dies die Basis des Systems absoluter Ruhe ist, so könnte ein Effekt nachgewiesen werden, wenn Messungen in unterschiedlichen Raumrichtungen durchgeführt werden.

Die Effekte sind jedoch sehr gering. Um dies zu zeigen, wurde auf Basis der Überlegungen aus Kap. 10.1 eine Berechnung der zu erwartenden Effekte vorgenommen und in Tab. 13.1 zusammengestellt. Dabei wurden die Messeffekte für den Wert 280 mm berechnet und es wurde wie von [64] gemessen ein Wert von 4,6c für die Signalgeschwindigkeit angenommen. Daraus ergeben sich dann gemäß Gl. (10.07) die in Tab. 13.1 dargestellten Werte für eine Ausrichtung in Bewegungsrichtung ($t_1 + t_2$) sowie entgegengesetzt dazu ($t_3 + t_4$). Es wird klar, dass die daraus berechneten Zeitdifferenzen noch einmal um 2-3 Größenordnungen kleiner sind als die ohnehin geringfügigen Unterschiede des Standardexperiments.

$t_1 = \frac{a}{\gamma(v_E + v_S)} = \frac{0{,}28m}{\gamma(4{,}6 + 0{,}00123)c}$	$2{,}02844 \cdot 10^{-10}$s
$t_2 = \frac{a}{\gamma(c - v_S)} = \frac{0{,}28m}{\gamma(1 + 0{,}00123)c}$	$9{,}34482 \cdot 10^{-10}$s
$t_3 = \frac{a}{\gamma(v_E - v_S)} = \frac{0{,}28m}{\gamma(4{,}6 - 0{,}00123)c}$	$2{,}02953 \cdot 10^{-10}$s
$t_4 = \frac{a}{\gamma(c + v_S)} = \frac{0{,}28m}{\gamma(1 + 0{,}00123)c}$	$9{,}32186 \cdot 10^{-10}$s
$Gl.$ (10.07): $t_T = t_1 + t_2 - t_3 - t_4$	$2{,}19 \cdot 10^{-12}$s

Tab.13.1: Maximal zu erwartende Messergebnisse für Prismenanordnung gemäß Abb. 10.1 mit $a = 280$ mm, $v_E = 4{,}6c,\ v_S = 369$ km/s

Um die Aussagefähigkeit des Versuchs zu vergrößern, müsste demnach einer der Parameter optimiert werden. Dies könnte zum einen durch eine starke Verkürzung der Impulslänge, z. B. unter Nutzung von Femtolasern erreicht werden. Hier sind jedoch Grenzen in der Impulsaufnahme der verwendeten Prismen sowie in der Komplexität der zu verwendenden Messtechnik zu sehen. Des Weiteren ist die Verlängerung des Messweges zur Erhöhung des Wertes für Δt möglich, hierbei ist aber die extreme Signalabschwächung mit steigendem Abstand der Prismen zu berücksichtigen.

Eine Durchführung auf Basis dieses Versuchsaufbaus erscheint daher nicht sinnvoll und muss zuvor durch geeignete Modifikationen deutlich optimiert werden. Hierzu wird der in Abb. 13.2 dargestellte Vorschlag gemacht. Hierbei wird statt der üblichen einfachen Einstrahlung eines Impulses und dem Vergleich zwischen gespiegeltem und getunneltem Signal ein zweiter Strahl spiegelsymmetrisch eingeleitet. Bei der Auswertung des Versuchs werden nur die getunnelten Anteile dieser Strahlen verstärkt und miteinander verglichen. Auf diese Weise werden alle Interpretationsprobleme vermieden, die sich bei dem zuvor erforderlichen Vergleich zwischen gespiegeltem und getunneltem Strahl ergeben hatten.

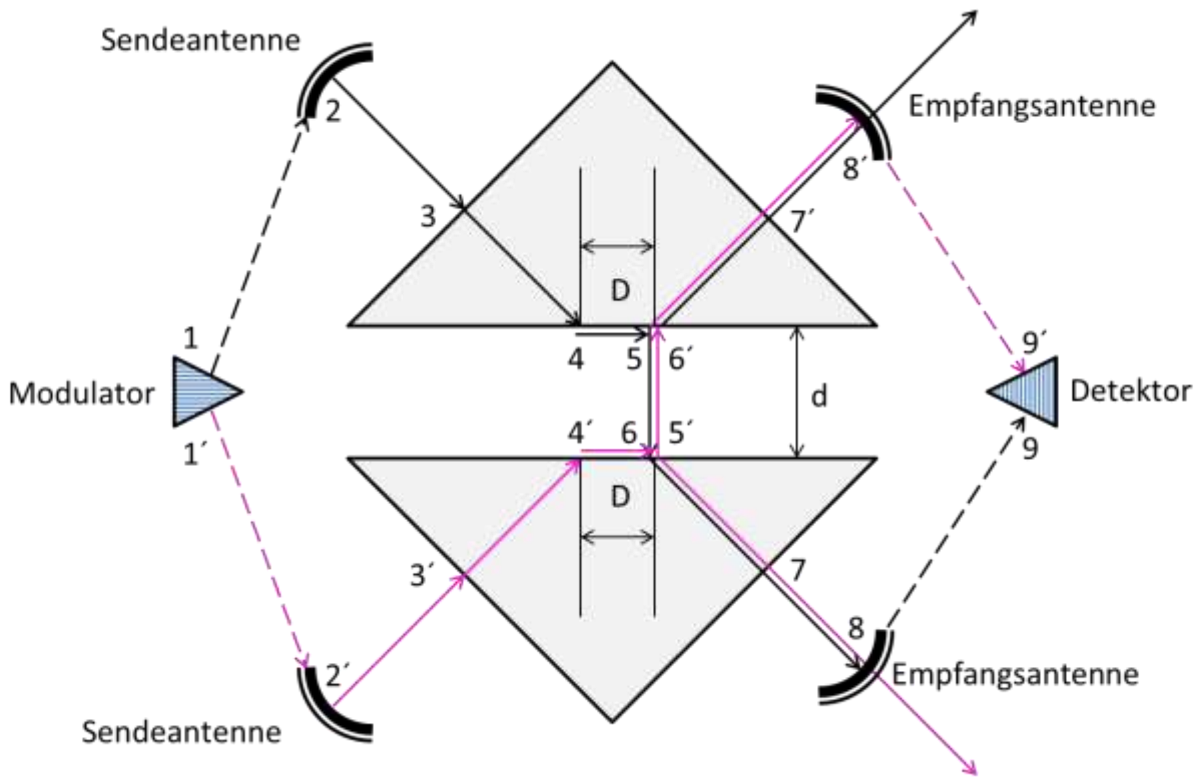


Abb. 13.2: Möglicher Versuchsaufbau zur Messung von Tunneleffekten abhängig von unterschiedlichen Raumrichtungen.

Bei diesem Aufbau wird zum Versuchsstart von einem Modulator ein Signal S und S' an gegenüberliegende Sendeantennen geschickt. Die erzeugten Impulse verlaufen entsprechend der Darstellung durch die Apparatur und werden dann detektiert.

Für eine sinnvolle Auswertung wird die Nutzung einer Differenzmessung vorgeschlagen. Hierbei wird die Apparatur in einer beliebigen Ausrichtung so kalibriert, dass die Messlinien der getunnelten Impulse beider Prismen zur Deckung gebracht werden; eine Auswertung der Zeitdifferenz führt hierbei definitionsgemäß zu einem Nullresultat. Wird in einem zweiten Schritt die Apparatur dann gedreht und es tritt ein Effekt wie zuvor diskutiert auf so wird sich ein Zeitunterschied beim Durchlauf beider Prismen einstellen. Dieser ist abhängig von der Ausrichtung zum Zustand absoluter Ruhe, der Signalgeschwindigkeit und der Gesamtlänge der Apparatur.

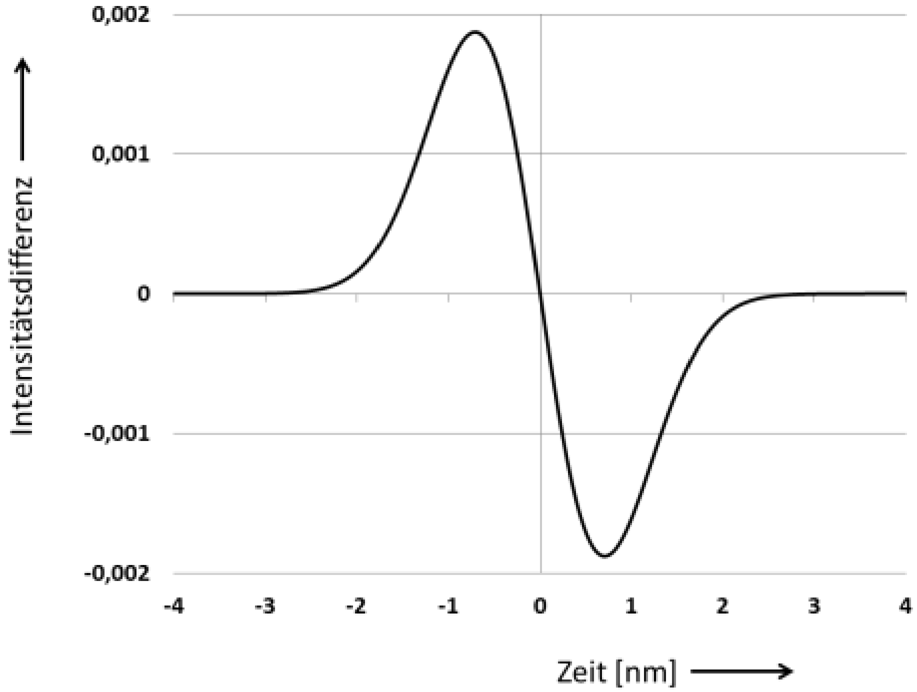


Abb. 13.3: Zu erwartende Messergebnisse für eine Apparatur von 280 mm Länge, $v_S = 369$ km/s und $v_T = 4{,}6c$

Um die Signale zu verstärken, ist eine Vergrößerung der Prismen selbst oder deren Abstand keine sinnvolle Option, da sich die auftretenden Effekte hierdurch sehr stark verringern. Es ist jedoch möglich, die entstehenden getunnelten Signale der Prismen zu detektieren, zu verstärken, dann in ein weiteres nachgeschaltetes Prisma einzuleiten und auf diese Weise die Messung zu wiederholen. Es können sich dabei zwar durch die Verarbeitung des Signals geringfügige Zeitdifferenzen einstellen, die dann Einfluss auf das Messergebnis haben. Dieser Effekt kann jedoch vernachlässigt werden, da die Auswertung sich grundsätzlich nur auf Differenzen bezieht.

Es ist erkennbar, dass die Werte zwar nur gering sind, dass sie aber durchaus messtechnisch realisierbar erscheinen. Wichtig ist hier insbesondere die mechanische Stabilität des Versuchsaufbaus. Dieser muss auf einem Drehtisch gelagert werden, um Messungen in verschiedenen Raumrichtungen zu ermöglichen. Außerdem müssten sich hier bei einem positiven Ergebnis Unterschiede bei der Messung zu verschiedenen Zeiten mit den hierbei gegebenen unterschiedlichen Ausrichtungen der Erde bezüglich eines absolut ruhenden Raums einstellen.

Mit einem solchen Versuch könnte demnach eindeutige Klarheit über einen grundlegenden physikalischen Aspekt liefern. Entweder es gibt einen positiven Messeffekt mit entsprechenden Auswirkungen auf die Spezielle Relativitätstheorie oder die Frage zur überlichtschnellen Signalübertragung bei Tunnelexperimenten ist endgültig negativ entschieden.

13.2 Messung von Synchronisationsunterschieden

Wie bereits im Kapitel 10.2 beschrieben wurde, ergeben sich aufgrund der Relativität der Gleichzeitigkeit für die Lorentz Transformation Synchronisationsdifferenzen bei unterschiedlichen Geschwindigkeiten. Diese müssen sich bestimmen lassen, wenn in einem Labor zwischen 2 Uhren, die in einem definierten Abstand positioniert sind, eine Synchronisation durchgeführt wird, anschließend das Labor in Ausrichtung der Uhren beschleunigt und dann der Prozess wiederholt wird. In diesem Fall müssen an beiden Uhren Synchronisationsunterschiede feststellbar sein.

In Abb. 13.4 sind die sich ergebenden Zusammenhänge für eine solche Konstellation dargestellt. Um die Unterschiede grafisch wiedergegeben zu können wurden hier hohe Geschwindigkeiten gewählt ($v = 0{,}5c \pm 0{,}25c$, dies entspricht bei Anwendung der relativistischen Geschwindigkeitsaddition Werten von $v_1 = 0{,}667c$ und $v_2 = 0{,}286c$).

Wenn t_0 die Signallaufzeit zwischen A und B in einem System absoluter Ruhe ist ergibt sich für das linke Diagrammteilbild ein Effekt durch die folgenden Beziehungen:

$$t_{AB} = \frac{t_0}{\gamma_1\left(1 - \frac{v_1}{c}\right)} \qquad t'_{AB} = \frac{t_0}{\gamma_2\left(1 - \frac{v_2}{c}\right)} \tag{13.10}$$

$$t_{BA} = \frac{t_0}{\gamma_1\left(1 + \frac{v_1}{c}\right)} \qquad t'_{BA} = \frac{t_0}{\gamma_2\left(1 + \frac{v_2}{c}\right)} \tag{13.11}$$

mit

$$\Delta t_{AB} = t'_{AB} - t_{AB} = \frac{t_0}{\gamma_2\left(1 - \frac{v_2}{c}\right)} - \frac{t_0}{\gamma_1\left(1 - \frac{v_1}{c}\right)} \tag{13.12}$$

$$\Delta t_{BA} = t'_{BA} - t_{BA} = \frac{t_0}{\gamma_2\left(1 + \frac{v_2}{c}\right)} - \frac{t_0}{\gamma_1\left(1 + \frac{v_1}{c}\right)} \tag{13.13}$$

Wegen

$$c = \frac{a}{t_0} \tag{13.14}$$

wird dies bei Werten von $v_1, v_2 \ll c$ zu

$$\Delta t_{AB} \cong \frac{a[v_1 - v_2]}{c^2} \tag{13.15}$$

und

$$\Delta t_{BA} \cong \frac{a[v_2 - v_1]}{c^2} \tag{13.16}$$

Der Unterschied zu der in Kap. 10.2 dargestellten Situation ist hier, dass nicht 2 unabhängige Beobachter betrachtet werden, sondern ein zusammenhängendes Labor.

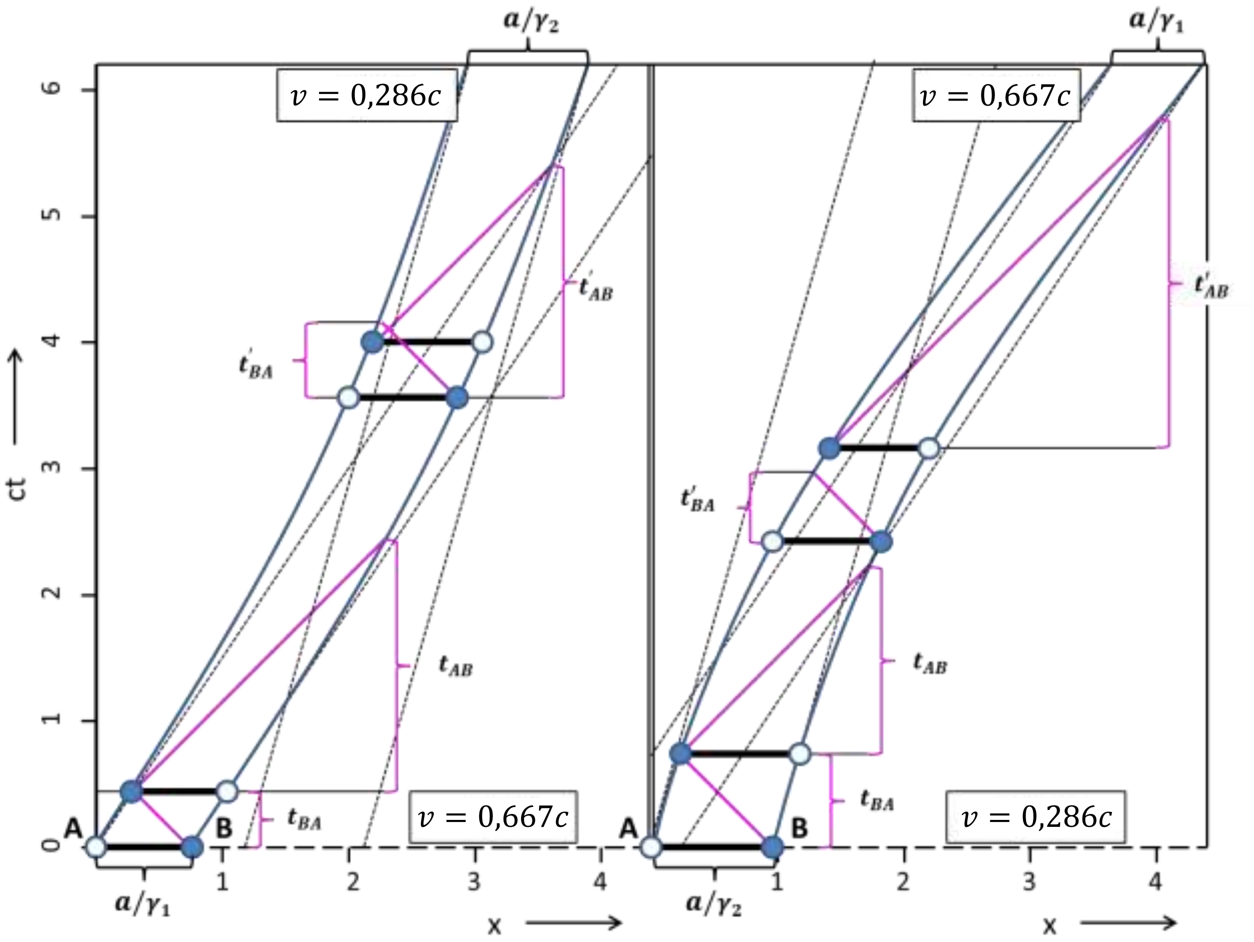


Abb. 13.4: Weg-Zeit-Diagramm für Systeme nach Geschwindigkeitsänderung
links: Abgebremstes System
rechts: Beschleunigtes System

Für das rechte Diagrammteilbild gelten die gleichen Beziehungen, nur sind γ_1 und γ_2 vertauscht. Um diese Unterschiede zu bestimmen sei ein Versuch mit folgenden Randbedingungen vorgeschlagen:

a) Versuchsaufbau

Zunächst werden 2 Uhren im Abstand a an den Stellen A und B positioniert. Beim bewegten System (vgl. Abb. 13.4) ist die Entfernung dann a/γ. Nach erfolgtem Signalaustausch zwischen den Uhren werden diese am jeweiligen Standort synchronisiert. Wichtig ist hier, dass die Signale nicht von beiden Uhren an eine Zentralstelle gesandt und dort verglichen werden, weil sich sonst – wie beim Michelson-Morley- oder dem Kennedy-Thorndike-Experiment – ein Nullresultat einstellen würde. Anschließend wird das Labor in Orientierungsrichtung der Uhren beschleunigt und dann nach Signalaustausch erneut synchronisiert. Hierbei muss sich gemäß den Grundlagen der Lorentz-Transformation eine Synchronisationsdifferenz zwischen den Zuständen vor und nach der Beschleunigung einstellen, die Δt_{BA} für die Uhr A und Δt_{AB} für Uhr B sind.

Bei einem durchzuführenden Versuch werden sinnvollerweise die Differenzen zwischen Δt_{BA} und Δt_{AB} betrachtet (hierbei ist ein Wert positiv, der andere negativ). Dies führt einerseits zu einer Verdopplung des Messergebnisses, zum anderen werden Störungen durch Veränderungen der Länge der Messapparatur (z. B. durch Temperaturschwankungen) der Größe Δt_S unterdrückt, da der Effekt einer Verringerung bzw. Erhöhung auf beide Messungen den gleichen Einfluss hat und somit bei der Differenzbetrachtung eliminiert wird. Es ergibt sich damit folgende Beziehung:

$$\Delta t \cong \Delta t_{AB} + \Delta t_S - (\Delta t_{BA} + \Delta t_S) = \frac{2a[v_1 - v_2]}{c^2} \tag{13.17}$$

Das Ergebnis hängt also nur vom Abstand der beiden Uhren sowie den Geschwindigkeiten v_1 und v_2 ab.

b) Abschätzungen zur Größe der generierbaren Messergebnisse

Die beste und genaueste Methode einer Messung wäre mit der Nutzung einer Rakete gegeben; hiermit würde der erforderliche finanzielle Aufwand jedoch sehr hoch. Auf der anderen Seite sind die realisierbaren Geschwindigkeitsunterschiede sehr groß, so dass hier normale 87Rb-Uhren mit einer Standardabweichung von $3 \cdot 10^{-12} s$, wie sie heute beim GPS-Satelliten Navigationssystem Verwendung finden, eingesetzt werden können und sehr genaue Ergebnisse liefern würden.

Bei denkbaren terrestrischen Versuchen steigen die Anforderungen an die Messtechnik erheblich. Ein solcher Versuch könnte z. B. mit Hilfe eines Flugzeugs durchgeführt werden. Eine Synchronisation am Boden und der Vergleich mit Werten nach dem Start ist dabei aber nicht sinnvoll, da Höhenunterschiede des Flugzeugs den Messeffekt verfälschen würden. Es sollten daher nach dem Start auf gleichbleibender Höhe Messungen mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten erfolgen. Dies könnten dann z. B. Unterschiede zwischen 300 km/h und 900 km/h sein. Der Versuch müsste in verschieden Richtungen relativ zur Erdrotation wiederholt werden, um ggf. auftretende Störungen (z. B. durch Sagnac-Effekt) zu eliminieren.

Wird ein Geschwindigkeitsunterschied von 600 km/h bei einer Länge des Versuchsaufbaus von 30m angenommen, so ergibt sich gemäß Gl. (13.17) ein Messwert von etwa $1{,}1 \cdot 10^{-13} s$. Ein solcher Versuch ist demnach darstellbar, da Atomuhren höchster Präzision heute Genauigkeiten von $10^{-17} s$ erreichen können. Dies ist allerdings keine einfache messtechnische Aufgabe, da zunächst geprüft werden muss ob diese Uhren eine ausreichende Stabilität bei den erforderlichen Beschleunigungen besitzen.

Alternativ ist auch die Durchführung mit der Nutzung eines Zuges oder einer Magnetbahn denkbar. Wegen der geringeren Geschwindigkeitsdifferenzen sind hier die Messeffekte zwar noch kleiner aber auch der Aufwand wird geringer. Alternativ könnte die Messapparatur in einen Container eingebaut, getestet und dann in ein Flugzeug verladen werden. Handelsübliche Container von ca. 14 m Länge würden zu einem Wert von etwa $5 \cdot 10^{-14} s$ führen, welcher mit den bereits dargestellten Einschränkungen ebenfalls noch zu einem verwertbaren Messergebnis führen würde.

Es ist an dieser Stelle der Einwand möglich, dass Versuche auf der Erde grundsätzlich zu keinen Ergebnissen führen, weil das Schwerefeld eine Auswertung unmöglich macht. Dem ist jedoch entgegenzuhalten, dass es einige wichtige Versuche mit positivem Ergebnis gegeben hat. Hier sind insbesondere die Experimente von J. C. Haefele und R. E. Keating

[81,82] zu nennen. Hierbei wurden Atomuhren in einem Flugzeug um die Erde transportiert und deren Anzeige anschließend mit Referenzuhren verglichen. Beim Flug in Drehrichtung der Erde liefen die bewegten Uhren langsamer, beim Flug entgegengesetzt dazu waren sie schneller. Die Ergebnisse stimmten gut mit den Vorhersagen der Lorentz-Gleichungen überein. Es war mit diesem Versuch also möglich, einen Ruhezustand zu bestimmen der die Drehbewegung der Erde nicht einschließt. Das gleiche ist auch bei dem hier vorgeschlagenen Versuch zu erwarten.

Falls eine terrestrische Messung nicht möglich ist, bleibt als Alternative nur die Verwendung einer Rakete.

Wenn eines dieser Experimente, am Boden in der Luft oder im Weltraum zu einem positiven Ergebnis führt, so ist der experimentelle Nachweis erbracht, dass die „Relativität der Gleichzeitigkeit“, die ein notwendiger Bestandteil der Lorentz-Transformation ist, nach einer Beschleunigung tatsächlich auftritt. Es sei hier noch einmal erwähnt, dass es sich um einen Versuch handelt, der ein messbares Resultat ergeben muss. Dies steht im Gegensatz zu den vielen anderen Versuchen, bei denen die Spezielle Relativitätstheorie ein Nullresultat voraussagt. Ein solches Experiment könnte abschließend die Gültigkeit des grundlegenden Postulats der Relativität der Gleichzeitigkeit eindeutig beweisen.

13.3 Messung der Endgeschwindigkeit beim plastischen Stoß

Wie bereits in Kap. 7.1 ausgeführt wurde, ist für das Verhalten beim plastischen Stoß eine Massenzunahme durch den Verbund anzunehmen. Trifft dies zu, so lässt sich die Endgeschwindigkeit nach dem Verbund einfach über die relativistische Geschwindigkeitsaddition berechnen. Falls dies nicht oder nur teilweise der Fall sein sollte, würde die Messung der Endgeschwindigkeit eines verbundenen Körpers nach einem plastischen Stoß hierzu neue Erkenntnisse liefern.

Um dies zu testen könnte folgender Versuch durchgeführt werden: Eine Masse m_2 wird auf eine exakt bestimmte Geschwindigkeit v_2 beschleunigt. Die Masse trifft dann auf ein ruhendes Ziel mit der Masse m_1, verbindet sich damit und die Geschwindigkeit des so entstandenen Körpers wird gemessen. Auf diese Weise ließe sich verifizieren, dass sich bei einem plastischen Stoß die potenzielle Energie des bewegten und dann abgebremsten Körpers vollständig in Masse umwandelt. Obwohl dies auf mikroskopischer Ebene klar ist, könnte makroskopisch durchaus ein Teil während des Abbremsens unmittelbar in Wärmeenergie umgewandelt und abgestrahlt werden und damit nicht zur Reduktion der Geschwindigkeit beitragen; dies würde dann zu einer Verletzung der Relativitätskriterien führen und wäre auf diese Weise messbar.

<u>Beispiel:</u>

Es wird eine beliebige Masse m_1 betrachtet, die sich in Ruhe befindet ($v_1 = 0$), eine gleich große Masse (d. h. $m_2 = m_1$) trifft darauf mit der Geschwindigkeit v_2 auf, verbindet sich mit dieser und der Verbund bewegt sich mit der Geschwindigkeit v_3 weiter. Gemäß den Darstellungen in Kap. 7.1 lassen sich nun hieraus Werte für die unterschiedlichen Konzepte berechnen.

a) Nicht relativistisch

Die Beziehung ergibt sich direkt aus der Galilei-Transformation

$$v_3 = \frac{v_2}{2} \tag{13.20}$$

b) Relativistisch

Hierzu ist die Umformung einer Beziehung analog Gl. (7.04) erforderlich und es folgt

$$v_2 = \frac{2v_{3\mathrm{R}}}{1 + \left(\frac{v_{3R}}{c}\right)^2} \tag{13.21}$$

Über

$$v_{3R}^2 - \frac{2v_{3R}c^2}{v_2} = -c^2 \tag{13.22}$$

folgt

$$\frac{v_{3R}}{c} = \frac{c}{v_2} - \sqrt{\frac{c^2}{v_2^2} - 1} \tag{13.23}$$

Eine Bewertung der Gleichung ergibt, dass positive Vorzeichen der Wurzel aus Plausibilitätsgründen nicht zulässig sind, da sie zu Ergebnissen von $v_{3R} > c$ führen. Wird der Wurzel-Ausdruck in Gleichung (13.23) in eine Taylorreihe entwickelt (für $v_2 \to 0$) so ergibt sich

$$\sqrt{\frac{c^2}{v_2^2} - 1} = \frac{c}{v_2} - \frac{v_2}{2c} - \frac{v_2^3}{8c^3} - \cdots \tag{13.24}$$

sowie Werte höherer Ordnung, die vernachlässigt werden können. Gl. (13.23) erhält somit die Form

$$\frac{v_{3R}}{c} = \frac{c}{v_2} - \sqrt{\frac{c^2}{v_2^2} - 1} \cong \frac{v_2}{2c} + \frac{v_2^3}{8c^3} \tag{13.25}$$

In der Tabelle 13.2 sind Werte für Auftreffgeschwindigkeiten von 1 bis 100.000 km/s berechnet. Zur besseren Vergleichbarkeit sind nur die Differenzen zum nicht relativistischen Ergebnis Δv gemäß Gl. (13.26) eingetragen. Der Wert für Δv ist dabei stets positiv, d.h. die Berechnung von v_{3R} führt immer zu einem höheren Ergebnis als v_3.

$$\Delta v = v_{3R} - v_3 \tag{13.26}$$

v_2	1	10	100	1000	10.000	100.000
Δv	1,391 10^{-12}	1,391 10^{-9}	1,391 10^{-6}	1,391 10^{-3}	1,392	1,474 10^{3}

Tab. 13.2: Berechnung von Differenzen der Endgeschwindigkeiten beim plastischen Stoß. Ausgangwert: Galilei-Transformation Gl. (13.20). Angaben in km/s.

Die Werte für die relativistischen Geschwindigkeiten $v_2 \geq 1000$ km/s wurden mit der Ursprungsgleichung Gl. (13.23) berechnet. Für kleinere Werte ist die Genauigkeit üblicher Rechner mit 15 Stellen nicht mehr ausreichend und es muss zu Gl. (13.25) übergegangen werden. Diese Gleichung ist aber bei höheren Geschwindigkeiten von ca. 10.000 km/s durch Glieder höherer Ordnung zu ergänzen, so dass hier eine Kombination aus Ergebnissen der beiden Gleichungen gewählt wurde.

Zur Durchführung eines solchen Versuches wäre es sinnvoll, den bewegten Körper als massives kompaktes Teil zu wählen, z. B. als Kugel. Für die nicht bewegte Masse wäre sinnvollerweise eine Ausbildung als plastischer Ring vorzusehen. Der Ring sollte einen Innendurchmesser haben, der etwas kleiner als die Kugel ist. Eine solche Konzeption würde es ermöglichen, Präzisionsmessungen der Geschwindigkeit an der Kugeloberfläche vorzunehmen und Probleme mit der Ausgestaltung des verbundenen Körpers zu vermeiden, die sich bei der Verwendung einer Platte oder einer verformbaren Folie, die sich beim Versuch um die Kugel schließt, auftreten würden. Aufgrund der geringen Effekte müssten die Versuche im Vakuum durchgeführt werden.

Bei der Betrachtung der zu erwartenden Ergebnisse wird deutlich, dass sich mit steigender Geschwindigkeit mit jeder Zehnerpotenz der Messeffekt um 3 Zehnerpotenzen vergrößert (mit anderen Worten: Faktor 10 bei der Geschwindigkeit ergibt Faktor 1000 beim Messeffekt); daher ist die Wahl einer möglichst hohen Geschwindigkeit wünschenswert. Andererseits steigen mit höherer Geschwindigkeit die Ansprüche an die Versuchsdurchführung, so dass hier ein Kompromiss gefunden werden muss. Wird zum Beispiel der Wert von 1 km/s gewählt, welcher in etwa der Geschwindigkeit einer Gewehrpatrone entspricht, so sind gemäß den durchgeführten Berechnungen Abweichungen bei den Geschwindigkeiten in der Größenordnung von 10^{-9} s pro Meter Messlänge zu erwarten; dies müsste mit einem geeigneten Versuchsaufbau zu detektieren sein.

Die Versuche müssten durch ein genaues Monitoring begleitet werden. So ist z. B. zu erwarten, dass aufgrund der hohen Materialbelastungen sowohl bei der Beschleunigung der Kugel als auch während der Abbremsung durch die Zielmasse Schwingungen auftreten, die einen Messeffekt verfälschen oder ganz überlagern könnten. Möglicherweise ist in einem solchen Fall die Verwendung von Verbundwerkstoffen mit Verwendung eines weichen Innenkerns sinnvoll. Dieser Versuch sollte in verschiedenen Raumrichtungen wiederholt werden. Obwohl wie in Kap. 7.1 bereits ausgeführt ein Ergebnis abweichend vom Fall der relativistischen Geschwindigkeitsaddition unwahrscheinlich ist, stellt dieser Versuch eine Ergänzung dar und schafft Klarheit bezüglich der zu erwartenden Massenerhöhung beim nicht elastischen Stoß auf makroskopischer Ebene.

Abschließend stellt sich die grundsätzliche Frage, warum ein Versuch durchgeführt werden sollte, wenn nach theoretischen Betrachtungen das Ergebnis eindeutig bestimmbar ist. Wie aber bereits in Kapitel 11.3 beschrieben wurde, werden seit Jahren große Anstrengungen gemacht, um den Nachweis für eine Verletzung der Lorentz-Invarianz zu finden und damit die theoretische Basis zu erweitern. Ein solcher Versuch würde somit die Palette der Möglichkeiten ergänzen.

14. Abschließende Bewertung der SRT

Zum Abschluss der dargestellten Untersuchungen werden in kurzer Form die verschiedenen in der Literatur verfügbaren Präsentationen der Speziellen Relativitätstheorie (SRT) diskutiert und bewertet. Dazu werden zunächst die Angaben für das „Relativitätsprinzip" und die „Konstanz der Lichtgeschwindigkeit" auf ihre Formulierung untersucht. Um die auftretende Bandbreite abzubilden, wurden die möglichen Darstellungen in „Objektives Beobachtungskriterium" und „Axiom" aufgeteilt. Bei den neueren Publikationen wird meistens der axiomatische Ansatz gewählt. Die früheren Ansätze, z. B. von Einstein, sind dagegen einer objektiven Betrachtungsweise zuzuordnen.

Die heute übliche Interpretation der SRT beinhaltet den Aspekt, dass es kein System absoluter Ruhe geben kann. Es werden die diesbezüglich in der Literatur verwendeten Argumentationsketten zitiert und bewertet. Es zeigt sich, dass keiner dieser Ansätze einen allgemein gültigen Beweis liefern kann.

Einstein hat zur Formulierung der SRT einen Top-down-Ansatz gewählt. Dazu wurden Relativitätsprinzip und konstante Lichtgeschwindigkeit als Grundlagen definiert und daraus die Lorentz-Transformation und später auch der relativistische Massenanstieg abgeleitet. Es wird nunmehr hier mit der „erweiterten Lorentz-Theorie" ein Bottom-up Konzept vorgestellt, bei dem sich dann das Relativitätsprinzip als Resultat ergibt; die Gültigkeit wurde anhand einer Vielzahl von Beispielen belegt.

Bei freier Wahl des Basis-Systems sind beide Ansätze vollständig äquivalent. Die Spezielle Relativitätstheorie hat jedoch den Nachteil, dass sie das Vorhandensein eines Systems absoluter Ruhe prinzipiell ausschließt, was aber beim erweiterten Lorentz-Ansatz durch einfache Wahl des Basissystems problemlos integrierbar ist. Aus heutiger Sicht erscheint es sinnvoll, das System zugrunde zu legen, welches die Basis für die gleichmäßige kosmischen Hintergrundstrahlung ist. Da bis heute aber kein experimenteller Nachweis gelungen ist, kann eine Entscheidung derzeit nicht getroffen werden. Es wurde im Rahmen dieser Ausarbeitung ein Vorschlag gemacht, wie ein Versuch ausgestaltet werden könnte, der eine eindeutige Entscheidung bezüglich der unterschiedlichen Ansätze ermöglicht (Kap.13.1).

14.1 Prinzipien der SRT und ihre Darstellung in der Literatur

Es ist überraschend, dass es bis heute keine einheitliche Formulierung der beiden zentralen Voraussetzungen „Relativitätsprinzip" und „Konstanz der Lichtgeschwindigkeit" gibt. Jeder

Autor einer Publikation über die SRT wählt hierzu seinen eigenen Ansatz (in Einzelfällen wird ganz auf eine Darstellung verzichtet und kommentarlos die Lorentz-Gleichungen benutzt [89]). Um die auftretende Bandbreite abzubilden, wurden die möglichen Darstellungen in „Objektives Beobachtungskriterium“ und „Axiom“ aufgeteilt (Tab. 14.1). Bei neueren Publikationen wird eher (aber nicht ausschließlich) der axiomatische Ansatz gewählt.

Objektives Beobachtungskriterium	**Axiom der Relativitätstheorie**
1. Die Durchführung von beliebigen physikalischen Versuchen führt in allen Inertialsystemen zu den gleichen Ergebnissen.	1. Relativitätsprinzip: Alle Inertialsysteme sind äquivalent.
2. Messungen der Lichtgeschwindigkeit in verschiedenen Raumrichtungen führen in allen Inertialsystemen zum gleichen Ergebnis.	2. Konstanz der Lichtgeschwindigkeit: Die Geschwindigkeit des Lichts in verschiedenen Raumrichtungen ist in allen Inertialsystemen gleich.

Tab. 14.1: Derzeit übliche Darstellungen der Grundlagen der Speziellen Relativitätstheorie

Um die Unterschiede zu zeigen seien einzelne Beispiele aufgeführt. Das Relativitätsprinzip wird in seiner ursprünglichen Form von Einstein folgendermaßen definiert [12]:

> „Relativitätsprinzip: Die Gesetze, nach denen sich die Zustände der physikalischen Systeme ändern, sind unabhängig davon, auf welches von zwei relativ zueinander in gleichförmiger Translationsbewegung befindlichen Koordinatensystemen diese Zustandsänderungen bezogen werden.“

Hierbei handelt es sich also um eine Formulierung, die einem objektiven Beobachtungskriterium zuzuordnen ist. Einige andere Autoren nutzen ebenfalls den Verweis auf Messungen, wobei die Darstellung auch völlig anders erfolgen kann [27]:

> „Postulat I: Es ist unmöglich, die nicht beschleunigte Translationsbewegung eines Systems durch den leeren Raum oder bei der Durchdringung eines angenommenen beliebigen Äther-ähnlichen Mediums zu messen oder zu detektieren.“

Anders ist dies bei der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit. Hier gibt es nur wenige Fälle mit dem Verweis auf Messungen, wie z. B. Born mit folgender Formulierung [26]:

> „Das Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit: In allen Inertialsystemen hat die Lichtgeschwindigkeit, mit physikalisch gleichartigen Stäben und Uhren gemessen, denselben Wert.“

In nahezu allen anderen Fällen wird der Bezug zu Messmethoden nicht erwähnt und es wird die Form als Axiom genutzt. Einstein selbst nutzte eine kompliziertere Darstellung, die zwar ein Messverfahren beschreibt, aber eine eindeutige Zuordnung erschwert [12]:

> „Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit: Jeder Lichtstrahl bewegt sich im „ruhenden“ Koordinatensystem mit einer bestimmten Geschwindigkeit *V*, unabhängig

davon, ob dieser Lichtstrahl von einem ruhenden oder bewegten Körper emittiert ist. Hierbei ist

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Lichtweg}}{\text{Zeitdauer}}$$

wobei „Zeitdauer" im Sinne der Definition des § 1 aufzufassen ist."

Vereinfacht lässt sich die Gesamtsituation so darstellen:

- Objektive Beobachtung: Es lässt sich kein Unterschied feststellen. Der Sachverhalt ist durch Versuche abgesichert.
- Axiom: Es gibt prinzipiell keinen Unterschied.

Die mit diesen Darstellungen verbundenen Interpretationen sind in der Folge bedeutsam und werden daher ausführlich bewertet. Dabei wird mit der Diskussion zur Konstanz der Lichtgeschwindigkeit begonnen.

14.2 Konstante Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen

Zunächst sollen die Möglichkeiten zur Messung der Lichtgeschwindigkeit prinzipiell dargestellt und bewertet werden (Tab. 14.2). Es gibt grundsätzlich die Unterscheidung zwischen direkten und indirekten Verfahren. Während bei den direkten Verfahren ein konkreter Messwert anfällt, können mit den indirekten Verfahren nur eventuell vorhandene Unterschiede in verschiedenen Raumrichtungen festgestellt werden.

1. **Direkt** **Nutzung von Zeitmessungen**	2. **Indirekt** **Schwingungsvergleich**
1a) Messungen mit Lichtimpulsen Messen der Zeitdifferenz am Sender/Empfänger zwischen Aussenden und Empfang eines Signals (nach Reflektion am Spiegel).	**2a) Frequenzmessungen** Vergleich der Frequenz am Sender/Empfänger zwischen Ausgangs- und Eingangssignal (nach Reflektion am Spiegel).
1b) Messungen mit bewegten Uhren Zwei oder mehrere Uhren werden synchronisiert. Nach dem Transport an definierte Referenzpunkte werden Signale ausgetauscht und die Zeiten gemessen.	**2b) Oszillationsmessungen** Vergleich der Lichtsignale zwischen Sender und Referenzobjekt bezüglich Anzahl der Oszillationen auf dem Hin- und Rückweg (nach Reflektion am Spiegel).

Tab. 14.2: Möglichkeiten für Messungen der Lichtgeschwindigkeit

Bei den direkten Verfahren ist es wichtig, dass der Abstand zwischen dem Sender eines Lichtimpulses und dem Referenzobjekt genau bekannt ist. Dabei spielt es keine Rolle, ob das Referenzobjekt bezüglich des Senders bewegt ist oder nicht. Es gibt als erstes die Möglichkeit zur Messung der Zeitdifferenz zwischen Aussenden und Empfang eines Lichtsignals nach Reflexion an einem Spiegel (1a). Weiterhin können Uhren synchronisiert und an definierte Referenzpunkte gebracht werden, anschließend werden dann Signale ausgetauscht und Messungen durchgeführt (1b). Der Nachteil dieses Verfahrens ist aber, dass bei der Auswertung berücksichtigt werden muss, dass die Uhren während der Bewegung einer Zeitdilatation unterliegen.

Bei den indirekten Verfahren können nur eventuell vorhandene Differenzen zwischen den Lichtgeschwindigkeiten in verschiedenen Raumrichtungen bestimmt werden. Die Entfernung zu einem Referenzobjekt kann dabei unbekannt sein, muss aber während der Messung konstant bleiben. Zunächst ist der Vergleich der Frequenzen zwischen ein- uns ausgehenden Signalen möglich (2a). Des Weiteren wurden in der Vergangenheit vielfach Oszillationsmessungen durchgeführt, wobei die Anzahl der Oszillationen auf dem Hin- und Rückweg zu einem Spiegel verglichen wird (2b). Hierbei ist die Nutzung von Interferenzmessungen besonders geeignet, wie zum Beispiel beim Michelson-Morley-Versuch.

Die Verfahren wurden alle im Rahmen dieser Ausarbeitung untersucht, und zwar 1a) in Kap. 2, dann 1b) in Kap. 5 sowie 2a) und 2b) in Kap. 8. Wichtig für die Interpretation von Versuchen des Typs 2b) ist, dass hierbei die Phasengeschwindigkeit des Lichts zur Auswertung herangezogen werden muss. Dies wurde in der Vergangenheit nicht in ausreichender Weise durchgeführt, so dass bei einer Neu-Interpretationen des Michelson-Morley- sowie des Kennedy Thorndike-Versuchs unter Berücksichtigung dieses Effekts neue und konsistente Ergebnisse sichtbar wurden. Wird dieser Effekt nicht berücksichtigt kommt es zu falschen Schlussfolgerungen.

Im Folgenden wird ein weiterer wichtiger Aspekt zum Thema Lichtgeschwindigkeit behandelt. Die Aussage: „Die Lichtgeschwindigkeit ist in allen Inertialsystemen gleich“ muss sorgfältig betrachtet und interpretiert werden. Gleiche Lichtgeschwindigkeit bedeutet:

In jedem Inertialsystem kann die Lichtgeschwindigkeit so gewählt werden, dass das eigene System als Basis dient. Alle Bedingungen der Relativitätstheorie gelten dann uneingeschränkt. Die folgende Beziehung wurde von Einstein für einen von ihm als „ruhend“ bezeichneten Ursprung, bezogen auf ein beliebig bewegtes anderes System definiert [12a]:

$$\frac{1}{2}(\tau_0 + \tau_2) = \tau_1 \tag{3.60}$$

Diese heute auch als der Einstein-Synchronisation bezeichnete Bedingung bedeutet, dass die Zeiten bei einem Signalaustausch zwischen zwei Punkten für Hin- und Rückweg genau zur Hälfte aufgeteilt sind (zu Details vgl. Kap. 3.4 und 12.2). Diese Aussage ist unabhängig davon, ob das Referenzobjekt bezüglich des Ursprungs ruht oder sich in Bewegung befindet. Zusammen mit der Aussage, dass die Lichtgeschwindigkeit in allen Richtungen konstant ist, müssen auch die Distanzen gleich sein.

Anders sieht die Sache aus, wenn das signalaussendende Objekt sich bewegt. Es sei der einfache Fall betrachtet, dass der Sender des Signals und das Referenzobjekt die gleiche Geschwindigkeit aufweisen. Auch hier ist es möglich, dass die Lichtgeschwindigkeit des Ursprungs als ruhend aufgefasst werden kann und die gleichen Bedingungen gelten wie bereits abgeleitet. Die gleiche Vorgehensweise ist für einen Signalaustausch ebenfalls für jedes beliebige andere System aus dessen subjektiver Sicht möglich.

Betrachten aber mehrere Versuchsteilnehmer aus verschieden gegeneinander bewegten Inertialsystemen das *gleiche* Ereignis, z. B. den Signalaustausch zwischen verschiedenen räumlich getrennten Punkten, so muss es zu unterschiedlichen Beobachtungen kommen.

Wird für Messungen jeweils die Lichtgeschwindigkeit des eigenen Systems zugrunde gelegt und werden die für den Signalaustausch erforderlichen Zeiten und Distanzen für Hin- und Rückweg ermittelt, so kommen sie zu unterschiedlichen Ergebnissen. Weg und Zeit sind *nicht* symmetrisch aufgeteilt. Dieser Effekt wird durch die „Relativität der Gleichzeitigkeit" verursacht.

Dieser Sachverhalt wurde bereits in Kap. 12.2 ausführlich dargestellt. An dieser Stelle soll zusätzlich gezeigt werden, dass die aus diesem Schaubild entnommenen Daten exakt den Ergebnissen der Lorentz-Transformation entsprechen. Dazu ist zunächst in Abb. 14.1 die linke Seite der Abb. 12.3 erneut dargestellt, die den korrekten Signalverlauf aus Sicht des bewegten Systems S zeigt.

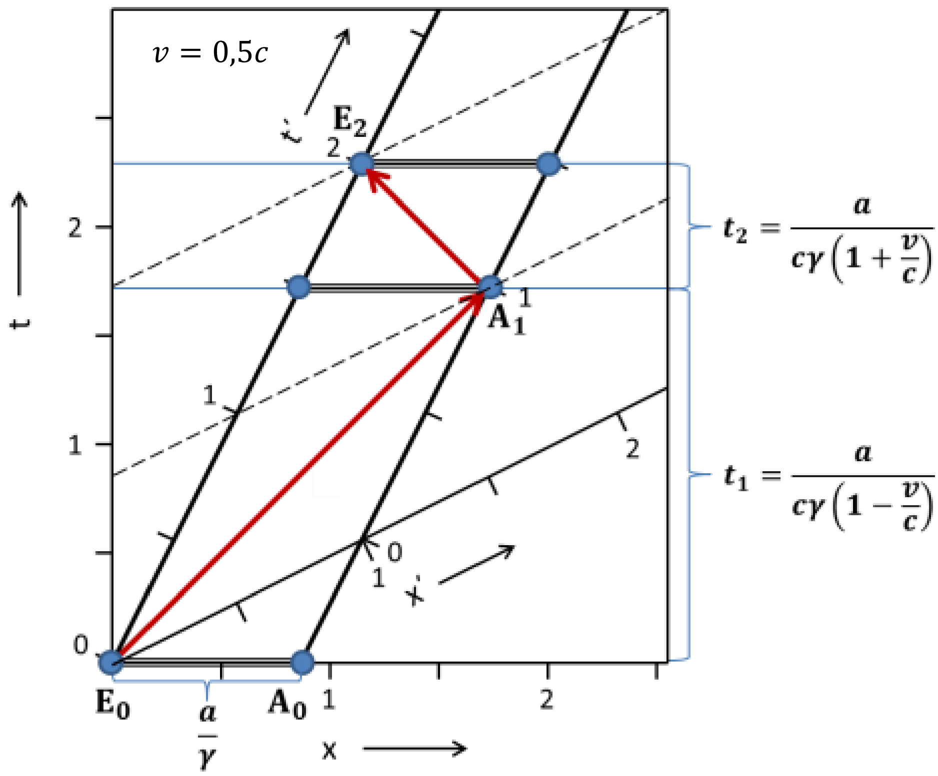


Abb. 14.1: Schematische Darstellung des Signalverlaufs in einem Labor L zwischen E und A aus Sicht eines relativ dazu bewegten Inertialsystems S ($v = 0{,}5c$)

	x	t	x'	t'
E_0	0	0	0	0
A_1	1,73205081	1,73205081	1	1
E_2	1,15470054	2,30940108	0	2

Tab. 14.3: Bestimmung der Koordinaten von E_0, A_1 und E_2 aus Abb. 14.1
Die Werte von x' und t' wurden mit den Lorentz-Gleichungen berechnet.

In Tab. 14.3 sind die aus Abb. 14.1 entnommenen Koordinaten für Weg und Zeit zusammengestellt. Dabei wurden die subjektiv für das bewegte System geltenden Werte unter Nutzung der Lorentz-Gleichungen berechnet. Es ist unmittelbar erkennbar, dass in dieser normierten Darstellung der Wert der Lichtgeschwindigkeit in allen Fällen c ist; für das Referenzsystem ergibt sich dies sofort aus der Lage des Signalverlaufs im Diagramm (45° zu x und t), für x' und t' aus den Relationen zwischen Weg und Zeit.

Zusammenfassend gilt also folgendes: Wird das gleiche Ereignis aus verschiedenen Inertialsystemen heraus betrachtet, führt dies subjektiv zu der Situation, dass in allen Fällen die Definition der eigenen Lichtgeschwindigkeit als Grundlage möglich ist. Der Zusammenhang zwischen den Systemen ist gegeben durch die Lorentz-Gleichungen, außerdem gilt hier das Prinzip der Relativität der Gleichzeitigkeit.

14.3 Relativitätsprinzip

Zum besseren Verständnis für die Besonderheiten dieses Punktes ist es sinnvoll, zunächst die historische Entwicklung zu betrachten. Hierbei ist als Erstes die bis in 20. Jahrhundert andauernde Überzeugung zu erwähnen, dass das Licht wegen der im zugeschrieben Welleneigenschaften ein Trägermedium zur Ausbreitung benötigt, das als „Äther“ bezeichnet wurde. Dies war Jahrhunderte lang allgemeiner Konsens, wobei es jedoch große Unterschiede in der Auffassung über die Struktur dieses Äthers gab.

Bis zur Durchführung des Michelson-Morley Versuchs im Jahre 1887 bestand die Vorstellung, dass dieser Äther alles durchdringt und in seinen Eigenschaften Ähnlichkeiten mit Luft und hierin transportierten Schallwellen aufweist. Aus verschiedenen Versuchsergebnissen abgeleitet gab es aber unterschiedliche Auffassungen darüber, ob der Äther von Materie beeinflusst wird und vollständig, teilweise oder gar nicht mitgeführt wird. (Weitere Details sind einer Zusammenstellung im Kap. 1.3 zu entnehmen).

Es bestand aber allgemein die Auffassung, dass bei der Durchquerung des Äthers ein Effekt durch einen auftretenden „Ätherwind“ entstehen müsse. Auf Basis dieser Überlegungen wurde das Michelson-Morley-Experiment durchgeführt, das jedoch ein Nullresultat ergab. Dieses Ergebnis führte zu einer Vielzahl von Überlegungen, die aber über fast zwei Jahrzehnte hinweg keine verwertbaren Erkenntnisse brachten. Es wird berichtet, dass Lord Kelvin sich während des internationalen physikalischen Kongresses in Paris 1900 zum Thema “Äther” geäußert hat. Er sagte damals: „The only cloud in the clear sky of the theory was the null result of the Michelson-Morley experiment“ [49h]. Er wie auch viele andere Physiker seiner Zeit waren der Meinung, dass das Experiment mit höherer Genauigkeit wiederholt werden sollte und dann das erwartet positive Ergebnis bringen würde; keiner dieser Versuche war jedoch erfolgreich.

Eine erste Lösung zeigte sich, als von Hendrik A. Lorentz die später nach ihm benannten Gleichungen entwickelt wurden, die eine widerspruchsfreie Berechnung der Zusammenhänge erlaubten. Kernpunkt war hierbei die Einführung von unterschiedlichen Ortszeiten und ein Effekt, der später von Einstein als „Relativität der Gleichzeitigkeit“ bezeichnet wurde. Wesentlich war bei der Entwicklung, dass diese Beziehungen einen ähnlichen Aufbau aufwiesen wie die zuvor entwickelten Maxwell-Gleichungen für den Elektromagnetismus. Lorentz war der Überzeugung, dass der weiterhin von ihm für erforderlich gehaltene Äther diese Eigenschaften aufweisen müsse.

Erst Einstein revolutionierte die Sicht auf dieses Problem, in dem er im Jahr 1905 zunächst zeigte, dass Lichtausbreitung kein Medium benötigt, sondern als Aussendung von

„diskontinuierlichen Energiequanten“ aufgefasst werden kann [48]. Bis dahin hatte es die Vorstellung von deren Existenz nicht gegeben, sondern es stand ausschließlich die Wellennatur des Lichts und damit verbunden die Existenz eines Transportmediums im Fokus. Mit diesem Ansatz konnte Einstein die Grundlagen der von ihm vorgelegten Theorie auf die beiden bereits dargestellten Prinzipien reduzieren. Der für die Physik heute selbstverständliche Dualismus zwischen Korpuskel und Welle war zu diesem Zeitpunkt noch nicht bekannt und wurde erstmals im Jahre 1924 von Louis de Broglie formuliert.

Das von Einstein formulierte Relativitätsprinzip erfordert ebenfalls eine genaue Interpretation. Zunächst kann dies in folgende Detailaussagen aufgeteilt werden:

a) Werden von verschiedenen Beobachtern in zueinander gleichförmig bewegten Bezugssystemen identische Versuche durchgeführt, so führen diese zu den gleichen Ergebnissen.
b) Ein Beobachter kann Messergebnisse von stattfindenden Versuchen in einem gleichförmig zu ihm bewegten Bezugssystem mit den von Lorentz formulierten Transformationsgleichungen und der relativistischen Massenzunahme widerspruchsfrei beschreiben. Insbesondere ist die Beobachtung der zeitlichen Abfolge von Ereignissen in allen Fällen gleich.
c) Alle zueinander gleichförmig bewegten Systeme sind gleichwertig und es existiert kein absolutes „Ruhesystem“.

Die Aussage in Punkt a) kann abkürzend als „Identitätsprinzip“, in Punkt b) als „Äquivalenzprinzip“ und in Punkt c) als „Prinzip der völligen Gleichwertigkeit von Inertialsystemen“ bezeichnet werden. Während die Punkte a) und b) durch vielfache Versuchsergebnisse abgesichert sind, muss dies für den Punkt c) differenziert betrachtet werden. Dies soll im Folgenden durchgeführt werden. Aus der Literatur sind verschiedene Argumentationen bekannt, die die Aussage des Punktes c) stützen, und zwar:

1. Die Ergebnisse des Michelson-Morley-Versuchs zeigen, dass es kein System absoluter Ruhe geben kann.

Deutlich wird dies z.B. bei der Formulierung von Kneubühl [46c] mit der Bewertung des Michelson-Morley Experiments:

> „Die Galilei-Transformation gilt nicht für das Licht! Das Konzept des „ruhenden“ Weltalls ist nicht haltbar.“

Während der erste Satz ohne Zweifel gültig ist (es gelten wie bekannt die Lorentz-Transformationen) kann daraus die Schlussfolgerung im zweiten Satz nicht abgeleitet werden. Wird das Prinzip der Konstanz der Phasengeschwindigkeit des Lichts zugrunde gelegt, ist die Integration eines Systems absoluter Ruhe ohne Widersprüche möglich, wie dies bereits in Kap. 8 ausführlich dargestellt wurde. Das Michelson-Morley-Experiment liefert daher entgegen der Auffassung des Autors keinen Beweis für diese These.

Es existiert darüber hinaus ein weiteres Argument:

2. Was nicht messbar ist, existiert auch nicht.

Diese Ansicht wird z. B. von Born [26c] vertreten. Die von ihm verwendete Formulierung lautet:

> „Wenn von zwei relativ zueinander bewegten Beobachtern jeder das gleiche Recht hat zu sagen, er ruhe im Äther, so kann es keinen Äther geben."

Der Ätherbegriff ist hier als Synonym für ein System absoluter Ruhe zu verstehen, dessen Existenz aufgrund der vorliegenden Erkenntnisse vollständig zurückgewiesen wird. Einstein selbst hat im Jahre 1920 zum Thema Äther und Relativitätstheorie in seiner Antrittsrede als Gastprofessor in Leiden folgendes gesagt (wobei es sich bei den von ihm angesprochenen Systemen K und K1 um unterschiedlich zueinander bewegte Inertialsysteme handelt) [86]:

> „Es entsteht nun die bange Frage: Warum soll ich das System K, welchem die Systeme K1 physikalisch vollkommen gleichwertig sind, in der Theorie vor letzterem durch die Annahme auszeichnen, daß der Äther relativ zu ihm ruhe? Eine solche Asymmetrie des theoretischen Gebäudes, dem keine Asymmetrie des Systems der Erfahrungen entspricht, ist für den Theoretiker unerträglich. Es scheint mir die physikalische Gleichwertigkeit von K und K1 mit der Annahme, daß der Äther relativ zu K ruhe, relativ zu K1 aber bewegt sei, zwar nicht vom logischen Standpunkte geradezu unrichtig, aber doch unannehmbar."

Der Ätherbegriff wird von ihm nicht vollständig abgelehnt. In seinen weiteren Ausführungen weist er sogar darauf hin, dass dieser für die Allgemeine Relativitätstheorie erforderlich ist; er spricht ihm aber ab die Eigenschaft ab, ein System absoluter Ruhe zu sein und ist hier der Meinung, dass der Äther für jedes Inertialsystem existieren muss.

Aus dieser Darstellung wird ein weiteres Argument erkennbar, dass sich folgendermaßen formulieren lässt:

3. Die Relativitätstheorie ist gemäß „Ockhams Prinzip" der Äthertheorie vorzuziehen.

„Ockhams Prinzip" ist die grundsätzliche Betrachtungsweise eines Problems und ist benannt nach William von Ockham (1287-1347) und betrifft das „Gesetz der Sparsamkeit" ("law of parsimony"). In Kurzform beschreibt dieses ein Problemlösungsverfahren, wonach beim Vorliegen von mehreren möglichen Erklärungen stets die einfachste Theorie allen anderen vorzuziehen ist. Die einfachste Theorie hat dabei die wenigsten Variablen und Hypothesen. Die Anwendung dieses Prinzips wird auch „Ockhams Rasiermesser" genannt, weil es alles Überflüssige abschneidet und nur eine einzige hinreichende Erklärung zulässt.

Vergleicht man die Theorien auf dieser grundsätzlichen Basis miteinander, so enthält die Relativitätstheorie 2 Grundannahmen, die Äthertheorie benötigt dagegen mit der Voraussetzung eines absoluten Ruhezustands (der sich derzeit nicht experimentell nachweisen lässt) eine weitere. Gemäß dem allgemeinen Ansatz, dass eine Theorie auf möglichst wenigen Annahmen beruhen sollte, ist demnach die Spezielle Relativitätstheorie vorzuziehen.

Das Thema Äther versus Relativitätsprinzip war zum Anfang des 20. Jahrhunderts Gegenstand langer und kontroverser Diskussionen. Insbesondere wegen der hier dargestellten Überlegungen wurde die Kontroverse eindeutig zugunsten der speziellen Relativitätstheorie entschieden und es gab viele Jahrzehnte keine ernstzunehmenden Einwände dagegen.

Dies änderte sich erst in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts mit der Entdeckung der gleichmäßigen kosmischen Hintergrundstrahlung. Unser Sonnensystem bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 369,1 km/s relativ hierzu. Dabei liegt der maximale Messfehler derzeit bei 0,9 km/s, d. h. weniger als 0,25%. Es wurden verschiedene Ansätze entwickelt, um dieses Messergebnis mit der Speziellen Relativitätstheorie in Einklang zu bringen. Diese waren jedoch alle mit der Überlegung verbunden, die „Relativität der Gleichzeitigkeit“ aufzuheben und auf dieser Basis einen absolut ruhenden Grundzustand einzuführen. Keiner der Ansätze war jedoch erfolgreich und es traten stets Widersprüche zu experimentellen Befunden auf. Kennzeichnend für alle formulierten Theorien war dabei, dass das einfache Konzept der unveränderlichen Phasengeschwindigkeit des Lichts keinen Eingang in die Überlegungen gefunden hatte und demzufolge die nachfolgenden Interpretationen nicht zielführend sein konnten.

Die Spezielle Relativitätstheorie sagt bisher nichts über die kosmische Hintergrundstrahlung aus. Wird dieses Phänomen mit betrachtet, so muss hierbei die Tatsache ergänzt werden, dass ein bisher nicht näher bestimmter Zusammenhang zur gleichmäßigen Ausrichtung dieser Strahlung geführt hat. Hierbei ist die Auffassung einer zufälligen Gegebenheit möglich; diese Theorie wird in z. B von Johann Rafelski in „Relativity Matters“ (2017) vertreten. Dabei wird der kosmischen Hintergrundstrahlung der Status eines auftretenden „Leuchtfeuers“ (‘beacon‘) zugeschrieben, auf den man sich beziehen kann [93].

Werden nun die beiden in Konkurrenz stehenden Theorien erneut verglichen, so wird klar, dass Ockhams Prinzip hier wegen der gleichen Anzahl von grundlegenden Annahmen nicht mehr greifen kann, da die SRT durch das Auftreten der kosmischen Hintergrundstrahlung eine zusätzliche Hypothese benötigt. Dies ist bei der Äthertheorie nicht erforderlich. Es ist also auf Basis dieser Überlegungen keine Entscheidung möglich, welche der Theorien vorzuziehen ist. Klarheit könnte nur ein eindeutiger Versuch schaffen.

Wie bereits erwähnt, wurde in dieser Zusammenstellung der grundlegende Ansatz angewendet, dass alle Phänomene aus der Sicht eines ruhenden und eines bewegten Beobachters betrachtet werden. Keine der durchgeführten Berechnungen hat jedoch einen Unterschied gezeigt. Dabei handelt es sich um folgende Themen, zu denen das jeweils relevante Kapitel in dieser Ausarbeitung angegeben ist:

→ Austausch von Signalimpulsen zwischen punktförmigen Körpern (2.1)
→ Austausch von Signalimpulsen innerhalb von bewegten Körpern (2.2)
→ Winkelbeziehungen beim Austausch von Signalimpulsen (2.3)
→ Signalaustausch in beliebigen Raumrichtungen (2.4)
→ Experimente mit Licht in transparenten bewegten Medien (4.2)
→ Ansteuerung von Aggregaten nach Synchronisation (4.3)
→ Signalaustausch zwischen räumlich ausgedehnten Körpern (4.4)
→ Uhrentransport (5.1)
→ Zwillingsparadoxon (5.2)
→ Relativistische Massenzunahme und Energie (6.1)
→ Federparadoxon (6.2)
→ Relativistischer elastischer Stoß (6.3)
→ Signalaustausch bei Systemen mit konstanter Beschleunigung (6.4.1)
→ Relativistische Raketengleichung (6.4.2)
→ Relativistischer nicht elastischer Stoß (7.1)

→ Teilchenzerfall in 2 Partikel (7.2.1)
→ Teilchenzerfall in 2 Photonen (7.2.2)
→ Konstanz der Phasengeschwindigkeit des Lichts beim Übergang zwischen verschiedenen Inertialsystemen (8.)

Zusammengefasst gibt es also nur einen Grund, die Spezielle Relativitätstheorie dem Ansatz von Lorentz vorzuziehen. Dabei handelt es sich um die Tatsache, dass die SRT generell alle denkbaren physikalischen Experimente umfasst, während die reine Lorentz-Transformation nur den Signalaustausch zwischen verschiedenen Inertialsystemen beschreibt. Um eine allgemeine Gültigkeit zu gewährleisten, muss demnach eine Ergänzung vorgenommen werden, welche durch den Ansatz der Einstein-Gleichung zur kinetischen Energie gegeben ist. Dies wird im nachfolgenden Kapitel dargestellt.

14.4 Alternative Darstellung: Erweiterte Lorentz-Theorie

Wie bereits in Kap. 1.6 ausgeführt, hat Einstein für die Spezielle Relativitätstheorie einen Top-down-Ansatz gewählt. Dazu wurden Relativitätsprinzip und konstante Lichtgeschwindigkeit als Grundlagen definiert und daraus die Lorentz-Transformation und später auch der relativistischen Massenanstieg abgeleitet. Zur Formulierung des Relativitätsprinzips muss nach den hier getroffenen Feststellungen eine ähnliche Variante gewählt werden wie von Einstein selbst, und zwar die Darstellung als objektives Beobachtungskriterium. Auch die Aussage zur Lichtgeschwindigkeit kann so erfolgen, besser ist hier aber die Nutzung der Konstanz der Phasengeschwindigkeit des Lichts. Der Vorschlag für eine widerspruchsfreie und eindeutige Formulierung der Prinzipien der SRT lautet demnach:

1. Die Durchführung von beliebigen physikalischen Versuchen führt in allen Inertialsystemen zu den gleichen Ergebnissen.
2. Die Phasengeschwindigkeit des Lichts ist in allen Inertialsystemen gleich und entspricht dem in jedem Inertialsystem messbaren Wert der Lichtgeschwindigkeit.

Die hier dargestellten Untersuchungen haben jedoch auch gezeigt, dass auch ein Bottom-up-Ansatz mit einer erweiterten Lorentz-Theorie möglich ist. Dabei werden die erforderlichen physikalischen Grundgesetze definiert und daraus lässt sich dann das Relativitätsprinzip ableiten. Dieser Ansatz lautet folgendermaßen:

1. Aus der unbegrenzten Anzahl der vorhandenen Inertialsysteme wird eines als Basissystem ausgewählt und mit Index 0 gekennzeichnet.
2. In diesem Basissystem weist die Geschwindigkeit des Lichts in alle Richtungen den gleichen Wert c auf.
3. Die Eigenschaften aller anderen Inertialsysteme sind über deren Relativgeschwindigkeit v zum Basissystem definiert, und es gilt für die Zeit t, den Weg x und die Masse m

   a) $t = \gamma\left(t_0 - \frac{v}{c^2}x_0\right), \qquad x = \gamma(x_0 - vt_0)$

   b) $m = \gamma m_0$

mit: $$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Zunächst einige formale Anmerkungen: Bei den Gleichungen unter a) handelt es sich um die Lorentz-Transformation (bezogen auf das Basissystem mit Index 0). Um die Formeln zu vereinheitlichen, wurde hier nicht die traditionelle Darstellung mit t' und x' verwendet (vgl. hierzu Kap. 1.6). Gleichung b) betrifft die relativistische Massenerhöhung und beinhaltet die Einstein-Gleichung zur kinetischen Energie (vgl. auch Kap. 1.6 und 6.1)

$$E_{kin} = m_0 c^2(\gamma - 1) \tag{6.14}$$

In dieser Darstellung sind die Spezielle Relativitätstheorie und der erweiterte Lorentz-Ansatz mathematisch vollständig äquivalent. Die Spezielle Relativitätstheorie schließt jedoch bei üblicher Interpretation das Vorhandensein eines Systems absoluter Ruhe aus, welches aber beim erweiterten Lorentz-Ansatz durch einfache Wahl des Basissystems ohne weitere Annahmen oder Einschränkungen integrierbar ist. Hierbei ist es sinnvoll, das System zugrunde zu legen, welches die Basis für die gleichmäßige kosmischen Hintergrundstrahlung ist. Da aber bis heute kein experimenteller Nachweis gelungen ist, kann eine Entscheidung derzeit nicht getroffen werden.

Aus heutiger Sicht liegt die einzige Möglichkeit für einen experimentellen Nachweis eines Systems absoluter Ruhe in der Durchführung von Versuchen mit Überlichtgeschwindigkeiten. Es gibt heute Untersuchungen innerhalb der Quantenmechanik, z. B. bei Tunnelexperimenten, bei denen überlichtschnelle Effekte nachgewiesen worden sind. Bezüglich der Interpretation der Ergebnisse gibt es jedoch noch große Unterschiede. Einerseits wird angenommen, dass trotz überlichtschnellen Effekten hierbei keine Information schneller als das Licht übertragen wird und somit die Gültigkeit der Speziellen Relativitätstheorie nicht in Frage gestellt werden muss, andererseits wird davon ausgegangen, dass eine einfache Signalübertragung, z. B. durch einen Impuls, durchaus überlichtschnell erfolgen kann. Es wurde im Rahmen dieser Ausarbeitung ein Vorschlag gemacht, wie ein Versuch ausgestaltet werden könnte, der eine eindeutige Entscheidung bezüglich der unterschiedlichen Ansätze ermöglicht (Kap. 13.1).

Es wurden außerdem noch weitere Versuche vorgestellt, die andere interessante Aspekte wie die „Relativität der Gleichzeitigkeit“ und „Massenzunahme nach einem plastischen Stoß“ experimentell bestätigen müssten.

Bei einer Durchführung dieser Versuche könnten wichtige Grundsatzfragen der Physik untersucht und möglicherweise abschließend entschieden werden. Es ist sicher einiger Aufwand damit verbunden aber verglichen mit heute üblichen Kosten für Experimente sollte dies möglich sein. Es ist zu hoffen, dass sich Forscherteams finden, die die Durchführung der Versuche übernehmen.

Abschließend betrachtet ist es bemerkenswert, dass auch mehr als ein Jahrhundert nach Formulierung der Speziellen Relativitätstheorie bei intensiver Prüfung noch neue Aspekte sichtbar werden.

Anlagen

Die im Folgenden zusammengestellten Anlagen wurden immer dann erstellt, wenn Berechnungen nicht in geschlossener analytischer Form durchgeführt werden konnten, sondern für die Lösung numerische Verfahren erforderlich waren.

In der Anlage D wurden grundsätzlich die möglichen numerischen Verfahren „Rekursion“, „Verfahren nach Newton“ und „Bisektion“ gegenübergestellt und in ihrer Leistungsfähigkeit verglichen. Die Bisektion hat sich dabei als Überlegen herausgestellt und wurde dementsprechend bei den anderen Berechnungen eingesetzt.

Für alle Themenfelder sind jeweils die mathematischen Ableitungen und darauf aufbauend die Grundlagen für die Kalkulationen zusammengestellt. Als Basis wurde hierfür Microsoft Excel© verwendet. Zur Erstellung der Anlagen A, B und C wurde eine Programmierung mittels VBA (Visual Basic) vorgenommen; darüber hinaus wurde auch zusätzlich in Anlage A die Berechnung mit einer einfachen Tabellenkalkulation ergänzt. Für Anlage D wurde wegen der besseren Übersichtlichkeit beim Vergleichen der einzelnen numerischen Verfahren ausschließlich die Tabellenkalkulation genutzt.

Zu den jeweiligen Verfahren sind die Quellcodes angegeben, damit ein einfaches Nachvollziehen der Berechnungen möglich ist. Für die Ausgabe der Ergebnisse wurde das einfache Verfahren über `Debug.Print` gewählt, bei dem die Ergebnisse sofort im Direktbereich angezeigt werden: Es wurde jeweils mindestens ein Beispiel mit ausgewählten Randbedingungen als Kopie beigefügt.

Anlage A: Relativistischer elastischer Stoß

In dieser Anlage werden numerische Verfahren für Berechnungen des relativistischen elastischen Stoßes dargestellt (vgl. Kap. 6.3). Dazu werden die Gleichungen

$$p = m_1\gamma_1 v_1 + m_2\gamma_2 v_2 = m_1\gamma_3 v_3 + m_2\gamma_4 v_4 \tag{A.01}$$

$$\frac{E_0}{c^2} = (\gamma_1 - 1)m_1 + (\gamma_2 - 1)m_2 = (\gamma_3 - 1)m_1 + (\gamma_4 - 1)m_2 \tag{A.02}$$

verwendet. Gl. (A.02) lässt sich umformen zu

$$\gamma_4 = \frac{\frac{E_0}{c^2} - (\gamma_3 - 1)m_1}{m_2} + 1 \tag{A.03}$$

mit

$$v_4 = \pm c \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma_4^2}} \tag{A.04}$$

Werden nun Gl. (A.03) und Gl. (A.04) in Gl. (A.01) eingesetzt so ergibt sich

$$f(v_3) = m_1\gamma_3 v_3 \pm c\left(\frac{E_0}{c^2} - (\gamma_3 - 1)m_1 + m_2\right)\left[1 - \left(\frac{\frac{E_0}{c^2} - (\gamma_3 - 1)m_1}{m_2} + 1\right)^{-2}\right]^{1/2} \tag{A.05}$$

Dieser Ausdruck ist nur noch von v_3 und den bekannten Ausgangswerten für v_1 und v_2 abhängig. Hieraus lassen sich die Werte für v_3 und daraus v_4 mittels Verwendung des Verfahrens der Bisektion ermitteln (vgl. hierzu auch Verfahrensvergleiche in Anlage D). Dazu werden zunächst geeignete Startwerte $(v_{3+})_0$ und $(v_{3-})_0$ bestimmt, für die gilt:

$$f(v_{3+})_0 > p \tag{A.06}$$

$$f(v_{3-})_0 < p \tag{A.07}$$

Die Funktion $f(v_3)$ muss im Intervall $[(v_{3-})_0; (v_{3+})_0]$ stetig und differenzierbar sein, außerdem ist $f'(v_3) \neq 0$ gefordert, d. h. es darf im Definitionsintervall keine Minima oder Maxima geben, da sonst keine eindeutige Lösung existiert. Es wird nun der Mittelwert gebildet

$$(v_3)_1 = \frac{(v_{3+})_0 + (v_{3-})_0}{2} \tag{A.08}$$

und $f(v_3)_1$ gemäß Gl. (A.05) berechnet. Es gelten dann die folgenden Festlegungen:

$$f(v_3)_1 > p \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (v_{3+})_1 = (v_3)_1 \\ (v_{3-})_1 = (v_{3-})_0 \end{cases} \tag{A.09}$$

$$f(v_3)_1 \leq p \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (v_{3+})_1 = (v_{3+})_0 \\ (v_{3-})_1 = (v_3)_1 \end{cases} \tag{A.10}$$

Diese Berechnung wird mit steigendem Index K so lange wiederholt, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht wird. Bedingt durch das Auftreten des Ausdrucks $\pm$ in den Gleichungen Gl. (A.04) und Gl. (A.05), der sich durch die Auflösung der Wurzel ergibt, treten während der Berechnung und abschließend bei der Bestimmung von v_4 jeweils zwei unterschiedliche Ergebnisse auf, die über eine Plausibilitätsbetrachtung der tatsächlichen Situation angepasst werden müssen.

Wird für die Berechnung eine einfache Tabellenkalkulation verwendet (vgl. Kap. A.2), so sind aufgrund der zuvor diskutierten Randbedingungen die Eingabeparameter eingeschränkt. Für die Berechnungen müssen die Startbedingungen so gewählt werden, dass die Werte für v_1 in allen Fällen positiv sind. Außerdem wird vorausgesetzt, dass durch geeignete Indexwahl die Werte von v_1 stets größer als v_2 und die Werte für den berechneten Impuls in Gl. (A.01) $p > 0$ sind. Falls die tatsächlichen Vorgabewerte von diesen Voraussetzungen abweichen, sind Anpassungen erforderlich deren Definition im Folgenden dargestellt sind.

A.1 Programmablauf des Kalkulationsprozesses

Nachfolgend wird beschrieben, welche Prozessschritte ein Programm ausführen muss, um die erforderlichen Berechnungen durchzuführen (vgl. Abb. A.1). Um eine uneingeschränkte Auswahl der Ausgangsparameter zu gewährleisten, wird zunächst deren Bestimmung über das Unterprogramm „Parameter Input“ und nach Abschluss der Berechnungen die Rückumwandlung mittels Unterprogramm „Parameter Output“ durchgeführt (Abb. A.2).

Die Ermittlung der Inputwerte wird durch folgende Kriterien bestimmt:

1. Bei der Betrachtung der Geschwindigkeiten der Körper mit den Massen m_1 und m_2 ist die Bedingung $v_1 > v_2$ erforderlich. Dies ergibt sich aus der Tatsache, dass bei der Berechnung zunächst die Geschwindigkeit v_3 (des Körpers mit der Masse m_1 nach dem Stoß) ermittelt wird; bei Werten $v_1 < v_2$ würde sich die Masse m_1 langsamer als m_2 bewegen und es kommt nicht zum Ereignis.
2. Weiterhin gelten die Randbedingungen $v_1 > 0$ und $p > 0$. Dies wird durch die Berechnungen im Programmablauf gefordert, u. a. weil bei der Nutzung eines Wurzelausdrucks nur das positive Ergebnis (statt plus und minus zu betrachten) verwendet wird.

Diese zunächst starken Einschränkungen für die Auswertungen stellen jedoch keine Begrenzung dar, weil es folgende allgemeine Möglichkeiten zur Änderung der Ausgangsbedingungen gibt:

1. Die Vorzeichen für die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 lassen sich beliebig festlegen, sofern beide Werte gleichzeitig geändert werden.
2. Der Index zwischen $v_1; m_1$ und $v_2; m_2$ lässt sich tauschen.

Mit diesen Mitteln können alle beliebigen Kombinationen erfasst werden. An dieser Stelle wird zunächst der Fall $v_1 > 0$ betrachtet. Statt der theoretisch abzuleitenden $2^3 = 8$ Kombinationsmöglichkeiten aus den 3 Zusatzbedingungen $v_2 > 0$, $v_1 > v_2$ sowie $p > 0$ verbleiben nur insgesamt 4 Varianten. Dies ist auf folgende Sachverhalte zurückzuführen:

- Für den Fall $v_2 > 0$ ist in Kombination mit $v_1 > 0$ der aufaddierte Gesamtimpuls immer positiv und muss nicht betrachtet werden. Ein negativer Impuls kann nur dann auftreten, wenn die Geschwindigkeiten unterschiedliche Vorzeichen aufweisen.
- Für den Fall $v_1 > 0$ liegt beim Auftreten von $v_2 < 0$ offensichtlich immer die Bedingung $v_1 > v_2$ vor.

Diese Fälle müssen also nicht separat betrachtet werden. Die verbleibenden Varianten lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

Bedingung 1	Bedingung 2	Maßnahme	Code
$v_2 > 0$	$v_1 > v_2$	Keine Änderung	F1
$v_2 > 0$	$v_1 < v_2$	Indextausch	F2
$v_2 < 0$	$p > 0$	Keine Änderung	F1
$v_2 < 0$	$p < 0$	Index- und Vorzeichentausch	F4

Tab. A.1: Inputparameter in Abhängigkeit von den Randbedingungen für $v_1 > 0$

Für die Situation $v_1 < 0$ erfolgt die Festlegung in gleicher Form, nur dass zuvor ein genereller Vorzeichenwechsel berücksichtigt werden muss. Dabei ist zu beachten, dass nach einem Vorzeichentausch der Wert für den Impuls ebenfalls das Vorzeichen wechselt. Abschließend ergeben sich folgende Werte:

Bedingung 1	Bedingung 2	Maßnahme	Code
$v_2 > 0$	$p > 0$	Index- und Vorzeichentausch	F4
$v_2 > 0$	$p < 0$	Vorzeichentausch	F3
$v_2 < 0$	$v_1 < v_2$	Indextausch	F2
$v_2 < 0$	$v_1 < v_2$	Vorzeichentausch	F3

Tab. A.2: Inputparameter in Abhängigkeit von den Randbedingungen für $v_1 < 0$

Die so ermittelten Werte werden mit V_1, V_2, M_1, M_2 bezeichnet und für die weiteren Berechnungen genutzt. Auf diese Weise können alle möglichen Kombinationen für Masse und Geschwindigkeit abgedeckt werden. Nach Beendigung der Berechnungen werden die Ergebnisse für V_3, V_4, M_1, M_2 nach gleichem Schema entsprechend dem definierten Code in die Ausgangsdarstellung zurückverwandelt.

Es ist noch zu erwähnen, dass durch die Auswahl der Parameter die Ergebnisse für V_4 stets positive Werte aufweisen und erst durch die eventuell erforderliche Rückumwandlung negativ werden können. Dies ist wichtig, weil die Werte entsprechend Gl. (A.04) ermittelt werden und hier die Form

$$V_4 = +\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma_4^2}} \tag{A.11}$$

mit ausschließlich positivem Ergebnis annehmen.

Die auf diese Weise ermittelten Werte gestatten es, die für die Berechnungen erforderlichen Ausgangswerte für $(V_{3+})_0$ und $(V_{3-})_0$ auf einfache Weise festzulegen. Es lässt sich leicht zeigen, dass für alle Fälle die Bedingungen $(V_{3+})_0 = V_1$ sowie $(V_{3-})_0 = -V_1$ die Voraussetzungen erfüllen und stets zu verwertbaren Ergebnissen führen.

Für die weiteren Berechnungen wurde hier (wie auch in den anderen Fällen) das Verfahren der Bisektion gewählt. Für die Festlegung des Parameters zur Beendigung der Berechnungen ist hierbei die Möglichkeit gegeben, dass die Werte von $(v_3)_{K-1}$ und $(v_3)_K$ oder $(v_4)_{K-1}$und $(v_4)_K$ miteinander verglichen werden und bei Gleichheit der Berechnungsvorgang abgebrochen wird. Entscheidet man sich jedoch für eine dieser Abfragen so kann die Situation auftreten, dass – wenn die Werte nahe Null sind – der andere noch nicht genau berechnet worden ist. Um dieser Problematik zu entgehen wurde die Tatsache genutzt, dass ab einer Anzahl von ca. 60 Iterationsschritten bei der hier verfügbaren Genauigkeit von 15 Stellen die mögliche Grenzgenauigkeit erreicht wird (vgl. Darstellung in Anlage D). Es wurde willkürlich eine Gesamtzahl von 80 Schritten festgelegt.

Alle erforderlichen Prozessschritte sind mit der Hilfe von Programmablaufplänen dargestellt, und zwar in Abb. A.1 für den generellen Ablauf und in Abb.A.2 für die beschriebenen Unterprogramme. Anschließend ist ein für die Berechnungen erstellter VBA-Programmcode (Abb. A.3) sowie die Zuordnung der hierbei verwendeten Formelzeichen (Tab. A.3) wiedergegeben.

Darauffolgend ist in Kap. A.2 ein einfaches Kalkulationsprogramm dargestellt, mit dem die gleichen Berechnungen vorgenommen werden können. Allerdings müssen hierbei die bereits erwähnten Randbedingungen $v_1 > v_2$, $v_1 > 0$ und $p > 0$ eingehalten oder gegebenenfalls manuell angepasst werden.

Wie bereits in Kapitel 6.3 erwähnt wurde, sind die Ergebnisse aus VBA-Programm und Tabellenkalkulation nicht völlig identisch, obwohl diese exakt dem gleichen Berechnungsschema folgen. Während dies bei großen Werten keine Rolle spielt, sind bei sehr kleinen Werten von v_1 Abweichungen feststellbar. Diese werden durch Rundungsfehler während der Berechnung verursacht, die auf die verschiedenen Verfahren unterschiedliche Auswirkungen haben. Hierdurch ist jedoch keine Beeinträchtigung der allgemeinen Aussage gegeben, dass beim elastischen relativistischen Stoß keine Effekte auftreten können, die Messungen zur Identifizierung eines absolut ruhenden Systems gestatten.

Wenn Fälle mit sehr geringen Geschwindigkeiten numerisch genauer untersucht werden sollen, müssen hier Rechnersysteme mit höherer Genauigkeit eingesetzt werden.

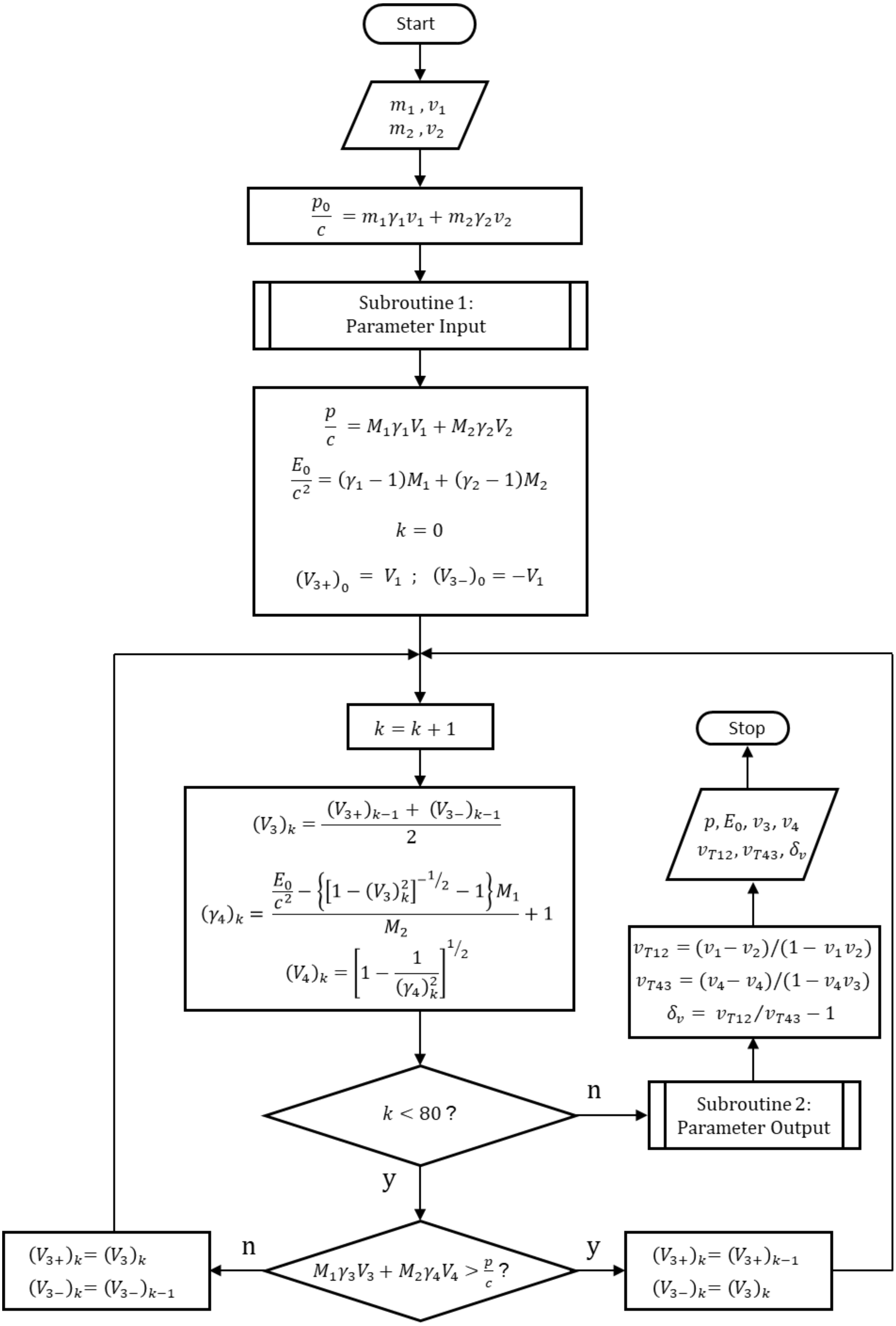
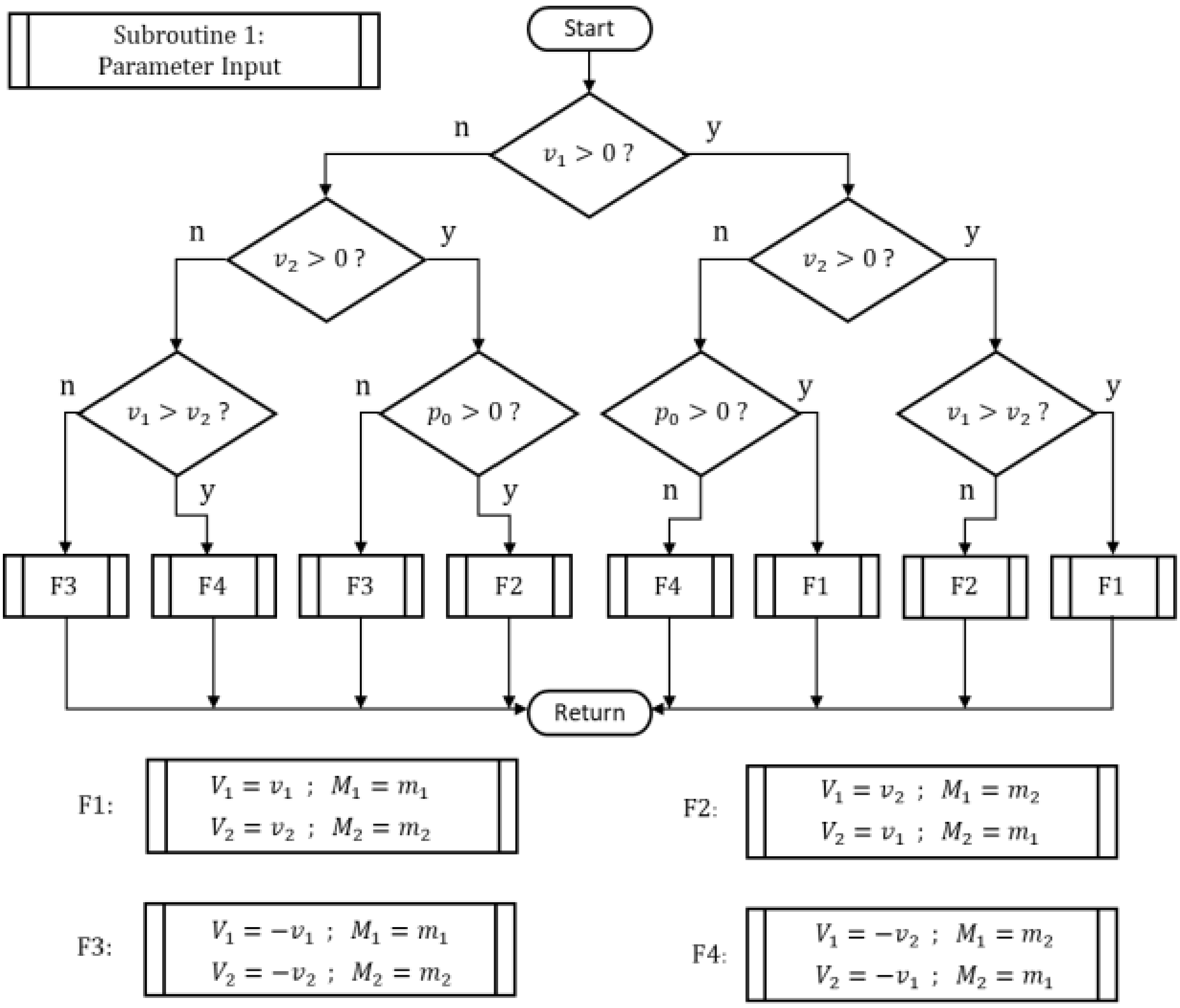


Abb. A.1: Programmablaufplan des Kalkulationsprozesses



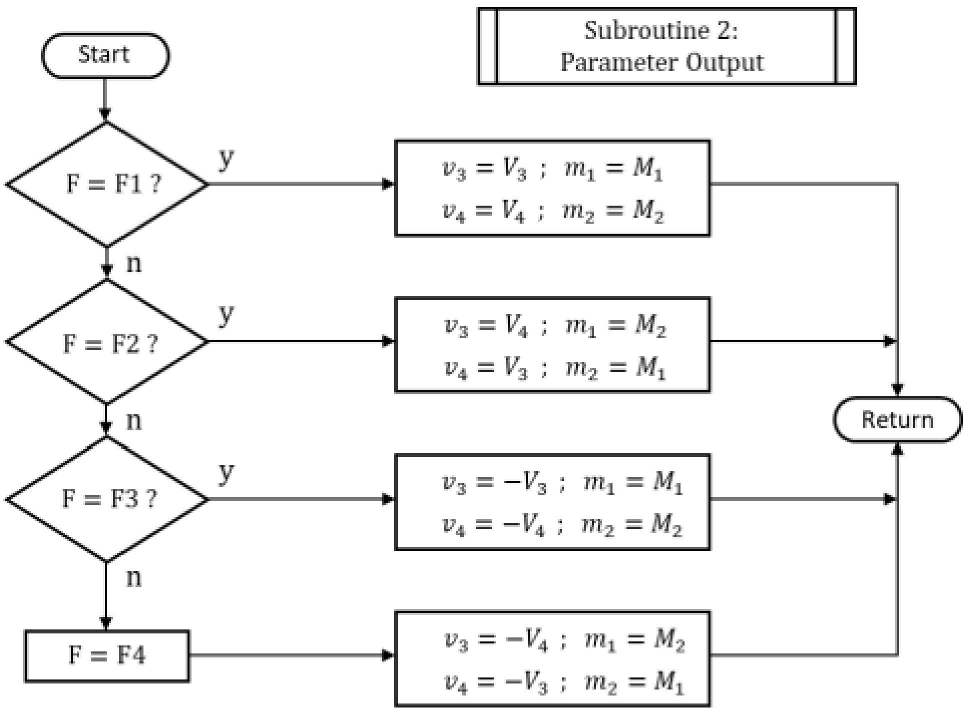


Abb. A.2: Unterprogramme zum Programmablaufplan in Abb. A.1

Wert	VBA-Code	Wert	VBA-Code	Wert	VBA-Code
v_1	v1	v_2	v2	vc_1	vc1
vc_1	vc2	v_3	v3	vc_3	vc3
vc_{3-}	vc3m	vc_{3+}	vc3p	v_4	v4
vc_4	vc4	m_1	m1	mc_1	mc1
$v_T(v_1, v_2)$	vt12	$v_T(v_4, v_3)$	vt43	δ_v	Dv
m_2	m2	mc_2	mc2	p_0	p0
p	pc0	E_0	E0	γ_4	Ga4

Tab. A.3: Formelzeichen und dafür genutzte VBA-Codes

```
Sub A()
Dim v1, v2, vc1, vc2, v3, vc3, vc3m, vc3p, v4, vc4, vt12, vt43, Dv, m1,
mc1, m2, mc2, p0, pc0, E0, Ga4, Gav, K As Double
Dim F, F1, F2, F3, F4 As String
'Generelle Eingaben
    v1 = 0.3
    v2 = -0.1
    m1 = 1
    m2 = 3
'Start Berechnung
    If v1 = v2 Then
        Debug.Print "Berechnung nicht möglich: v1 = v2"
        GoTo Out1:
        End If
    p0 = v1 * m1 / (1 - v1 ^ 2) ^ 0.5 + v2 * m2 / (1 - v2 ^ 2) ^ 0.5
'Subroutine 1
    If v1 > 0 Then
        GoTo P1:
    End If
    If v2 > 0 Then
        GoTo P2:
    End If
    If v1 > v2 Then
        F = "F4"
        Else
        F = "F3"
    End If
    GoTo Def1:
P2:
    If p0 > 0 Then
        F = "F2"
        Else
        F = "F3"
    End If
    GoTo Def1:
P1:
    If v2 > 0 Then
        GoTo P3:
```

```
    End If
    If p0 > 0 Then
        F = "F1"
        Else
        F = "F4"
    End If
    GoTo Def1:
P3:
    If v1 > v2 Then
        F = "F1"
        Else
        F = "F2"
    End If
    GoTo Def1:
Def1:
    If F = "F1" Then
        vc1 = v1
        vc2 = v2
        mc1 = m1
        mc2 = m2
    End If
    If F = "F2" Then
        vc1 = v2
        vc2 = v1
        mc1 = m2
        mc2 = m1
     End If
     If F = "F3" Then
        vc1 = -v1
        vc2 = -v2
        mc1 = m1
        mc2 = m2
    End If
    If F = "F4" Then
        vc1 = -v2
        vc2 = -v1
        mc1 = m2
        mc2 = m1
    End If
'End Subroutine 1
'Berechnung
   pc0 = vc1 * mc1 / (1 - vc1 ^ 2) ^ 0.5 + vc2 * mc2 / (1 - vc2 ^ 2) ^ 0.5
   E0 = mc1 * ((1 - vc1 ^ 2) ^ -0.5 - 1) + mc2 * ((1 - vc2 ^ 2) ^ -0.5 - 1)
    vc3m = -vc1            'Startbedingungen
    vc3p = vc1
    K = 0
Do
        K = K + 1
        vc3 = (vc3m + vc3p) / 2
        Ga4 = (E0 - ((1 - vc3 ^ 2) ^ -0.5 - 1) * mc1) / mc2 + 1
        vc4 = (1 - 1 / Ga4 ^ 2) ^ 0.5
        If (vc3 * mc1 / (1 - vc3 ^ 2) ^ 0.5 + vc4 * mc2 / (1 - vc4 ^ 2) ^
0.5) > pc0 Then
        vc3p = vc3
        Else
        vc3m = vc3
        End If
Loop Until K = 80
'Subroutine 2
    If F = "F1" Then
        v3 = vc3
        v4 = vc4
        m1 = mc1
```

```
        m2 = mc2
    End If
    If F = "F2" Then
        v3 = vc4
        v4 = vc3
        m1 = mc2
        m2 = mc1
     End If
     If F = "F3" Then
        v3 = -vc3
        v4 = -vc4
        m1 = mc1
        m2 = mc2
    End If
    If F = "F4" Then
        v3 = -vc4
        v4 = -vc3
        m1 = mc2
        m2 = mc1
    End If
'End Subroutine 2
    vt12 = (v1 - v2) / (1 - v1 * v2)
    vt43 = (v4 - v3) / (1 - v4 * v3)
    Dv = (vt12 / vt43) - 1
'Ergebnisdarstellung: Berechnete Werte aus Sicht eines ruhenden Beobachters
    Debug.Print "F =", F
    Debug.Print "v3 =", v3
    Debug.Print "v4 =", v4
    Debug.Print "vt12 =", vt12
    Debug.Print "vt43 =", vt43
    Debug.Print "Dv =", Dv
Out1:
End Sub
```

Abb. A.3: VBA Programm-Code für den Kalkulationsprozess aus Abb. A.1 und A.2

A.2 Tabellenkalkulation

In den Tabellen werden folgende Formeln verwendet:

$$p_0 = \frac{p}{c} = \frac{m_1\gamma_1 v_1 + m_2\gamma_2 v_2}{c} \qquad \frac{E_0}{c^2} = (\gamma_1 - 1)m_1 + (\gamma_2 - 1)m_2$$

$$\frac{(v_3)_k}{c} = \frac{(v_{3+})_{k-1} + (v_{3-})_{k-1}}{2 \cdot c} \qquad \gamma_4 = \frac{\frac{E_0}{c^2} - (\gamma_3 - 1)m_1}{m_2} + 1$$

$$\frac{v_4}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma_4^2}}$$

(Anmerkung: Aufgrund der gewählten Randbedingungen ist nur die Betrachtung positiver Ergebnisse des Wurzelausdrucks erforderlich)

Abfrage: $f(v_3)_1 > p{:} \Rightarrow \frac{(v_{3+})_k}{c} = \frac{(v_3)_k}{c}$ und $\frac{(v_{3-})_k}{c} = \frac{(v_{3-})_{k-1}}{c}$

Abfrage: $f(v_3)_1 < p: \Rightarrow \frac{(v_{3+})_k}{c} = \frac{(v_{3+})_{k-1}}{c}$ und $\frac{(v_{3-})_k}{c} = \frac{(v_3)_k}{c}$

Zweckmäßige Startwerte: Für $\frac{(v_{3-})_0}{c} = -\frac{v_1}{c}$ und $\frac{(v_{3+})_0}{c} = \frac{v_1}{c}$

Die Formeln im Ergebnisfeld (blau eingefärbt) sind:

$$\frac{v_3}{c} = \frac{(v_3)_{k=80}}{c} \qquad \frac{v_4}{c} = \frac{(v_4)_{k=80}}{c}$$

$$\frac{v_T(\,v_1,\,v_2)}{c} = \frac{v_1 - v_2}{1 - \frac{v_1\,v_2}{c^2}} \qquad \frac{v_T(\,v_4,\,v_3)}{c} = \frac{v_4 - v_3}{1 - \frac{v_4\,v_3}{c^2}}$$

$$\delta_v = \frac{v_T(\,v_1,\,v_2)}{v_T(\,v_4,\,v_3)} - 1$$

Als Beispiele sind für $m_1 = 2;\ m_2 = 1$ die Fälle $v_1 = 0{,}5c$ und $v_2 = -0{,}5\text{c}$ sowie $v_1 = 0{,}00001c$ und $v_2 = 0$ dargestellt.

A.3 Codes für Tabellenkalkulation

Koordinate		Code
B3	=	B1*D1*(1-B1^2)^-0,5+B2*D2*(1-B2^2)^-0,5
D3	=	D1*((1-B1^2)^-0,5-1)+D2*((1-B2^2)^-0,5-1)
B8	=	(E7+F7)/2
C8	=	(D$3-((1-B8^2)^-0,5-1)*D$1)/D$2+1
D8	=	(1-1/C8^2)^0,5
E8	=	WENN((B8*D$1*(1-B8^2)^-0,5+D8*D$2*(1-D8^2)^-0,5)>B$3;E7;B8)
F8	=	WENN((B8*D$1*(1-B8^2)^-0,5+D8*D$2*(1-D8^2)^-0,5)>B$3;B8;F7)
G9	=	WENN(B9=B8;"x";"")
H9	=	WENN(D9=D8;"x";"")
F1	=	B87
F2	=	D87
F3	=	(B1-B2)/(1-B1*B2)
F4	=	(F2-F1)/(1-F2*F1)
F5	=	F3/F4-1

Die Codes B8 – F8 sowie G9 und H9 erlauben ein Kopieren, hier bis B87 – G87

Mit den Status-Abfragen in Spalte G und H wird ermittelt, ob sich die Werte für v_3 und v_4 noch unterscheiden. Für v_3 gibt es nur geringe Abweichungen (Abb. A.4: Schritt 51, Abb. A.5: Schritt 52), v_4 zeigt abhängig von den Ausgangswerten stark unterschiedliches Verhalten; in diesen Beispielen ergeben sich keine Veränderungen mehr ab Schritt 49 (mit Unterbrechungen), bzw. bereits ab Schritt 19.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	v_1/c=	0,5	m_1=	2	v_3/c=	-0,209677419354839		
2	v_2/c=	-0,5	m_2=	1	v_4/c=	0,709302325581396		
3	p_0/c=	0,5773502692	E_0/c²=	0,4641016151	v_T/c (v_1, v_2)=	0,800000000000000		
4					v_T/c (v_4, v_3)=	0,800000000000000		
5					δ_V=	0,0E+00		
6	k	v_3/c	γ_4	v_4/c	v_{3-}/c	v_{3+}/c	St.	
7	0				-0,5	0,5	3	4
8	1	0,000000000000000	1,46410161513776	0,730406495763757	-0,500000000000000	0,000000000000000		
9	2	-0,250000000000000	1,39851049716047	0,699076919847366	-0,250000000000000	0,000000000000000		
10	3	-0,125000000000000	1,44829109242188	0,723362051517259	-0,250000000000000	-0,125000000000000		
11	4	-0,187500000000000	1,42799037361527	0,713863539464603	-0,250000000000000	-0,187500000000000		
12	5	-0,218750000000000	1,41446124643264	0,707230579852351	-0,218750000000000	-0,187500000000000		
13	6	-0,203125000000000	1,42151952770374	0,710722406262171	-0,218750000000000	-0,203125000000000		
14	7	-0,210937500000000	1,41806486850481	0,709022002845605	-0,210937500000000	-0,203125000000000		
15	8	-0,207031250000000	1,41981068269019	0,709883363160283	-0,210937500000000	-0,207031250000000		
16	9	-0,208984375000000	1,41894241344356	0,709455499378042	-0,210937500000000	-0,208984375000000		
17	10	-0,209960937500000	1,41850480254676	0,709239458600344	-0,209960937500000	-0,208984375000000		
18	11	-0,209472656250000	1,41872389812336	0,709347655434525	-0,209960937500000	-0,209472656250000		
19	12	-0,209716796875000	1,41861442290016	0,709293601181963	-0,209716796875000	-0,209472656250000		
20	13	-0,209594726562500	1,41866917864890	0,709320639342717	-0,209716796875000	-0,209594726562500		
21	14	-0,209655761718750	1,41864180530934	0,709307123021790	-0,209716796875000	-0,209655761718750		
22	15	-0,209686279296875	1,41862811523852	0,709300362791843	-0,209686279296875	-0,209655761718750		
23	16	-0,209671020507812	1,41863496055736	0,709303743079295	-0,209686279296875	-0,209671020507812		
24	17	-0,209678649902344	1,41863153796880	0,709302052978691	-0,209678649902344	-0,209671020507812		
25	18	-0,209674835205078	1,41863324928079	0,709302898039773	-0,209678649902344	-0,209674835205078		
26	19	-0,209676742553711	1,41863239362922	0,709302475511927	-0,209678649902344	-0,209676742553711		
27	20	-0,209677696228027	1,41863196580012	0,709302264245983	-0,209677696228027	-0,209676742553711		
47	40	-0,209677419355103	1,41863209000868	0,709302325581337	-0,209677419355103	-0,209677419354193		
48	41	-0,209677419354648	1,41863209000888	0,709302325581438	-0,209677419355103	-0,209677419354648		
49	42	-0,209677419354875	1,41863209000878	0,709302325581387	-0,209677419354875	-0,209677419354648		
50	43	-0,209677419354762	1,41863209000883	0,709302325581413	-0,209677419354875	-0,209677419354762		
51	44	-0,209677419354819	1,41863209000880	0,709302325581400	-0,209677419354875	-0,209677419354819		
52	45	-0,209677419354847	1,41863209000879	0,709302325581394	-0,209677419354847	-0,209677419354819		
53	46	-0,209677419354833	1,41863209000880	0,709302325581397	-0,209677419354847	-0,209677419354833		
54	47	-0,209677419354840	1,41863209000879	0,709302325581395	-0,209677419354840	-0,209677419354833		
55	48	-0,209677419354836	1,41863209000880	0,709302325581396	-0,209677419354840	-0,209677419354836		
56	49	-0,209677419354838	1,41863209000880	0,709302325581396	-0,209677419354840	-0,209677419354838		X
57	50	-0,209677419354839	1,41863209000880	0,709302325581396	-0,209677419354840	-0,209677419354839		X
58	51	-0,209677419354839	1,41863209000879	0,709302325581395	-0,209677419354839	-0,209677419354839	X	
59	52	-0,209677419354839	1,41863209000879	0,709302325581395	-0,209677419354839	-0,209677419354839	X	X
60	53	-0,209677419354839	1,41863209000879	0,709302325581395	-0,209677419354839	-0,209677419354839	X	X
61	54	-0,209677419354839	1,41863209000879	0,709302325581395	-0,209677419354839	-0,209677419354839	X	X
62	55	-0,209677419354839	1,41863209000880	0,709302325581396	-0,209677419354839	-0,209677419354839	X	

Abb. A.4: Ergebnisse bei Nutzung der Tabellenkalkulation. $v_1 = 0{,}5c$, $v_2 = -0{,}5c$
Grüne Felder: Eingabewerte. Schritte zwischen 20 und 40 ausgeblendet

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	v_1/c=	0,00001	m_1=	2	v_3/c=	3,33333305742102E-06		
2	v_2/c=	0	m_2=	1	v_4/c=	1,33333338849358E-05		
3	p_0/c=	2,00000000E-05	E_0/c²=	1,00000008E-10	v_T/c (v_1, v_2)=	0,000010000000000		
4					v_T/c (v_4, v_3)=	0,000010000000828		
5					δ_V=	-8,3E-08		
6	k	v_3/c	γ_4	v_4/c	v_{3-}/c	v_{3+}/c	St.	
7	0				-0,5	0,5	3	4
8	1	0,00000000000000E+00	1,00000000010000	1,41421362087937E-05	0,00000000000000E+00	1,00000000000000E-05		
9	2	5,00000000000000E-06	1,00000000007500	1,22474492205951E-05	0,00000000000000E+00	5,00000000000000E-06		
10	3	2,50000000000000E-06	1,00000000009375	1,36930563961891E-05	2,50000000000000E-06	5,00000000000000E-06		
11	4	3,75000000000000E-06	1,00000000008594	1,31101090273823E-05	2,50000000000000E-06	3,75000000000000E-06		
12	5	3,12500000000000E-06	1,00000000009023	1,34338740912243E-05	3,12500000000000E-06	3,75000000000000E-06		
13	6	3,43750000000000E-06	1,00000000008818	1,32803375392606E-05	3,12500000000000E-06	3,43750000000000E-06		
14	7	3,28125000000000E-06	1,00000000008923	1,33591548737510E-05	3,28125000000000E-06	3,43750000000000E-06		
15	8	3,35937500000000E-06	1,00000000008871	1,33202712640041E-05	3,28125000000000E-06	3,35937500000000E-06		
16	9	3,32031250000000E-06	1,00000000008898	1,33398271082881E-05	3,32031250000000E-06	3,35937500000000E-06		
17	10	3,33984375000000E-06	1,00000000008885	1,33300694297534E-05	3,32031250000000E-06	3,33984375000000E-06		
18	11	3,33007812500000E-06	1,00000000008891	1,33349658128449E-05	3,33007812500000E-06	3,33984375000000E-06		
19	12	3,33496093750000E-06	1,00000000008888	1,33325345004281E-05	3,33007812500000E-06	3,33496093750000E-06		
20	13	3,33251953125000E-06	1,00000000008889	1,33337335592179E-05	3,33251953125000E-06	3,33496093750000E-06		
21	14	3,33374023437500E-06	1,00000000008889	1,33331340433020E-05	3,33251953125000E-06	3,33374023437500E-06		
22	15	3,33312988281250E-06	1,00000000008889	1,33334338046295E-05	3,33312988281250E-06	3,33374023437500E-06		
23	16	3,33343505859375E-06	1,00000000008889	1,33332672713907E-05	3,33312988281250E-06	3,33343505859375E-06		
24	17	3,33328247070313E-06	1,00000000008889	1,33333671915836E-05	3,33328247070313E-06	3,33343505859375E-06		
25	18	3,33335876464844E-06	1,00000000008889	1,33333338849358E-05	3,33328247070313E-06	3,33335876464844E-06		
26	19	3,33332061767578E-06	1,00000000008889	1,33333338849358E-05	3,33332061767578E-06	3,33335876464844E-06		X
27	20	3,33333969116211E-06	1,00000000008889	1,33333338849358E-05	3,33332061767578E-06	3,33333969116211E-06		X
47	40	3,33333305743509E-06	1,00000000008889	1,33333338849358E-05	3,33333305741690E-06	3,33333305743509E-06		X
48	41	3,33333305742599E-06	1,00000000008889	1,33333338849358E-05	3,33333305741690E-06	3,33333305742599E-06		X
49	42	3,33333305742144E-06	1,00000000008889	1,33333338849358E-05	3,33333305741690E-06	3,33333305742144E-06		X
50	43	3,33333305741917E-06	1,00000000008889	1,33333338849358E-05	3,33333305741917E-06	3,33333305742144E-06		X
51	44	3,33333305742031E-06	1,00000000008889	1,33333338849358E-05	3,33333305742031E-06	3,33333305742144E-06		X
52	45	3,33333305742087E-06	1,00000000008889	1,33333338849358E-05	3,33333305742087E-06	3,33333305742144E-06		X
53	46	3,33333305742116E-06	1,00000000008889	1,33333338849358E-05	3,33333305742087E-06	3,33333305742116E-06		X
54	47	3,33333305742102E-06	1,00000000008889	1,33333338849358E-05	3,33333305742087E-06	3,33333305742102E-06		X
55	48	3,33333305742095E-06	1,00000000008889	1,33333338849358E-05	3,33333305742095E-06	3,33333305742102E-06		X
56	49	3,33333305742098E-06	1,00000000008889	1,33333338849358E-05	3,33333305742098E-06	3,33333305742102E-06		X
57	50	3,33333305742100E-06	1,00000000008889	1,33333338849358E-05	3,33333305742100E-06	3,33333305742102E-06		X
58	51	3,33333305742101E-06	1,00000000008889	1,33333338849358E-05	3,33333305742101E-06	3,33333305742102E-06		X
59	52	3,33333305742101E-06	1,00000000008889	1,33333338849358E-05	3,33333305742101E-06	3,33333305742102E-06	X	X
60	53	3,33333305742101E-06	1,00000000008889	1,33333338849358E-05	3,33333305742101E-06	3,33333305742102E-06	X	X
61	54	3,33333305742102E-06	1,00000000008889	1,33333338849358E-05	3,33333305742102E-06	3,33333305742102E-06		X
62	55	3,33333305742102E-06	1,00000000008889	1,33333338849358E-05	3,33333305742102E-06	3,33333305742102E-06	X	X

Abb. A.5: Darstellung wie Abb. A.4. $v_1 = 0{,}00001c$, $v_2 = 0$
Werte für v_4 bereits ab Iterationsschritt 19 unverändert

Anlage B: Signalaustausch bei Systemen mit konstanter Beschleunigung

In dieser Anlage wird gezeigt, dass der Empfang von Signalen aus einem beschleunigten System von einem zu Beginn der Beschleunigungsphase hierzu ruhenden Beobachter und einem, der dazu gleichförmig bewegt ist, zu den gleichen Ergebnissen führt. Die hierbei geltenden analytischen Beziehungen wurden bereits in Kap. 6.4.1 in den Gleichungen Gl. (6.60) bis Gl. (6.80) abgeleitet. Für die Lösung dieses Problems gibt es aber auch eine numerische Methode, die im Folgenden dargestellt wird. Zwischen analytischem und numerischem Ansatz gibt es jeweils Vor- und Nachteile, die bei einer Gegenüberstellung, auch mit vergleichbaren Ergebnissen der numerischen Methode aus Anlage C, sichtbar werden.

B.1 Numerische Lösung

Innerhalb eines bewegten Systems S gilt allgemein der Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Beschleunigung

$$\Delta v = a(v) \cdot \Delta t(v) = a_S \cdot \Delta t_S \tag{B.01}$$

Definitionsgemäß sind a_S und Δt_S konstant. Eine numerische Lösung erfordert das mehrfache Durchlaufen verschiedener Schritte; dazu wird zunächst die relativistische Geschwindigkeitsaddition genutzt, dann folgt jeweils die Ermittlung der Zunahme von Zeit und Weg.

1. Schritt:

$$v_1 = \frac{v_0 + \Delta v}{1 + \frac{v_0 \Delta v}{c^2}} = \frac{v_0 + a_S \Delta t_S}{1 + \frac{v_0 a_S \Delta t_S}{c^2}} \tag{B.02}$$

2. Schritt:

$$\Delta t_1 = \Delta t_S \cdot \frac{\gamma(v_1) + \gamma(v_0)}{2} \tag{B.03}$$

3. Schritt:

$$\Delta x_1 = \Delta t_1 v_0 + \frac{v_1 + v_0}{2} \Delta t_1 \tag{B.04}$$

Es sei angemerkt, dass die Funktionen für $\gamma(v)$ und $v(\Delta v)$ nicht linear sind und die Bildung eines Mittelwertes somit nur eine Näherung darstellt, die durch die Wahl geeignet kleiner Intervalle für Δt_S kompensiert werden muss. Diese Schritte sind nun N-mal zu wiederholen und die Ergebnisse werden aufsummiert. Allgemein gilt dann

$$t_N = \Delta t_S \sum_{K=1}^{N} \frac{\gamma(v_K) + \gamma(v_{K-1})}{2} \tag{B.05}$$

$$x_N = \sum_{K=1}^{N} \Delta t_K \frac{v_K + v_{K-1}}{2} \tag{B.06}$$

mit

$$v_{K+1} = \frac{v_K + \Delta v}{1 + \frac{v_K \Delta v}{c^2}} - v_0 = \frac{v_K + a_S \Delta t_S}{1 + \frac{v_K a_S \Delta t_S}{c^2}} - v_0 \tag{B.07}$$

Zu einem beliebigen Zeitpunkt t_K wird vom beschleunigten System S ein Signal an den Beobachter A zurückgeschickt. Da dieser sich aus Sicht von B während der Signalausbreitung bei Werten von $v_0 \neq 0$ entweder von S entfernt oder darauf zubewegt und außerdem die Werte für a_S und v_0 jeweils positiv oder negativ sein können, müssen für die Durchführung der Berechnungen unterschiedliche Regelungen getroffen werden (vgl. Zusammenstellung in Kapitel 2.1). Sind a_S und v_0 beide positiv, so entsteht für Beobachter B eine Situation entsprechend Typ b aus Abb. 2.2 mit

$$\Delta t = \Delta t_S \left(1 + \frac{v_0}{c}\right) \tag{B.08}$$

Weisen a_S und v_0 dagegen unterschiedliche Richtungen auf so ändert sich das Vorzeichen in Gl. (B.08) entsprechend der Situation vom Typ d aus Abb. 2.2 (vgl. Kap.2).

Zusammengefasst entstehen folgende Kombinationen für die von Beobachter B durch die zunehmende Entfernung wahrgenommene Zeit zwischen zwei Impulsen $t_{K,R}$, in die beliebige positive oder negative Werte für die Geschwindigkeit v_0 eingesetzt werden können:

$a_S > 0$:
$$t_{K,R} = \frac{x_K - v_0 t_K}{c\left(1 + \frac{v_0}{c}\right)} \tag{B.09}$$

$a_S < 0$:
$$t_{K,R} = \frac{|(x_K - v_0 t_K)|}{c\left(1 - \frac{v_0}{c}\right)} \tag{B.10}$$

Für $v_0 = 0$ vereinfachen sich beide Beziehungen für beliebige Werte von a_S zu

$$t_{K,R} = \frac{|x_K|}{c} \tag{B.11}$$

Die Gesamtzeit ausgehend vom Start der Beschleunigung bis zum Senden und anschließendem Empfang des Signals ist dann in allen Fällen

$$t_{K,T} = t_K + t_{K,R} \tag{B.12}$$

Hierbei ist zu berücksichtigen, dass aus Sicht des Beobachters B die bei A eintreffenden Signale mit der Gleichung

$$t_{K,T}(v_0) = \frac{t_K + t_{K,R}}{\gamma(v_0)} \tag{B.13}$$

korrigiert werden müssen um den Effekt um zu berücksichtigen, dass für A aus Sicht von B die Zeit um den Faktor $\gamma(v_0)$ langsamer abläuft.

Mit den hier dargestellten Beziehungen ist es möglich, die Werte für die Empfangszeiten von relativ zueinander bewegten Beobachtern zu ermitteln. Hierzu werden zunächst die Zeitabstände bestimmt, mit der das beschleunigte System S die Signale aussendet. Während diese subjektiv innerhalb des Systems definitionsgemäß Δt_S sind, können von einem nicht beschleunigten Beobachter anhand der Gleichungen die Werte für den Signalabstand bestimmt werden. Außerdem lässt sich damit die Entfernung von S beim Senden berechnen. Somit können also die Gesamtzeiten für die Ankunft der Signale für einen beliebig bewegten Beobachter ermittelt werden.

In Abb. B.1 ist der Programmablaufplan zur numerischen Berechnung von v_N, t_N, t_T und x_N gemäß der genannten Gleichungen dargestellt. (Es werden durchgehend die Werte für t_K und x_K berechnet; da nur die letzten Ergebnisse betrachtet werden entsprechen diese t_N und x_N). Zusätzlich wurde auch die für einen relativ hierzu bewegten Beobachter feststellbare Beschleunigung a_N ermittelt, der von der subjektiv im bewegten System S messbaren Beschleunigung a_S abweicht. Wie bereits in Kap. 6.4.1 dargestellt wurde, muss die subjektiv eingestellte Beschleunigung und die von einem dazu mit der Geschwindigkeit v bewegten externen Beobachter um den Faktor $\gamma^3(v)$ abweichen. Um diesen theoretisch zu erwartenden Effekt zu verifizieren, wurde daher der Wert $\gamma^3 a_N$ ebenfalls aus den Daten berechnet. Es zeigt sich eine sehr genaue Übereinstimmung zwischen a_S und $\gamma^3 a_N$.

In Tab. B.1 sind die für die Berechnung mit VBA (Visual Basic) benutzten Formelzeichen den im Text verwendeten zugeordnet. Der VBA-Programm-Code ist in Abb. B.1 dargestellt. Das Programm wurde so aufgebaut, dass die Ausgangsgeschwindigkeit v_0, sowie die subjektiv gültige Beschleunigung a_S und Gesamtdauer des Versuchs t_S vorgegeben werden können. Außerdem kann die Anzahl der vorgesehenen Iterationsschritte N frei gewählt werden, wodurch eine wichtige Einflussgröße gegeben ist. Mit dem VBA-Programm wurden Werte bis zu $\mathrm{N} = 10^7$ untersucht. Diese Berechnungen sind nur mit solchen Programmen sinnvoll, da bei einer konventionellen Tabellenkalkulation jeder Iterationsschritt gesonderte Programmfelder erfordert und dies zu enormen Dateigrößen führen würde.

In Tab. B.2 sind für die Bereiche a) bis c) die Ergebnisse aus Berechnungen mit den Randbedingungen $a_S = 10\ \mathrm{m/s^2}$, $t_S = 1000\mathrm{s}$ dargestellt. Als Ausgangsgeschwindigkeit wurden Werte von $v_0 = 0$, $v_0 = 369\ \mathrm{km/s}$ und $v_0 = 0{,}5c$ eingesetzt. Für alle Ergebnisse wurden δ-Werte nach dem Schema

$$\delta v_T = \frac{v_T(\mathrm{K})}{v_T(\mathrm{K}-1)} - 1 \qquad \text{(B.14)}$$

ermittelt und gegenübergestellt, wobei K in diesem Fall eine Zehnerpotenz entsprechend den Angaben in der Tabelle repräsentiert.

Die durchgeführten Berechnungen zeigen, dass in einem Bereich von etwa 10^2 bis 10^4 die Unterschiede zwischen den Ergebnissen ein Minimum erreichen. Dies lässt darauf schließen, dass diese Zonen den größten Vertrauensbereich aufweisen. Dieser ist primär abhängig vom gewählten Berechnungssystem; als Verfahren wurde hier Microsoft Excel© genutzt, dass eine Genauigkeit von 15 Stellen aufweist. Bei Rechnersystemen mit höherer Genauigkeit sind hier andere Ergebnisse zu erwarten. Die Gesamtqualität der Berechnungen lässt sich jedoch erst im Vergleich zwischen analytischem und numerischem Verfahren überprüfen, der im Anschluss vorgenommen wird.

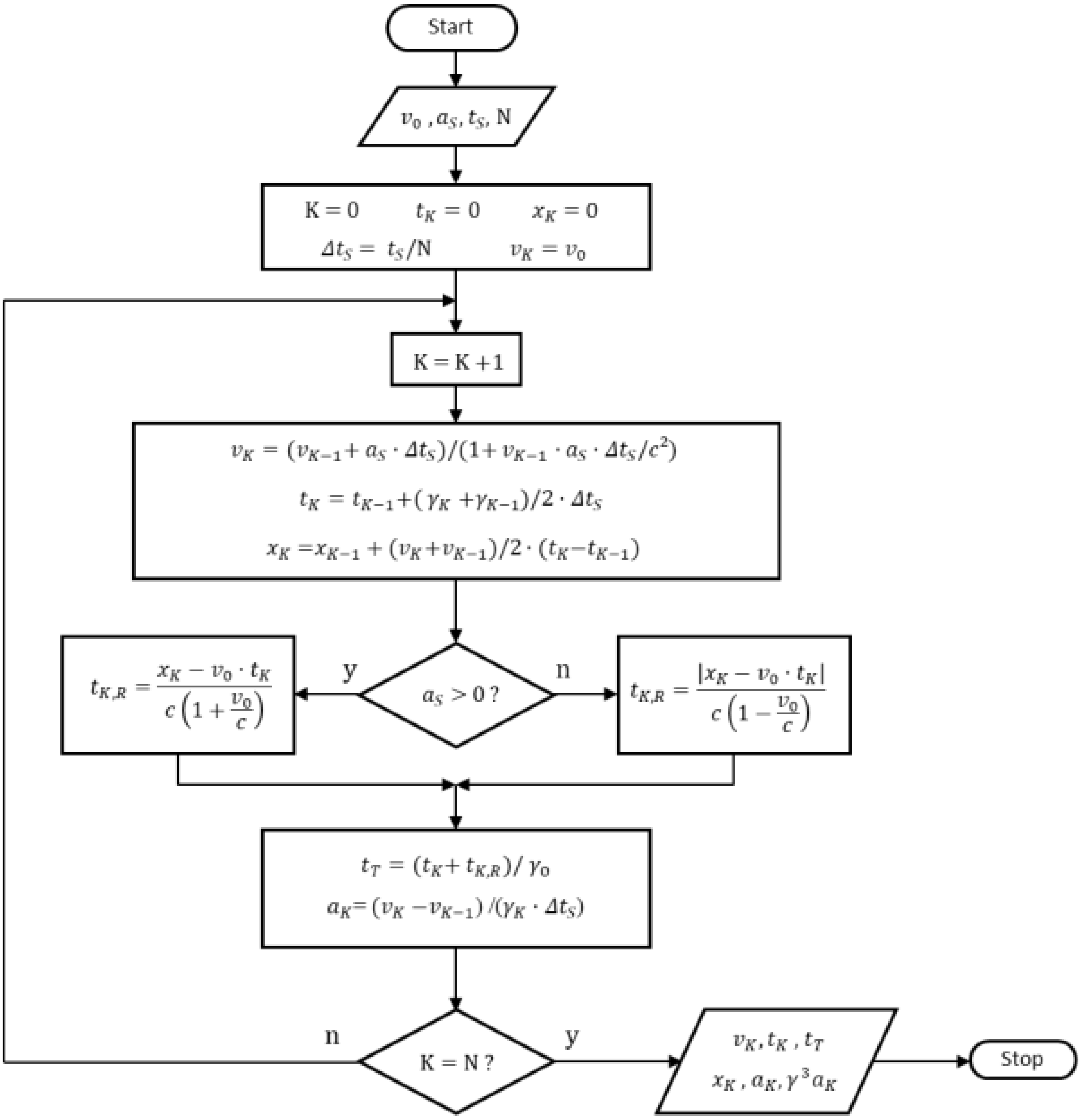


Abb. B.1: Programmablaufplan des Kalkulationsprozesses

Wert	VBA-Code	Wert	VBA-Code	Wert	VBA-Code
v_0	`v0`	a_S	`a0`	t_S	`tS`
Δt_S	`dtS`	t_K	`tK`	t_{K-1}	`tKm1`
x_K	`xK`	v_K	`vK`	v_{K-1}	`vKm1`
γ_K	`GaK`	γ_{K-1}	`GaKm1`	$t_{K,R}$	`tKR`
t_T	`tT`	a_K	`aK`	$\gamma^3 a_K$	`aKGa3`

Tab. B.1: Formelzeichen und dafür genutzte VBA-Codes

```
Sub B()
Dim c, v0, a0, aK, tS, dtS, tK, tKm1, xK, vK, vKm1, GaK, GaKm1 As Double
Dim aKGa3, tKR, tT, vT, K, N As Double
'Eingaben
    v0 = 299792.458 / 2 'Ausgangsgeschwindigkeit in km/s
    a0 = 10             'Beschleunigung in m/s²
    N = 1000            'Anzahl Iterationsschritte
    tS = 1000           'Zeit bis zum Abstrahlen eines Signals in s
'Start Berechnung
    c = 299792.458       'Lichtgeschwindigkeit in km/s
    a0 = a0 / 1000       'Beschleunigung in km/s²
    dtS = tS / N
    tK = 0
    xK = 0
    vK = v0
    For K = 1 To N
        vKm1 = vK
        tKm1 = tK
        GaKm1 = 1 / (1 - (vKm1 / c) ^ 2) ^ 0.5
        vK = (vK + a0 * dtS) / (1 + vK * a0 * dtS / c ^ 2)
        GaK = 1 / (1 - (vK / c) ^ 2) ^ 0.5
        tK = tK + (GaKm1 + GaK) / 2 * dtS
        xK = xK + (vK + vKm1) / 2 * (tK - tKm1)
            If a0 > 0 Then
            tKR = (xK - tK * v0) / c / (1 + v0 / c)
            Else
            tKR = Abs((xK - tK * v0) / c / (1 - v0 / c))
            End If
        tT = (tK + tKR) * (1 - (v0 / c) ^ 2) ^ 0.5
    aK = (vK - vKm1) / (GaK * dtS) * 1000
    aKGa3 = aK * GaK ^ 3
    vT = vK - v0
    Next K
'Ergebnis für einen Beobachter mit Geschwindigkeit v0 zum Beginn des Versuchs
    Debug.Print "vT", "vK", "tN", "xN", "aN", "aNGa3"
    Debug.Print vT, vK, tT, xK, aK, aKGa3
End Sub
```

Abb. B.2: VBA Programm-Code für den Kalkulationsprozess B aus Abb. B1

Grundsätzlich lässt sich feststellen, dass alle δ-Werte bei $v_0 = 0$ sehr gering sind und dann bei höheren Werten leicht ansteigen. Insbesondere die Werte für t_T, die sich für eine experimentelle Überprüfung gut eignen würden, unterscheiden sich innerhalb eines Bereiches mit konstanter Beschleunigung a_S kaum zwischen den einzelnen Werten von v_0. Auch zwischen den unterschiedlichen Beschleunigungswerten sind die Unterschiede so gering, dass nicht von einem systematischen Einfluss auszugehen ist, sondern die Effekte auf Einflüsse der numerischen Berechnung zurückzuführen sind.

Die Abweichungen zwischen den Ergebnissen für die gewählten Iterationsschritte zwischen 1 und 10^7 zeigen, dass keine systematischen Abweichungen vorliegen. Im Bereich von 10^3 weisen die Ergebnisse eine hohe Stabilität und die geringsten Unterschiede auf; für vergleichende Betrachtungen eignen sie sich daher besonders.

Der zusätzliche Wert von $v_0 = 369$ km/s wurde deshalb gewählt, weil er der Geschwindigkeit der Sonne gegenüber der kosmischen Hintergrundstrahlung entspricht und deshalb, falls sich bei den Berechnungen ein Effekt zeigen würde, Basis für weitere Betrachtungen sein könnte (vgl. auch Kap. 1.7).

Es ist aber festzustellen, dass bei keiner dieser Auswertungen ein nennenswerter Unterschied erkennbar wird und somit die subjektiv ermittelten Beobachtungen zwischen sich unterschiedlich bewegenden Beobachtern übereinstimmen. Dies gilt auch für die hohe Geschwindigkeit von $v_0 = 0{,}5c$.

Ergänzend ist noch zu erwähnen, dass die hier verwendeten Werte von t_N, x_N etc. ausschließlich wegen der numerischen Rechenmethode so benannt wurden und den analytisch bestimmten Angaben für t_A bzw. x_A entsprechen. Auch diese Werte beziehen sich demnach auf die Messergebnisse des zum Beginn eines Versuchs mit gleicher Geschwindigkeit wie S bewegten Beobachters A.

K	N	v_T	t_N	t_T	x_N	$\gamma^3 a_N$
1	1	10,0000000000000	1000,0000027816	1000,01667848293	5000,00000139081	10,0000000111265
2	10	9,99999999632825	1000,0000018637	1000,01667839113	5000,00000047288	10,0000000011126
3	10^2	9,99999999629152	1000,0000018545	1000,01667839021	5000,00000046369	10,0000000001113
4	10^3	9,99999999629152	1000,0000018545	1000,01667839020	5000,00000046369	10,0000000000098
5	10^4	9,99999999629107	1000,0000018544	1000,01667839020	5000,00000046378	10,0000000000010
6	10^5	9,99999999628186	1000,0000018545	1000,01667839021	5000,00000046244	9,99999999991214
7	10^6	9,99999999612586	1000,0000018732	1000,01667839208	5000,00000044603	10,0000000000898
8	10^7	9,99999999923743	1000,0000024389	1000,01667844866	5000,00000204189	9,99999998587893
		δv_T	δt_N	δt_T	δx_N	$\delta \gamma^3 a_N$
1/2		$3{,}67 \cdot 10^{-10}$	$9{,}18 \cdot 10^{-11}$	$9{,}18 \cdot 10^{-11}$	$1{,}84 \cdot 10^{-10}$	$1{,}00 \cdot 10^{-9}$
2/3		$3{,}67 \cdot 10^{-12}$	$9{,}20 \cdot 10^{-13}$	$9{,}20 \cdot 10^{-13}$	$1{,}84 \cdot 10^{-12}$	$1{,}00 \cdot 10^{-10}$
3/4		0	0	$9{,}99 \cdot 10^{-15}$	0	$1{,}01 \cdot 10^{-11}$
4/5		$4{,}49 \cdot 10^{-14}$	$9{,}99 \cdot 10^{-15}$	0	$-1{,}80 \cdot 10^{-14}$	$8{,}88 \cdot 10^{-13}$
5/6		$9{,}21 \cdot 10^{-13}$	$-9{,}99 \cdot 10^{-15}$	$-9{,}99 \cdot 10^{-15}$	$2{,}68 \cdot 10^{-13}$	$8{,}88 \cdot 10^{-12}$
6/7		$1{,}56 \cdot 10^{-11}$	$-1{,}87 \cdot 10^{-12}$	$-1{,}87 \cdot 10^{-12}$	$3{,}28 \cdot 10^{-12}$	$-1{,}78 \cdot 10^{-11}$
7/8		$-3{,}11 \cdot 10^{-10}$	$-5{,}66 \cdot 10^{-11}$	$-5{,}66 \cdot 10^{-11}$	$-3{,}19 \cdot 10^{-10}$	$1{,}42 \cdot 10^{-9}$

a) $v_0 = 0,\ \ a_S = 10\mathrm{m/s^2},\ \ t_S = 1000\mathrm{s}$

K	N	v_T	t_N	t_T	x_N	$\gamma^3 a_N$
1	1	378,999984439478	1000,00077830515	1000,01667848259	374000,283305861	10,0000004216944
2	10	378,999984435807	1000,00077821336	1000,01667839113	374000,283372686	10,0000000421697
3	10^2	378,999984435772	1000,00077821244	1000,01667839021	374000,283373356	10,0000000042204
4	10^3	378,999984435760	1000,00077821243	1000,01667839020	374000,283373357	10,0000000004517
5	10^4	378,999984435533	1000,00077821243	1000,01667839020	374000,283373242	9,99999999988323
6	10^5	378,999984433259	1000,00077821243	1000,01667839020	374000,283372125	10,0000000010201
7	10^6	378,999984411821	1000,00077821244	1000,01667839018	374000,283362434	9,99999998396706
8	10^7	378,999984156412	1000,00077821289	1000,01667839010	374000,283206699	10,0000000408106
		δv_T	δt_N	δt_T	δx_N	$\delta \gamma^3 a_N$
1/2		$9{,}69 \cdot 10^{-12}$	$9{,}18 \cdot 10^{-11}$	$9{,}15 \cdot 10^{-11}$	$-1{,}79 \cdot 10^{-10}$	$3{,}80 \cdot 10^{-8}$
2/3		$9{,}10 \cdot 10^{-14}$	$9{,}20 \cdot 10^{-13}$	$9{,}20 \cdot 10^{-13}$	$-1{,}79 \cdot 10^{-12}$	$3{,}79 \cdot 10^{-9}$
3/4		$3{,}09 \cdot 10^{-14}$	$9{,}99 \cdot 10^{-15}$	$9{,}99 \cdot 10^{-15}$	$-2{,}66 \cdot 10^{-15}$	$3{,}77 \cdot 10^{-10}$
4/5		$6{,}01 \cdot 10^{-13}$	0	0	$3{,}07 \cdot 10^{-13}$	$5{,}68 \cdot 10^{-11}$
5/6		$6{,}00 \cdot 10^{-12}$	0	0	$2{,}99 \cdot 10^{-12}$	$-1{,}14 \cdot 10^{-10}$
6/7		$5{,}66 \cdot 10^{-11}$	$-9{,}99 \cdot 10^{-15}$	$2{,}00 \cdot 10^{-14}$	$2{,}59 \cdot 10^{-11}$	$1{,}71 \cdot 10^{-9}$
7/8		$6{,}74 \cdot 10^{-10}$	$-4{,}50 \cdot 10^{-13}$	$7{,}99 \cdot 10^{-14}$	$4{,}16 \cdot 10^{-10}$	$-5{,}68 \cdot 10^{-9}$

b) $v_0 = 369\ \mathrm{km/s},\ \ a_S = 10\mathrm{m/s^2},\ \ t_S = 1000\mathrm{s}$

K	N	v_T	t_N	t_T	x_N	$\gamma^3 a_N$
1	1	149903,728874916	1154,71016786646	1000,01667841339	173091029,842051	10,0001667931727
2	10	149903,728874913	1154,71016776046	1000,01667839043	173091029,861909	10,0000166791061
3	10^2	149903,728874913	1154,71016775940	1000,01667839021	173091029,862108	10,0000016684019
4	10^3	149903,728874922	1154,71016775940	1000,01667839022	173091029,862117	10,0000002015203
5	10^4	149903,728874803	1154,71016775925	1000,01667838996	173091029,862026	9,99999992987018
6	10^5	149903,728875378	1154,71016775999	1000,01667839124	173091029,862469	10,0000022582798
7	10^6	149903,728863738	1154,71016774494	1000,01667836518	173091029,853446	9,99998285456124
8	10^7	149903,729001552	1154,71016792619	1000,01667867908	173091029,962107	10,0000216670928
		δv_T	δt_N	δt_T	δx_N	$\delta \gamma^3 a_N$
1/2		$1{,}84 \cdot 10^{-14}$	$9{,}18 \cdot 10^{-11}$	$2{,}30 \cdot 10^{-11}$	$-1{,}15 \cdot 10^{-10}$	$1{,}50 \cdot 10^{-5}$
2/3		0	$9{,}18 \cdot 10^{-13}$	$2{,}20 \cdot 10^{-13}$	$-1{,}15 \cdot 10^{-12}$	$1{,}50 \cdot 10^{-6}$
3/4		$-5{,}84 \cdot 10^{-14}$	0	$-9{,}99 \cdot 10^{-15}$	$-5{,}20 \cdot 10^{-14}$	$1{,}47 \cdot 10^{-7}$
4/5		$7{,}93 \cdot 10^{-13}$	$1{,}30 \cdot 10^{-13}$	$2{,}60 \cdot 10^{-13}$	$5{,}26 \cdot 10^{-13}$	$2{,}72 \cdot 10^{-8}$
5/6		$-3{,}84 \cdot 10^{-12}$	$-6{,}41 \cdot 10^{-13}$	$-1{,}28 \cdot 10^{-12}$	$-2{,}56 \cdot 10^{-12}$	$-2{,}33 \cdot 10^{-7}$
6/7		$7{,}77 \cdot 10^{-11}$	$1{,}30 \cdot 10^{-11}$	$2{,}61 \cdot 10^{-11}$	$5{,}21 \cdot 10^{-11}$	$1{,}94 \cdot 10^{-6}$
7/8		$-9{,}19 \cdot 10^{-10}$	$-1{,}57 \cdot 10^{-10}$	$-3{,}14 \cdot 10^{-10}$	$-6{,}28 \cdot 10^{-10}$	$-3{,}88 \cdot 10^{-6}$

c) $v_0 = 0{,}5c,\ a_S = 10\text{m/s}^2,\ t_S = 1000\text{s}$

Tab. B.2: Werte für v_T, t_A (bzw. t_N), t_T, x_N und $\gamma^3 a_N$ aus Berechnungen des Programms B dargestellt in Abb. B.2 in Abhängigkeit von der Anzahl an Iterationsschritten N. Angaben für v_T in km/s, t_A bzw. t_T in s, x_N in km und a_N in m/s^2.

B.3 Verbesserung der Genauigkeit durch Nutzung einer Taylorentwicklung

Wenn die dargestellten analytischen Berechnungen für sehr kleine Werte für Zeit bzw. Geschwindigkeit vorgenommen werden sollen, ergeben sich in Abhängigkeit von der Berechnungsgenauigkeit größere Differenzen. Dies betrifft insbesondere die Gl. (6.74) für die zurückgelegte Entfernung

$$x_A = \frac{c^2}{a_S}\left\{\left(1 - \frac{v_A^2}{c^2}\right)^{-1/2} - 1\right\} = \frac{c^2}{a_S}\,(\gamma - 1) \qquad (6.74)$$

Bei kleinen Werten für v_A entsteht der Effekt, dass der Wert für γ nur geringfügig von 1 abweicht und wegen der Differenzbildung zu 1 ungenau wird. Im vorliegenden Fall wurde das Programm Microsoft Excel© mit einer Genauigkeit von 15 Stellen genutzt, und so kommt es bei Werten für v_A unterhalb von ca. 400 km/s zu Abweichungen, die bei kleinen Werten sehr hoch werden können. In diesem Fall ist es empfehlenswert, statt der Gl. (6.74) eine Taylorentwicklung für γ zu benutzen, die als ersten Wert die „1" enthält. Diese lautet:

$$\gamma = \left(1 - \frac{v_A^2}{c^2}\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\frac{v_A^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v_A^4}{c^4} + \frac{15}{48}\frac{v_A^6}{c^6} + + \cdots \qquad (\text{B}.15)$$

$$1. \qquad 2. \qquad 3. \qquad 4. \qquad \text{Taylor} - \text{Glied}$$

In der folgenden Tabelle B.3 wird dargestellt, wie sich Unterschiede für verschiedene Versuchszeiten t_S bzw. Geschwindigkeiten von v_A auswirken.

t_S	v_A	t_A	$x_A(1)$	$x_A(2)$	$x_A(3)$
1	0,0100000000000000	1,00000000000000	0,00399127477173885	0,0050000000000000	0,0050000000000000
10	0,0999999999999963	10,0000000000002	0,498909346467356	0,500000000000004	0,500000000000004
100	0,999999999996291	100,000000000185	50,0006947029584	50,0000000000463	50,0000000000463
1.000	9,99999999629117	1000,00000018544	5000,00161862472	5000,0000046360	5000,0000046360
10.000	99,9999962911666	10000,0001854417	500000,004207119	500000,004636038	500000,004636042
20.000	199,999970329337	20000,0014835334	2000000,07470196	2000000,07417642	2000000,07417667
40.000	399,999762634824	40000,0118682683	8000001,18686648	8000001,18681095	8000001,18682679
60.000	599,999198893243	60000,0400554100	18000006,0086520	18000006,0081306	18000006,0083111
80.000	799,998101082647	80000,0949461719	32000018,9903299	32000018,9882180	32000018,9892321
100.000	999,996291182986	100000,185441779	50000046,3602845	50000046,3565675	50000046,3604362
200.000	1999,97032986004	200001,483536709	200000741,768963	200000741,520219	200000741,767795
1.000.000	9996,29281639030	1000185,45199287	5000463621,38578	5000459757,50365	5000463617,62560

Tab. B.3: Werte für v_A, t_A und x_A in Abhängigkeit von t_S nach verschiedenen Verfahren
$x_A(1)$: Gl. (6.74)
$x_A(2)$: Gl. (B.15) Taylorglieder 1–3
$x_A(3)$: Gl. (B.15) Taylorglieder 1–4
Optimale Werte für x_A grün gekennzeichnet. Ergebnisse in km und s.

Für t_S-Werte bis 20.000s hat demnach die Berechnung gemäß $x_A(3)$ unter Nutzung der ersten 4 Taylorglieder die höchste Genauigkeit, bis 1.000s ist auch $x_A(2)$ ausreichend genau. Bei Werten ab ca. 40.000s ist die Gl. (6.74) vorzuziehen (oder es müssten noch weitere Taylorglieder hinzugefügt werden).

B.4 Ergebnisvergleich der unterschiedlichen Verfahren

Abschließend sollen die aus den verschiedenen Verfahren berechneten Ergebnisse verglichen werden. Neben den hier dargestellten numerischen und analytischen Verfahren wurden zusätzlich die numerisch gewonnene Ergebnisse aus Anlage C auf Basis der relativistischen Raketengleichung hinzugefügt. Während bei den ersten beiden Berechnungen eine konstante Beschleunigung zur Voraussetzung gemacht ist, ergibt sich diese Situation bei der relativistischen Raketengleichung für den Sonderfall, dass der Ausstoß der Stützmasse im Verhältnis zur verbleibenden Raketenmasse konstant gehalten wird.
In der Tab. B.4 sind die nach den unterschiedlichen Verfahren ermittelten Werte für $v_T = v_N - v_0$, t_A, t_T und x_N für die Ausgangsgeschwindigkeiten $v_0 = 0$ sowie 369 km/s und 0,5c dargestellt. Die unter A aufgeführten Werte wurden analytisch unter Nutzung der Gleichungen Gl. (6.60) bis (6.74) sowie (B.15) berechnet, B sind die numerischen Werte entsprechend Anlage B und C stammen aus Anlage C, Typ „B1“. Der Vergleich zeigt, dass die Endgeschwindigkeiten v_T für A und B sehr gut übereinstimmen, diese aber für die Variante C, insbesondere bei höheren Ausgangswerten, etwas abweicht. Bei A ergeben sich darüber hinaus im Bereich kleiner Geschwindigkeiten etwas höhere Werte für x_N. Generell lässt sich aber sagen, dass die Übereinstimmung der Ergebnisse trotz der völlig verschiedenen Ansätze gut ist.

Des Weiteren wurden noch die Werte für $\gamma^3 a_N$ beigefügt. Es zeigt sich in allen Fällen, dass sie sehr genau den subjektiv im beschleunigten Beobachter gelten Wert von a_S entsprechen.

a)	St.	v_A	t_A	t_T	x_A	a_S
A	(1)	0	0		0	10
A	(2)	9,99999999629117	1000,00000018544		5000,0000046361	10
A	Diff.	9,99999999629117	1000,00000018544	1000,01667839020	5000,0000046361	
	N	v_T	t_N	t_T	x_N	$\gamma^3 a_N$
B	10^2	9,99999999629152	1000,00000018545	1000,01667839021	5000,0000046369	10,0000000001113
B	10^3	9,99999999629152	1000,00000018545	1000,01667839020	5000,0000046369	10,0000000000098
B	10^4	9,99999999629107	1000,00000018544	1000,01667839020	5000,0000046378	10,0000000000010
B	10^5	9,99999999628186	1000,00000018545	1000,01667839021	5000,0000046244	9,99999999991214
	N	δv_T	δt_N	δt_T	δx_N	$\delta\gamma^3 a_N$
B	10^2	$-3{,}52 \cdot 10^{-14}$	$-8{,}22 \cdot 10^{-15}$	$-6{,}78 \cdot 10^{-15}$	$-1{,}69 \cdot 10^{-14}$	$-1{,}11 \cdot 10^{-11}$
B	10^3	$-3{,}52 \cdot 10^{-14}$	$-8{,}22 \cdot 10^{-15}$	0	$-1{,}69 \cdot 10^{-14}$	$-9{,}84 \cdot 10^{-13}$
B	10^4	$9{,}77 \cdot 10^{-15}$	0	0	$-3{,}50 \cdot 10^{-14}$	$-9{,}65 \cdot 10^{-14}$
B	10^5	$9{,}31 \cdot 10^{-13}$	$-8{,}22 \cdot 10^{-15}$	$-6{,}78 \cdot 10^{-15}$	$2{,}34 \cdot 10^{-13}$	$8{,}79 \cdot 10^{-12}$
	N	v_T	t_N	t_T	x_N	$\gamma^3 a_N$
C	10^2	9,99999999608546	1000,00000018545	1000,01667839021	5000,00000054144	9,99999999883114
C	10^3	9,99999999607074	1000,00000018544	1000,01667839020	5000,00000053831	9,99999999868366
C	10^4	9,99999999607296	1000,00000018544	1000,01667839020	5000,00000053928	9,99999999869584
C	10^5	9,99999999610921	1000,00000018545	1000,01667839021	5000,00000055217	9,99999999845206
	N	δv_T	δt_N	δt_T	δx_N	$\delta\gamma^3 a_N$
C	10^2	$2{,}06 \cdot 10^{-11}$	$-8{,}22 \cdot 10^{-15}$	$-6{,}78 \cdot 10^{-15}$	$3{,}24 \cdot 10^{-7}$	$1{,}17 \cdot 10^{-10}$
C	10^3	$2{,}20 \cdot 10^{-11}$	0	0	$3{,}24 \cdot 10^{-7}$	$1{,}32 \cdot 10^{-10}$
C	10^4	$2{,}19 \cdot 10^{-11}$	0	0	$3{,}24 \cdot 10^{-7}$	$1{,}30 \cdot 10^{-10}$
C	10^5	$1{,}82 \cdot 10^{-11}$	$-8{,}22 \cdot 10^{-15}$	$-6{,}78 \cdot 10^{-15}$	$3{,}24 \cdot 10^{-7}$	$1{,}55 \cdot 10^{-10}$

b)	St.	v_A	t_A	t_T	x_A	a_S
A	(1)	369	36900,0279516977		6808057,73563331	10
A	(2)	378,99998443578	37900,0287299112		7182058,01900707	10
A	Diff.	9,99998443578	1000,0007782135	1000,01667839124	374000,28337376	
	N	v_T	t_N	t_T	x_N	$\gamma^3 a_N$
B	10^2	9,99998443577	1000,0007782124	1000,01667839021	374000,28337336	10,0000000042204
B	10^3	9,99998443576	1000,0007782124	1000,01667839020	374000,28337336	10,0000000004517
B	10^4	9,99998443553	1000,0007782124	1000,01667839020	374000,28337324	9,99999999988323
B	10^5	9,99998443326	1000,0007782124	1000,01667839020	374000,28337213	10,0000000010201
	N	δv_T	δt_N	δt_T	δx_N	$\delta\gamma^3 a_N$
B	10^2	$2{,}09 \cdot 10^{-14}$	$1{,}04 \cdot 10^{-12}$	$1{,}03 \cdot 10^{-12}$	$2{,}87 \cdot 10^{-12}$	$-4{,}22 \cdot 10^{-10}$
B	10^3	$5{,}17 \cdot 10^{-14}$	$1{,}05 \cdot 10^{-12}$	$1{,}04 \cdot 10^{-12}$	$1{,}08 \cdot 10^{-12}$	$-4{,}52 \cdot 10^{-11}$
B	10^4	$6{,}52 \cdot 10^{-13}$	$1{,}05 \cdot 10^{-12}$	$1{,}04 \cdot 10^{-12}$	$1{,}08 \cdot 10^{-12}$	$1{,}17 \cdot 10^{-11}$
B	10^5	$6{,}65 \cdot 10^{-12}$	$1{,}05 \cdot 10^{-12}$	$1{,}04 \cdot 10^{-12}$	$1{,}38 \cdot 10^{-13}$	$-1{,}02 \cdot 10^{-10}$
	N	v_T	t_N	t_T	x_N	$\gamma^3 a_N$
C	10^2	9,99998435551	1000,0007782124	1000,01667839008	374000,28333340	9,99999992287606
C	10^3	9,99998435367	1000,0007782124	1000,01667839007	374000,28333240	9,99999991716842
C	10^4	9,99998435376	1000,0007782124	1000,01667839006	374000,28333254	9,99999991716842
C	10^5	9,99998435645	1000,0007782124	1000,01667839007	374000,28333389	9,99999992496930
	N	δv_T	δt_N	δt_T	δx_N	$\delta\gamma^3 a_N$
C	10^2	$2{,}12 \cdot 10^{-10}$	$1{,}04 \cdot 10^{-12}$	$1{,}17 \cdot 10^{-12}$	$-5{,}74 \cdot 10^{-10}$	$7{,}71 \cdot 10^{-9}$
C	10^3	$2{,}17 \cdot 10^{-10}$	$1{,}05 \cdot 10^{-12}$	$1{,}18 \cdot 10^{-12}$	$1{,}10 \cdot 10^{-10}$	$8{,}28 \cdot 10^{-9}$
C	10^4	$2{,}16 \cdot 10^{-10}$	$1{,}05 \cdot 10^{-12}$	$1{,}19 \cdot 10^{-12}$	$1{,}10 \cdot 10^{-10}$	$8{,}28 \cdot 10^{-9}$
C	10^5	$2{,}09 \cdot 10^{-10}$	$1{,}05 \cdot 10^{-12}$	$1{,}18 \cdot 10^{-12}$	$1{,}07 \cdot 10^{-10}$	$7{,}50 \cdot 10^{-9}$

c)	St.	v_A	t_A	t_T	x_A	a_S
A	(1)	149896,229000000	17308525,6327320		1390379100217,26	10
A	(2)	149903,728874913	17309680,3428997		1390552191247,12	10
A	Diff.	7,499874913	1154,7101678	1000,01667838490	173091029,86	
	N	v_T	t_N	t_T	x_N	$\gamma^3 a_N$
B	10^2	7,499874913	1154,7101678	1000,01667839021	173091029,86	10,0000016684019
B	10^3	7,499874922	1154,7101678	1000,01667839022	173091029,86	10,0000002015203
B	10^4	7,499874803	1154,7101678	1000,01667838996	173091029,86	9,99999992987018
B	10^5	7,499875378	1154,7101678	1000,01667839124	173091029,86	10,0000022582798
	N	δv_T	δt_N	δt_T	δx_N	$\delta\gamma^3 a_N$
B	10^2	$-4{,}22 \cdot 10^{-15}$	$-4{,}29 \cdot 10^{-12}$	$-5{,}31 \cdot 10^{-12}$	$-7{,}33 \cdot 10^{-12}$	$-1{,}67 \cdot 10^{-7}$
B	10^3	$-6{,}27 \cdot 10^{-14}$	$-4{,}29 \cdot 10^{-12}$	$-5{,}32 \cdot 10^{-12}$	$-7{,}38 \cdot 10^{-12}$	$-2{,}02 \cdot 10^{-8}$
B	10^4	$7{,}30 \cdot 10^{-13}$	$-4{,}16 \cdot 10^{-12}$	$-5{,}06 \cdot 10^{-12}$	$-6{,}85 \cdot 10^{-12}$	$7{,}01 \cdot 10^{-9}$
B	10^5	$-3{,}10 \cdot 10^{-12}$	$-4{,}81 \cdot 10^{-12}$	$-6{,}34 \cdot 10^{-12}$	$-9{,}41 \cdot 10^{-12}$	$-2{,}26 \cdot 10^{-7}$
	N	v_T	t_N	t_T	x_N	$\gamma^3 a_N$
C	10^2	7,499850523	1154,7101677	1000,01667833597	173091029,84	9,99996914760263
C	10^3	7,499849967	1154,7101677	1000,01667833473	173091029,84	9,99996690196617
C	10^4	7,499849989	1154,7101677	1000,01667833478	173091029,84	9,99996743452330
C	10^5	7,499850786	1154,7101677	1000,01667833657	173091029,84	9,99996654696513
	N	δv_T	δt_N	δt_T	δx_N	$\delta\gamma^3 a_N$
C	10^2	$3{,}25 \cdot 10^{-6}$	$2{,}28 \cdot 10^{-11}$	$4{,}89 \cdot 10^{-11}$	$1{,}01 \cdot 10^{-10}$	$3{,}09 \cdot 10^{-6}$
C	10^3	$3{,}33 \cdot 10^{-6}$	$2{,}35 \cdot 10^{-11}$	$5{,}02 \cdot 10^{-11}$	$1{,}04 \cdot 10^{-10}$	$3{,}31 \cdot 10^{-6}$
C	10^4	$3{,}32 \cdot 10^{-6}$	$2{,}34 \cdot 10^{-11}$	$5{,}01 \cdot 10^{-11}$	$1{,}04 \cdot 10^{-10}$	$3{,}26 \cdot 10^{-6}$
C	10^5	$3{,}22 \cdot 10^{-6}$	$2{,}25 \cdot 10^{-11}$	$4{,}83 \cdot 10^{-11}$	$9{,}99 \cdot 10^{-11}$	$3{,}35 \cdot 10^{-6}$

Tab. B.4: Berechnete Werte für v_T, t_A, t_T, x_N und $\gamma^3 a_N$ nach verschiedenen Verfahren
A: Analytisch gemäß Kalkulation Gl. (6.60) bis (6.74)
B: Numerisch nach VBA-Code gemäß Abb. B.2
C: Numerisch nach VBA-Code gemäß Abb. C.2, Typ „B1"
$a_S = 10\mathrm{m/s^2}$. $\Delta t_S = 1.000\mathrm{s}$. Ergebnisse in km und s.
a) $v_0 = 0$, Werte für x_A berechnet aus Gl. $(\mathrm{B}.15)$, $x_A(3)$ und $x_A(2)$
b) $v_0 = 369\ \mathrm{km/s}$, Werte für x_A berechnet aus Gl. $(\mathrm{B}.15)$, $x_A(3)$
c) $v_0 = 0{,}5c$, Werte für x_A berechnet aus Gl. (6.74)

Anlage C: Relativistische Raketengleichung

C.1 Ableitung der für die Berechnung relevanten Gleichungen

Zur numerischen Berechnung werden die in Kap. 6.4.2 abgeleiteten Beziehungen

$$p_K + \; p_K' = (m_{K-1} - \Delta m_{K-1}) v_K \gamma_k + \Delta m_{K-1} v_K' \gamma_K' = m_{K-1} v_{K-1} \gamma_{K-1} \tag{6.84}$$

und

$$v_K' = \frac{v_K + v_0'}{1 + \frac{v_K v_0'}{c^2}} \tag{6.85}$$

benutzt. Zur Bestimmung von v_K wird, wie bereits in anderen Kapiteln dargestellt, das Verfahren der Bisektion gewählt (siehe auch den Vergleich verschiedener numerischer Berechnungsverfahren in Anlage D). Grundlage ist die Impuls-Berechnung des Gesamtsystems, bestehend aus dem Impuls der Rakete p_K sowie dem des in Gegenrichtung austretenden Gases p_K' mit der Masse Δm_{K-1}, und die Ermittlung der hierzu korrespondierenden Geschwindigkeit v_K der Rakete. Aufgrund des Impulserhaltungssatzes muss der Gesamtwert vor und nach der Geschwindigkeitserhöhung durch den Masseausstoß konstant sein.

Zunächst werden geeignete Startwerte für $(v_+)_0$ und $(v_-)_0$ festgelegt; sinnvollerweise sollten diese weit auseinander liegen da sichergestellt sein muss, dass das Endergebnis v_K innerhalb dieser Grenzwerte liegt. Daraufhin wird ein neuer Index L definiert. Es wird nun der Mittelwert

$$(v_K)_{L=1} = \frac{(v_+)_0 + (v_-)_0}{2} \tag{C.01}$$

gebildet und für die hier berechnete Geschwindigkeit der Impuls gemäß Gl. (6.84) ermittelt. Es gelten dann die folgenden Festlegungen:

$$(p_K + \; p_K')_{L=1} > m_{K-1} v_{K-1} \gamma_{K-1} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (v_+)_1 = (v)_1 \\ (v_-)_1 = (v_-)_0 \end{cases} \tag{C.02}$$

$$(p_K + \; p_K')_{L=1} \leq m_{K-1} v_{K-1} \gamma_{K-1} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (v_+)_1 = (v_+)_0 \\ (v_-)_1 = (v)_1 \end{cases} \tag{C.03}$$

Diese Berechnung wird mit steigendem Index L so lange wiederholt, bis die Ergebnisse für v_+ und v_- gleich sind. Damit ist die Geschwindigkeit der Rakete, deren Masse nun um Δm_{K-1} reduziert ist, für diesen Teilschritt bestimmt. Anschließend erfolgt der nächste Schritt für $K = 2$ usw.

Die Zeit, die subjektiv innerhalb der Rakete zwischen dem Abstrahlen von 2 Signalen verstreicht ist definitionsgemäß Δt_0 also gilt für den externen Beobachter

$$\Delta t_K = \Delta t_0 \gamma_K \tag{C.04}$$

und der dabei zurückgelegte Weg ist

$$\Delta x_K = \Delta t_K v_K \tag{C.05}$$

Nach Aufsummierung der insgesamt N Einzelwerte folgt dann

$$t_N = \sum_{K=1}^{N} \Delta t_0 \gamma_K \tag{C.06}$$

$$x_N = \sum_{K=1}^{N} \Delta t_0 v_K \tag{C.07}$$

Zu einem beliebigen Zeitpunkt t_K wird vom beschleunigten System S ein Signal an die Beobachter A und B zurückgeschickt. A hat sich zu Versuchsbeginn mit gleicher Geschwindigkeit wie die Rakete bewegt und setzt seinen Weg ohne Beschleunigung fort, während B bezüglich A eine Geschwindigkeit v_0 misst. Da A sich aus Sicht von B während der Signalausbreitung bei Werten von $v_0 \neq 0$ entweder von S entfernt oder darauf zubewegt und die Werte für Beschleunigung a_K und Geschwindigkeit v_0 jeweils positiv oder negativ sein können, müssen für die Durchführung der Berechnungen unterschiedliche Regelungen getroffen werden. Dies wurde bereits in Kap. 6.4.1 mit den Gleichungen Gl. (6.60) bis (6.74) in ähnlicher Form durchgeführt, allerdings wurde dort die Beschleunigung der Rakete über den gesamten Versuchsablauf konstant gehalten. Im Unterschied dazu stellt hier die Austrittsrichtung des Antriebsgases v' die Differenzierungsgröße dar. Ist $v' > 0$ dann ist die Beschleunigung negativ, bei $v' < 0$ ist sie positiv. Die in Kap. 6.4.1 verwendeten Gleichungen müssen daher bezüglich der Randbedingungen modifiziert werden und lauten hier

$$v' < 0 \quad (a_S > 0): \qquad t_{K,R} = \frac{x_K - v_0 t_K}{c\left(1 + \frac{v_0}{c}\right)} \tag{C.08}$$

$$v' > 0 \quad (a_S < 0): \qquad t_{K,R} = \frac{|x_K - v_0 t_K|}{c\left(1 - \frac{v_0}{c}\right)} \tag{C.09}$$

Damit gilt für den Grenzfall

$$v_0 = 0: \qquad t_{K,R} = \frac{|x_K|}{c} \tag{C.10}$$

Allgemein folgt

$$t_T(K) = \frac{t_K + t_{K,R}}{\gamma(v_0)} \tag{C.11}$$

Für die ermittelte Endgeschwindigkeit v_N wird darüber hinaus zur besseren Vergleichbarkeit der Berechnungen für unterschiedliche Systemgeschwindigkeiten v_0 festgelegt

$$v_T = v_N - v_0 \tag{C.12}$$

C.2 Spezifische Festlegungen für die Berechnungen

Bei der Festlegung der Randbedingungen für die Berechnung ist das Verhältnis von ausströmender Masse pro Zeitintervall relevant. Um die Darstellung zu vereinfachen, wird hier die Ausgangsmasse der Rakete auf 1 normiert und das Standard-Zeitintervall, gültig subjektiv in der Rakete, auf $\Delta t_0 = 1\text{s}$ festgelegt. Daraus folgt z. B. für den Fall, wenn als Stützmasse 0,5% der Raketenmasse pro Sekunde ausströmt, dass nach dem Verbrauch von 50% der Masse insgesamt 100 Iterationsschritte durchgeführt worden sind. Dieser Fall wird für die durchgeführten Berechnungen in der Form

$$\Delta m_0 = \Delta t_0 \cdot 0{,}5\% \qquad\qquad \mathrm{N}/\Delta t_0 = 100 \qquad\qquad (\mathrm{C}.13)$$

angegeben. Wird dann z. B. die Anzahl der Iterationsschritte um den Faktor 10 erhöht, so reduzieren sich für die nachfolgenden Berechnungen das Zeitintervall und die ausströmende Stützmasse um den gleichen Faktor.

Die Startwerte der Geschwindigkeiten $(v_+)_{L=0}$ und $(v_-)_{L=0}$ für die Bisektion sollen weit auseinander liegen, der Mittelwert muss aber ungleich Null sein, da es sonst zu Störungen bei der Berechnung kommt; es wurden $(v_+)_{L=0} = 0{,}9c$ und $(v_-)_{L=0} = -0{,}8c$ gewählt.

C.3 Flussdiagramm und VBA Programm-Code des ablaufenden Prozesses

In einem Flussdiagramm (Abb. C.1) wird gezeigt, wie das ablaufende Programm gestaltet ist. Es handelt sich um einen Prozess mit zwei ineinander geschachtelten Iterationsschleifen; die laufenden Indizes wurden mit K und L bezeichnet. Die Darstellung des VBA Programm-Codes (Abb. C.2) folgt der Darstellung im Flussdiagramm. Die für die Formelzeichen verwendeten VBA-Codes sind nachfolgender Auslistung zu entnehmen.

Wert	VBA-Code	Wert	VBA-Code	Wert	VBA-Code
v_0	`v0`	v'_0	`v0g`	Δt_0	`dt0`
$(v_+)_L$	`vmax`	$(v_-)_L$	`vmin`	$(v_+)_{L=0}$	`vmax0`
$(v_-)_{L=0}$	`vmin0`	t_K	`tK`	t_{K-1}	`tKm1`
t_T	`tT`	x_K	`xK`	$t_{K,R}$	`tKR`
$(v_K)_L$	`vL`	v_{K-1}	`vKm1`	v_K	`vK`
m_K	`mK`	Δm_0	`dm0`	Δm_K	`dmK`
p_{K-1}	`pKm1`	$(p_K + p'_K)_L$	`pL`	v'_K	`vKg`
$(v_K)_{L-1}$	`vLm1`	$(v'_K)_L$	`vLg`	v_T	`vT`
a_K	`aK`	γ^3	`Ga3`	$\gamma^3 a_K$	`aKGa3`

Tab. C.1: Formelzeichen und dafür genutzte VBA-Codes

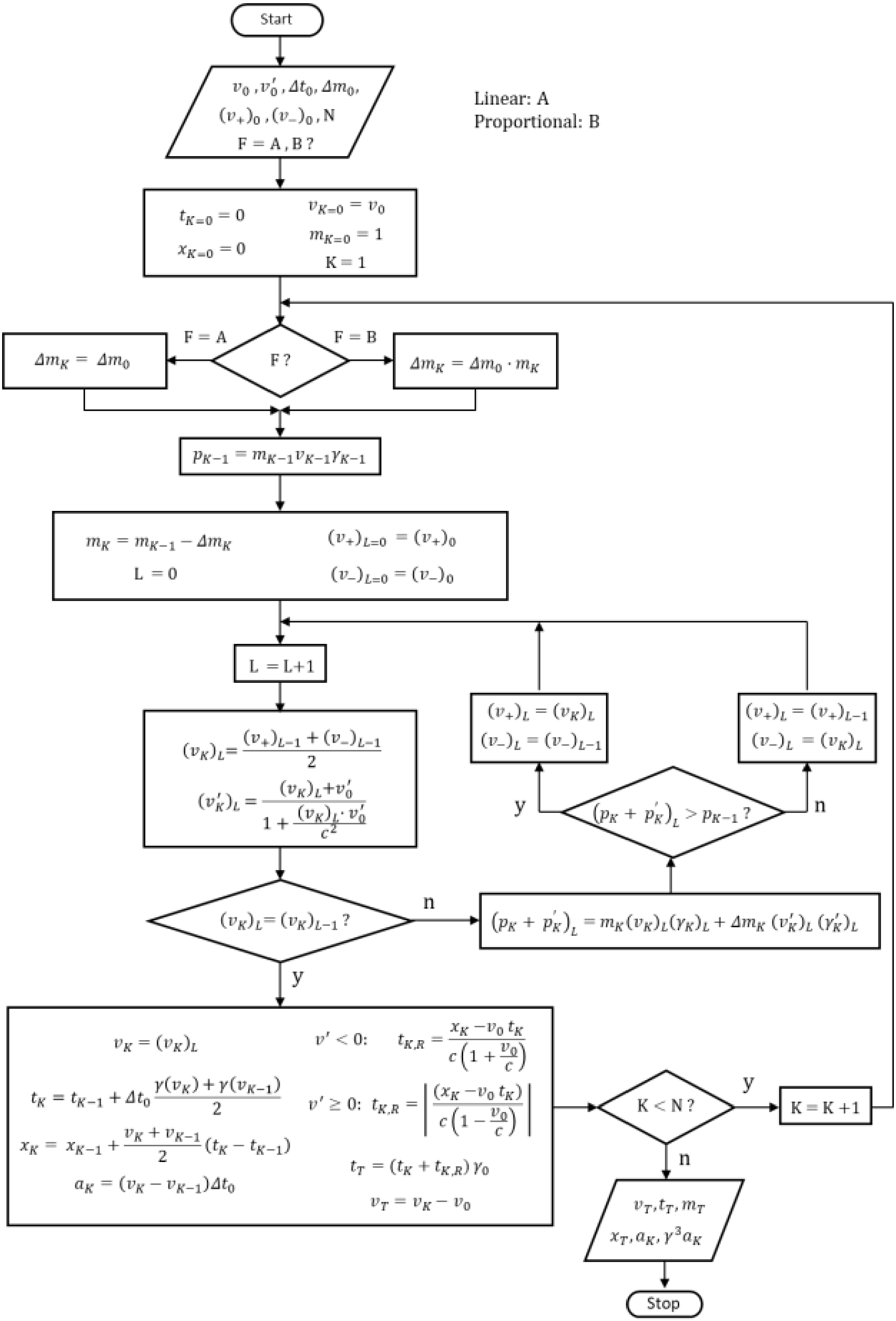


Abb. C.1: Programmablaufplan des Kalkulationsprozesses

```
Sub C()
Dim v0, v0g, tS, dtS, dm0, mF, vmax0, vmin0, vmax, vmin, mK, tK As Double
Dim tKm1, tKR, tT, xK, vK, vKm1, dmK, pKm1, pL, vL, vLm1 As Double
Dim N, K, L, vKg, vT, vLg, c, aK, Ga3, aKGa3 As Double
Dim F, A1, A2, B1, B2 As String
'Generelle Eingaben
    F = "B1"            'A1, A2, B1 oder B2 definieren:
                        'A: Lineare Massenabnahme, B: Prop. Massenabnahme
                        '1: Def. Anzahl Iterationsschritte, 2: Def. Endmasse
    v0 = 0              'Ausgangsgeschwindigkeit in km/s
    v0g = -4            'Austrittsgeschwindigkeit Gas in km/s
    dm0 = 0.25 / 100    'Ausgangswert Massenverlust in %/s
'Spezifische Angaben Def. 1
    tS = 400            'Zeit bis zum Abstrahlen eines Signals
    N = 1000            'Anzahl Iterationsschritte
'Spezifische Angaben Def. 2
    dtS = 1             'Iterationszeit in s
    mF = 10 / 100       'Masse zum Versuchsende in %
'Start Berechnung
    If F = "A1" Or F = "A2" Or F = "B1" Or F = "B2" Then
        GoTo Calc:
        Else
        Debug.Print "Eingabefehler: A1, A2, B1 oder B2 wählen"
        GoTo Out1:
        End If
Calc:
    If F = "A1" Or F = "B1" Then
        dtS = tS / N
        End If
    mK = 1               'Ausgangswert Masse
    vmax0 = 0.9          'Ausgangswert max. für Berechnung (im Verh. zu c)
    vmin0 = -0.8         'Ausgangswert min. für Berechnung (im Verh. zu c)
    c = 299792.458       'Lichtgeschwindigkeit in km/s
    tK = 0
    xK = 0
    vK = v0 / c
    v0g = v0g / c
Mainloop:
        K = K + 1
        If F = "A1" Or F = "A2" Then
            dmK = dm0 * dtS
            Else
            dmK = dm0 * dtS * mK
            End If
        pKm1 = mK * vK / (1 - vK ^ 2) ^ 0.5     'Impuls Rakete für K - 1
        mK = mK - dmK                           'Rest Raketenmasse für K
        If mK <= 0 Then
            K = K - 1
            mK = mK + dmK
            Debug.Print "Raketenmasse verbraucht"
            GoTo Out2:
            End If
        vmax = vmax0
        vmin = vmin0                            'Soll: vmin0 ungleich -vmax0
        L = 0
Do
        L = L + 1
        vLm1 = vL
        vL = (vmax + vmin) / 2
        vLg = (vL + v0g) / (1 + vL * v0g)
        pL = mK * vL / (1 - vL ^ 2) ^ 0.5 + dmK * vLg / (1 - vLg ^ 2) ^ 0.5
```

```
If pL > pKm1 Then
            vmax = vL
            Else: vmin = vL
            End If
Loop Until vLm1 = vL
    vKm1 = vK
    vK = vL
    vKg = vLg
    tKm1 = tK
    tK = tK + dtS * (1 / (1 - vK ^ 2) ^ 0.5 + 1 / (1 - vKm1 ^ 2) ^ 0.5) / 2
    xK = xK + (vK + vKm1) / 2 * (tK - tKm1) * c
    aK = (vK - vKm1) / (dtS / (1 - ((vK + vKm1) / 2) ^ 2) ^ 0.5) * c * 1000
    Ga3 = (1 / (1 - ((vK + vKm1) / 2) ^ 2)) ^ 1.5
    If v0g > 0 Then
            tKR = Abs(xK - v0 * tK) / c / (1 - v0 / c)
            Else: tKR = (xK - v0 * tK) / c / (1 + v0 / c)
            End If
        tT = (tK + tKR) * (1 - (v0 / c) ^ 2) ^ 0.5
        vT = (vK * c - v0)
        aKGa3 = aK * Ga3
    If F = "A1" Or F = "B1" Then
        If K < N Then
            GoTo Mainloop:
            End If
        End If
    If F = "A2" Or F = "B2" Then
        If mK > mF Then
            GoTo Mainloop:
            End If
        End If
Out2:
'Ergebnisdarstellung: Berechnete Werte aus Sicht eines ruhenden Beobachters
Debug.Print "vT =", vT 'Geschwindigkeit beim Abstrahlen des Signals in km/s
Debug.Print "tN =", tK 'Gesamtzeit bis zum Abstrahlen des Signals in s
Debug.Print "tT =", tT 'Gesamtzeit bis zum Empfang des Signals in s
Debug.Print "mN =", mK 'Raketenmasse beim Abstrahlen im Verhältnis zu 1
Debug.Print "xN =", xK 'Zurückgelegter Weg beim Abstrahlen des Signals in km
Debug.Print "aN =", aK 'Beschleunigung in m/s²
Debug.Print "aNGa3 =", aKGa3     'Beschleunigung * Gamma ^ 3 in m/s²
Out1:
End Sub
```

Abb. C2: VBA Programm-Code für Kalkulationsprozess C aus Abb. C1

In den nachfolgenden Tabellen Tab. C.2, Tab. C.3 und Tab. C.4 sind ergänzende Berechnungen entsprechend Tab. 6.4 aus Kap. 6.4.2 dargestellt. Statt der Nutzung des Programms „A1“ hätte auch die Variante „A2“ gewählt werden können. Dabei wird dann der gewünschte Endwert der Raketenmasse und die Iterationszeit vorgegeben; die Anzahl der Iterationsschritte ergibt sich aus der Berechnung. Beispiel aus Tab C2: Parameter „A1“ $t_S = 100s$, $N = 1000$ entsprechen „A2“ $m_F = 50\%$ und $\Delta t_S = 0{,}1s$. Der berechnete Wert für K ist dann $N = 1001$. Die Ergebnisse sind sehr ähnlich, aber nicht völlig identisch. Da in diesem Fall der Einfluss der Anzahl der Iterationsschritte im Vordergrund stand wurde „A1“ gewählt.

Für Vergleichsbetrachtungen sind insbesondere die Werte von t_T interessant, da sie wegen der einfachen Nutzung von Präzisionsuhren einer experimentellen Prüfung zugänglich währen. Die hier gewonnenen Ergebnisse von $t_T$wurden in Tab. 6.6 und 6.7 sowie Abb. 6.4 gesondert dargestellt, zeigen aber keine systematischen Unterschiede, so dass auch hier das Relativitätsprinzip gewahrt ist.

a)

N	v_T	t_T	m_N	x_N
10	2,67508561278727	100,000397329364	0,500000000000000	119,116010675216
10^2	2,76261372200990	100,000408141269	0,500000000000000	122,357320955608
10^3	2,77158897232187	100,000409292747	0,500000000000055	122,702523336750
10^4	2,77248872482278	100,000409408634	0,500000000000055	122,737265091767
10^5	2,77257872237194	100,000409420246	0,499999999996724	122,740741494222
10^6	2,77258772224753	100,000409422400	0,500000000041133	122,741089155569
10^7	2,77258862465211	100,000409440862	0,499999999708066	122,741124020357
	δv_T	δt_T	δm_N	δx_N
$\bar{x}$	8,9931	$1,4064 \cdot 10^{-3}$		$3,4698 \cdot 10^{2}$
10^2	$8,7528 \cdot 10^{-2}$	$1,0812 \cdot 10^{-5}$	0	3,2413
10^3	$8,9753 \cdot 10^{-3}$	$1,1515 \cdot 10^{-6}$	$5,4956 \cdot 10^{-14}$	$3,4520 \cdot 10^{-1}$
10^4	$8,9975 \cdot 10^{-4}$	$1,1589 \cdot 10^{-7}$	0	$3,4742 \cdot 10^{-2}$
10^5	$8,9998 \cdot 10^{-5}$	$1,1612 \cdot 10^{-8}$	$-3,3309 \cdot 10^{-12}$	$3,4764 \cdot 10^{-3}$
10^6	$8,9998 \cdot 10^{-6}$	$2,1540 \cdot 10^{-9}$	$4,4409 \cdot 10^{-11}$	$3,4766 \cdot 10^{-4}$
10^7	$9,0240 \cdot 10^{-7}$	$1,8462 \cdot 10^{-8}$	$-3,3307 \cdot 10^{-10}$	$3,4865 \cdot 10^{-5}$
10^8	$8,9931 \cdot 10^{-8}$	$1,4069 \cdot 10^{-11}$		$3,4698 \cdot 10^{-6}$
10^9	$8,9931 \cdot 10^{-9}$	$1,4069 \cdot 10^{-12}$		$3,4698 \cdot 10^{-7}$
10^{10}	$8,9931 \cdot 10^{-10}$	$1,4211 \cdot 10^{-13}$		$3,4698 \cdot 10^{-8}$
10^{11}	$8,9931 \cdot 10^{-11}$	0		$3,4698 \cdot 10^{-9}$
10^{12}	$8,9933 \cdot 10^{-12}$	0		$3,4699 \cdot 10^{-10}$
10^{13}	$8,9928 \cdot 10^{-13}$	0		$3,4703 \cdot 10^{-11}$
10^{14}	$9,0150 \cdot 10^{-14}$	0		$3,4674 \cdot 10^{-12}$
10^{15}	$8,8818 \cdot 10^{-15}$	0		$3,4106 \cdot 10^{-13}$
10^{16}	0	0		0
	v_T	t_T		x_N
10^7	2,77258862155768	100,000409422541		122,741123853607
10^8	2,77258871148869	100,000409422555		122,741127323411
10^9	2,77258872048179	100,000409422556		122,741127670391
10^{10}	2,77258872138110	100,000409422556		122,741127705089
10^{11}	2,77258872147103	100,000409422556		122,741127708559
10^{12}	2,77258872148003	100,000409422556		122,741127708906
10^{13}	2,77258872148093	100,000409422556		122,741127708941
10^{14}	2,77258872148102	100,000409422556		122,741127708944
10^{15}	2,77258872148102	100,000409422556		122,741127708945
10^{16}	2,77258872148102	100,000409422556		122,741127708945

b)

N	v_T	t_T	m_N	x_N
10	2,67508151022224	100,000397329361	0,500000000000000	37019,1440520908
10^2	2,76260948280941	100,000408141266	0,500000000000000	37022,3853647753
10^3	2,77158471909860	100,000409292744	0,500000000000055	37022,7305674122
10^4	2,77248447045912	100,000409408630	0,500000000000055	37022,7653092072
10^5	2,77257447227356	100,000409420227	0,499999999996724	37022,7687858303
10^6	2,77258347644647	100,000409421377	0,500000000041133	37022,7691339111
10^7	2,77258481950150	100,000409421716	0,499999999708066	37022,7691906506
	δv_T	δt_T	δm_N	δx_N
$\bar{x}$	8,9943	$1,1550 \cdot 10^{-3}$		$3,4709 \cdot 10^{2}$
10^2	$8,7528 \cdot 10^{-2}$	$1,0812 \cdot 10^{-5}$	0	3,2413
10^3	$8,9752 \cdot 10^{-3}$	$1,1515 \cdot 10^{-6}$	$5,4956 \cdot 10^{-14}$	$3,4520 \cdot 10^{-1}$
10^4	$8,9975 \cdot 10^{-4}$	$1,1589 \cdot 10^{-7}$	0	$3,4742 \cdot 10^{-2}$
10^5	$9,0002 \cdot 10^{-5}$	$1,1597 \cdot 10^{-8}$	$-3,3309 \cdot 10^{-12}$	$3,4766 \cdot 10^{-3}$
10^6	$9,0042 \cdot 10^{-6}$	$1,1500 \cdot 10^{-9}$	$4,4409 \cdot 10^{-11}$	$3,4808 \cdot 10^{-4}$
10^7	$1,3431 \cdot 10^{-6}$	$3,3900 \cdot 10^{-10}$	$-3,3307 \cdot 10^{-10}$	$5,6740 \cdot 10^{-5}$
10^8	$8,9943 \cdot 10^{-8}$	$1,1553 \cdot 10^{-11}$		$3,4709 \cdot 10^{-6}$
10^9	$8,9943 \cdot 10^{-9}$	$1,1511 \cdot 10^{-12}$		$3,4709 \cdot 10^{-7}$
10^{10}	$8,9943 \cdot 10^{-10}$	$1,1369 \cdot 10^{-13}$		$3,4706 \cdot 10^{-8}$
10^{11}	$8,9943 \cdot 10^{-11}$	0		$3,4706 \cdot 10^{-9}$
10^{12}	$8,9941 \cdot 10^{-12}$	0		$3,4925 \cdot 10^{-10}$
10^{13}	$8,9928 \cdot 10^{-13}$	0		0
10^{14}	$9,0150 \cdot 10^{-14}$	0		0
10^{15}	$8,8818 \cdot 10^{-15}$	0		0
10^{16}	0	0		0
	v_T	t_T		x_N
10^7	2,77258437587408	100,000409421493		37022,7691686202
10^8	2,77258446581684	100,000409421504		37022,7691720911
10^9	2,77258447481111	100,000409421505		37022,7691724381
10^{10}	2,77258447571054	100,000409421505		37022,7691724729
10^{11}	2,77258447580048	100,000409421505		37022,7691724764
10^{12}	2,77258447580948	100,000409421505		37022,7691724767
10^{13}	2,77258447581038	100,000409421505		37022,7691724768
10^{14}	2,77258447581047	100,000409421505		37022,7691724768
10^{15}	2,77258447581048	100,000409421505		37022,7691724768
10^{16}	2,77258447581048	100,000409421505		37022,7691724768

c)

N	v_T	t_T	m_N	x_N
10	2,67496628539311	100,000397329348	0,500000000000000	200123,569407464
10^2	2,76249047724150	100,000408141251	0,500000000000000	200126,810789598
10^3	2,77146532579354	100,000409292729	0,500000000000055	200127,155999630
10^4	2,77236503944528	100,000409408616	0,500000000000055	200127,190742224
10^5	2,77245505647284	100,000409420216	0,499999999996724	200127,194219809
10^6	2,77246407688722	100,000409421380	0,500000000041133	200127,194569079
10^7	2,77246734040796	100,000409422016	0,499999999708066	200127,194715347
	δv_T	δt_T	δm_N	δx_N
$\bar{x}$	8,9985	$1,1586 \cdot 10^{-3}$		$3,4742 \cdot 10^{2}$
10^2	$8,7524 \cdot 10^{-2}$	$1,0812 \cdot 10^{-5}$	0	3,2414
10^3	$8,9748 \cdot 10^{-3}$	$1,1515 \cdot 10^{-6}$	$5,4956 \cdot 10^{-14}$	$3,4521 \cdot 10^{-1}$
10^4	$8,9971 \cdot 10^{-4}$	$1,1589 \cdot 10^{-7}$	0	$3,4743 \cdot 10^{-2}$
10^5	$9,0017 \cdot 10^{-5}$	$1,1600 \cdot 10^{-8}$	$-3,3309 \cdot 10^{-12}$	$3,4776 \cdot 10^{-3}$
10^6	$9,0204 \cdot 10^{-6}$	$1,1640 \cdot 10^{-9}$	$4,4409 \cdot 10^{-11}$	$3,4927 \cdot 10^{-4}$
10^7	$3,2635 \cdot 10^{-6}$	$6,3601 \cdot 10^{-10}$	$-3,3307 \cdot 10^{-10}$	$1,4627 \cdot 10^{-4}$
10^8	$8,9985 \cdot 10^{-8}$	$1,1582 \cdot 10^{-11}$		$3,4742 \cdot 10^{-6}$
10^9	$8,9985 \cdot 10^{-9}$	$1,1653 \cdot 10^{-12}$		$3,4741 \cdot 10^{-7}$
10^{10}	$8,9985 \cdot 10^{-10}$	$1,1369 \cdot 10^{-13}$		$3,4750 \cdot 10^{-8}$
10^{11}	$8,9985 \cdot 10^{-11}$	0		$3,4634 \cdot 10^{-9}$
10^{12}	$8,9986 \cdot 10^{-12}$	0		$3,4925 \cdot 10^{-10}$
10^{13}	$8,9972 \cdot 10^{-13}$	0		0
10^{14}	$9,0150 \cdot 10^{-14}$	0		0
10^{15}	$8,8818 \cdot 10^{-15}$	0		0
10^{16}	0	0		0
	v_T	t_T		x_N
10^7	2,77246497673978	100,000409421496		200127,194603821
10^8	2,77246506672503	100,000409421507		200127,194607295
10^9	2,77246507572356	100,000409421509		200127,194607642
10^{10}	2,77246507662341	100,000409421509		200127,194607677
10^{11}	2,77246507671339	100,000409421509		200127,194607680
10^{12}	2,77246507672239	100,000409421509		200127,194607681
10^{13}	2,77246507672329	100,000409421509		200127,194607681
10^{14}	2,77246507672338	100,000409421509		200127,194607681
10^{15}	2,77246507672339	100,000409421509		200127,194607681
10^{16}	2,77246507672339	100,000409421509		200127,194607681

d)

N	v_T	t_T	m_N	x_N
10	2,67210782993243	100,000397329281	0,500000000000000	1000675,97202456
10^2	2,75953844190371	100,000408141179	0,500000000000000	1000679,21513818
10^3	2,76850369436397	100,000409292656	0,500000000000055	1000679,56053261
10^4	2,76940245165497	100,000409408544	0,500000000000055	1000679,59529404
10^5	2,76949246576442	100,000409420158	0,499999999996724	1000679,59877786
10^6	2,76950155149825	100,000409421342	0,500000000041133	1000679,59913297
10^7	2,76951415107033	100,000409423363	0,499999999708066	1000679,59971782
	δv_T	δt_T	δm_N	δx_N
$\bar{x}$	9,0100	$1,1639 \cdot 10^{-3}$		$3,4913 \cdot 10^{2}$
10^2	$8,7431 \cdot 10^{-2}$	$1,0812 \cdot 10^{-5}$	0	3,2431
10^3	$8,9653 \cdot 10^{-3}$	$1,1515 \cdot 10^{-6}$	$5,4956E \cdot 10^{-14}$	$3,4539 \cdot 10^{-1}$
10^4	$8,9876 \cdot 10^{-4}$	$1,1589 \cdot 10^{-7}$	0	$3,4761 \cdot 10^{-2}$
10^5	$9,0014 \cdot 10^{-5}$	$1,1614 \cdot 10^{-8}$	$-3,3309 \cdot 10^{-12}$	$3,4838 \cdot 10^{-3}$
10^6	$9,0857 \cdot 10^{-6}$	$1,1840 \cdot 10^{-9}$	$4,4409 \cdot 10^{-11}$	$3,5511 \cdot 10^{-4}$
10^7	$1,2600 \cdot 10^{-5}$	$2,0210 \cdot 10^{-9}$	$-3,3307 \cdot 10^{-10}$	$5,8485 \cdot 10^{-4}$
10^8	$9,0100 \cdot 10^{-8}$	$1,1639 \cdot 10^{-11}$		$3,4913 \cdot 10^{-6}$
10^9	$9,0100 \cdot 10^{-9}$	$1,1653 \cdot 10^{-12}$		$3,4913 \cdot 10^{-7}$
10^{10}	$9,0100 \cdot 10^{-10}$	$1,1369 \cdot 10^{-13}$		$3,4925 \cdot 10^{-8}$
10^{11}	$9,0100 \cdot 10^{-11}$	0		$3,4925 \cdot 10^{-9}$
10^{12}	$9,0101 \cdot 10^{-12}$	0		0
10^{13}	$9,0106 \cdot 10^{-13}$	0		0
10^{14}	$9,0150 \cdot 10^{-14}$	0		0
10^{15}	$8,8818 \cdot 10^{-15}$	0		0
10^{16}	0	0		0
	v_T	t_T		x_N
10^7	2,76950245249750	100,000409421458		1000679,59916788
10^8	2,76950254259743	100,000409421470		1000679,59917137
10^9	2,76950255160742	100,000409421471		1000679,59917172
10^{10}	2,76950255250842	100,000409421471		1000679,59917176
10^{11}	2,76950255259852	100,000409421471		1000679,59917176
10^{12}	2,76950255260753	100,000409421471		1000679,59917176
10^{13}	2,76950255260843	100,000409421471		1000679,59917176
10^{14}	2,76950255260852	100,000409421471		1000679,59917176
10^{15}	2,76950255260853	100,000409421471		1000679,59917176
10^{16}	2,76950255260853	100,000409421471		1000679,59917176

Tab: C.2: Berechnung der relativistischen Raketengeschwindigkeit gemäß Programm
Typ: A1, $v_0' = -4\,\mathrm{km/s}$, $\Delta m_0 = 0{,}5\%$, $t_0 = 100s$
a) $v_0 = 0$, b) $v_0 = 369\,\mathrm{km/s}$, c) $v_0 = 2.000\,\mathrm{km/s}$, d) $v_0 = 10.000\,\mathrm{km/s}$

N	v_T	t_T	m_N	x_N
10	7,84085772014717	1000,00912888441	0,100000000000000	2736,750700612000
10^2	9,05101119073233	1000,00983714046	0,099999999999999	2949,077033897790
10^3	9,19416709875657	1000,00991970498	0,099999999999989	2973,828794295530
10^4	9,20872063626419	1000,00992810957	0,099999999999856	2976,348382091860
10^5	9,21017837171215	1000,00992895150	0,099999999998368	2976,600796650620
10^6	9,21032416890996	1000,00992904517	0,100000000009585	2976,626042686920
10^7	9,21033875458106	1000,00992885138	0,099999999922464	2976,628567836020
	δv_T	δt_T	δm_N	δx_N
$\bar{x}$	$1,4507 \cdot 10^{2}$	$8,6118 \cdot 10^{-2}$		$2,5109 \cdot 10^{4}$
10^2	1,2102	$7,0826 \cdot 10^{-4}$	$-8,0491 \cdot 10^{-16}$	$2,1233 \cdot 10^{2}$
10^3	$1,4316 \cdot 10^{-1}$	$8,2565 \cdot 10^{-5}$	$-1,0700 \cdot 10^{-14}$	$2,4752 \cdot 10^{1}$
10^4	$1,4554 \cdot 10^{-2}$	$8,4046 \cdot 10^{-6}$	$-1,3300 \cdot 10^{-13}$	2,5196
10^5	$1,4577 \cdot 10^{-3}$	$8,4193 \cdot 10^{-7}$	$-1,4880 \cdot 10^{-12}$	$2,5241 \cdot 10^{-1}$
10^6	$1,4580 \cdot 10^{-4}$	$9,3670 \cdot 10^{-8}$	$1,1217 \cdot 10^{-11}$	$2,5246 \cdot 10^{-2}$
10^7	$1,4586 \cdot 10^{-5}$	$-1,9379 \cdot 10^{-7}$	$-8,7121 \cdot 10^{-11}$	$2,5251 \cdot 10^{-3}$
10^8	$1,4507 \cdot 10^{-6}$	$8,6118 \cdot 10^{-10}$		$2,5109 \cdot 10^{-4}$
10^9	$1,4507 \cdot 10^{-7}$	$8,6175 \cdot 10^{-11}$		$2,5109 \cdot 10^{-5}$
10^{10}	$1,4507 \cdot 10^{-8}$	$8,6402 \cdot 10^{-12}$		$2,5109 \cdot 10^{-6}$
10^{11}	$1,4507 \cdot 10^{-9}$	$9,0949 \cdot 10^{-13}$		$2,5109 \cdot 10^{-7}$
10^{12}	$1,4507 \cdot 10^{-10}$	0		$2,5109 \cdot 10^{-8}$
10^{13}	$1,4506 \cdot 10^{-11}$	0		$2,5107 \cdot 10^{-9}$
10^{14}	$1,4513 \cdot 10^{-12}$	0		$2,5102 \cdot 10^{-10}$
10^{15}	$1,4566 \cdot 10^{-13}$	0		$2,5011 \cdot 10^{-11}$
10^{16}	$1,4211 \cdot 10^{-14}$	0		0
	v_T	t_T		x_N
10^7	9,21033867546060	1000,00992905378		2976,628553565180
10^8	9,21034012611567	1000,00992905464		2976,628804653010
10^9	9,21034027118117	1000,00992905473		2976,628829761790
10^{10}	9,21034028568772	1000,00992905474		2976,628832272670
10^{11}	9,21034028713838	1000,00992905474		2976,628832523760
10^{12}	9,21034028728345	1000,00992905474		2976,628832548870
10^{13}	9,21034028729795	1000,00992905474		2976,628832551380
10^{14}	9,21034028729940	1000,00992905474		2976,628832551630
10^{15}	9,21034028729955	1000,00992905474		2976,628832551650
10^{16}	9,21034028729956	1000,00992905474		2976,628832551660

a)

N	v_T	t_T	m_N	x_N
10	7,84084554146182	1000,00912888434	0,100000000000000	371737,0322956670
10^2	9,05099707036669	1000,00983714038	0,099999999999999	371949,3587899240
10^3	9,19415274738003	1000,00991970490	0,099999999999989	371974,1105690590
10^4	9,20870626170580	1000,00992810949	0,099999999999856	371976,6301589470
10^5	9,21016399816938	1000,00992895148	0,099999999998368	371976,8825756170
10^6	9,21030981978799	1000,00992903570	0,100000000009585	371976,9078311300
10^7	9,21032474295856	1000,00992904906	0,099999999922464	371976,9105254130
	δv_T	δt_T	δm_N	δx_N
$\bar{x}$	$1,4507 \cdot 10^{2}$	$8,3757 \cdot 10^{-2}$		$2,5111 \cdot 10^{4}$
10^2	1,2102	$7,0826 \cdot 10^{-4}$	$-8,0491 \cdot 10^{-16}$	$2,1233 \cdot 10^{2}$
10^3	$1,4316 \cdot 10^{-1}$	$8,2565 \cdot 10^{-5}$	$-1,0700 \cdot 10^{-14}$	$2,4752 \cdot 10^{1}$
10^4	$1,4554 \cdot 10^{-2}$	$8,4046 \cdot 10^{-6}$	$-1,3300 \cdot 10^{-13}$	2,5196
10^5	$1,4577 \cdot 10^{-3}$	$8,4199 \cdot 10^{-7}$	$-1,4880 \cdot 10^{-12}$	$2,5242 \cdot 10^{-1}$
10^6	$1,4582 \cdot 10^{-4}$	$8,4220 \cdot 10^{-8}$	$1,1217 \cdot 10^{-11}$	$2,5256 \cdot 10^{-2}$
10^7	$1,4923 \cdot 10^{-5}$	$1,3360 \cdot 10^{-8}$	$-8,7121 \cdot 10^{-11}$	$2,6943 \cdot 10^{-3}$
10^8	$1,4507 \cdot 10^{-6}$	$8,3753 \cdot 10^{-10}$		$2,5111 \cdot 10^{-4}$
10^9	$1,4507 \cdot 10^{-7}$	$8,3787 \cdot 10^{-11}$		$2,5111 \cdot 10^{-5}$
10^{10}	$1,4507 \cdot 10^{-8}$	$8,4128 \cdot 10^{-12}$		$2,5111 \cdot 10^{-6}$
10^{11}	$1,4507 \cdot 10^{-9}$	0		$2,5111 \cdot 10^{-7}$
10^{12}	$1,4507 \cdot 10^{-10}$	0		$2,5088 \cdot 10^{-8}$
10^{13}	$1,4508 \cdot 10^{-11}$	0		$2,5029 \cdot 10^{-9}$
10^{14}	$1,4513 \cdot 10^{-12}$	0		0
10^{15}	$1,4566 \cdot 10^{-13}$	0		0
10^{16}	$1,4211 \cdot 10^{-14}$	0		0
	v_T	t_T		x_N
10^7	9,21032432694012	1000,00992904408		371976,9103422510
10^8	9,21032577765533	1000,00992904491		371976,9105933640
10^9	9,21032592272685	1000,00992904500		371976,9106184750
10^{10}	9,21032593723401	1000,00992904501		371976,9106209860
10^{11}	9,21032593868472	1000,00992904501		371976,9106212370
10^{12}	9,21032593882979	1000,00992904501		371976,9106212620
10^{13}	9,21032593884430	1000,00992904501		371976,9106212650
10^{14}	9,21032593884575	1000,00992904501		371976,9106212650
10^{15}	9,21032593884590	1000,00992904501		371976,9106212650
10^{16}	9,21032593884591	1000,00992904501		371976,9106212650

b)

N	v_T	t_T	m_N	x_N
10	7,84050712993712	1000,00912888406	0,100000000000000	2002781,31911852
10^2	9,05060615444427	1000,00983714003	0,099999999999999	2002993,65017758
10^3	9,19375561457377	1000,00991970454	0,099999999999989	2003018,40248872
10^4	9,20830849818162	1000,00992810913	0,099999999999856	2003020,92213354
10^5	9,20976618582245	1000,00992895115	0,099999999998368	2003021,17456373
10^6	9,20991210652369	1000,00992903552	0,100000000009585	2003021,19985815
10^7	9,20992848275819	1000,00992904651	0,099999999922464	2003021,20324950
	δv_T	δt_T	δm_N	δx_N
$\bar{x}$	$1,4509 \cdot 10^{2}$	$8,3796 \cdot 10^{-2}$		$2,5122 \cdot 10^{4}$
10^2	1,2101	$7,0826 \cdot 10^{-4}$	$-8,0491 \cdot 10^{-16}$	$2,1233 \cdot 10^{2}$
10^3	$1,4315 \cdot 10^{-1}$	$8,2565 \cdot 10^{-5}$	$-1,0700 \cdot 10^{-14}$	$2,4752 \cdot 10^{1}$
10^4	$1,4553 \cdot 10^{-2}$	$8,4046 \cdot 10^{-6}$	$-1,3300 \cdot 10^{-13}$	2,5196
10^5	$1,4577 \cdot 10^{-3}$	$8,4202 \cdot 10^{-7}$	$-1,4880 \cdot 10^{-12}$	$2,5243 \cdot 10^{-1}$
10^6	$1,4592 \cdot 10^{-4}$	$8,4370 \cdot 10^{-8}$	$1,1217 \cdot 10^{-11}$	$2,5294 \cdot 10^{-2}$
10^7	$1,6376 \cdot 10^{-5}$	$1,0990 \cdot 10^{-8}$	$-8,7121 \cdot 10^{-11}$	$3,3913 \cdot 10^{-3}$
10^8	$1,4509 \cdot 10^{-6}$	$8,3799 \cdot 10^{-10}$		$2,5122 \cdot 10^{-4}$
10^9	$1,4509 \cdot 10^{-7}$	$8,3787 \cdot 10^{-11}$		$2,5121 \cdot 10^{-5}$
10^{10}	$1,4509 \cdot 10^{-8}$	$8,4128 \cdot 10^{-12}$		$2,5122 \cdot 10^{-6}$
10^{11}	$1,4509 \cdot 10^{-9}$	0		$2,5122 \cdot 10^{-7}$
10^{12}	$1,4509 \cdot 10^{-10}$	0		$2,5146 \cdot 10^{-8}$
10^{13}	$1,4509 \cdot 10^{-11}$	0		$2,5611 \cdot 10^{-9}$
10^{14}	$1,4513 \cdot 10^{-12}$	0		0
10^{15}	$1,4566 \cdot 10^{-13}$	0		0
10^{16}	$1,4211 \cdot 10^{-14}$	0		0
	v_T	t_T		x_N
10^7	9,20992661571773	1000,00992904390		2003021,20237030
10^8	9,20992806663713	1000,00992904474		2003021,20262152
10^9	9,20992821172907	1000,00992904482		2003021,20264664
10^{10}	9,20992822623827	1000,00992904483		2003021,20264915
10^{11}	9,20992822768919	1000,00992904483		2003021,20264941
10^{12}	9,20992822783428	1000,00992904483		2003021,20264943
10^{13}	9,20992822784879	1000,00992904483		2003021,20264943
10^{14}	9,20992822785024	1000,00992904483		2003021,20264943
10^{15}	9,20992822785039	1000,00992904483		2003021,20264943
10^{16}	9,20992822785040	1000,00992904483		2003021,20264943

c)

N	v_T	t_T	m_N	x_N
10	7,83212547315452	1000,00912888264	0,100000000000000	10008306,1716827
10^2	9,04092953464169	1000,00983713831	0,099999999999999	10008518,6162407
10^3	9,18392577772829	1000,00991970277	0,099999999999989	10008543,3817823
10^4	9,19846309125933	1000,00992810738	0,099999999999856	10008545,9027777
10^5	9,19991928923446	1000,00992894953	0,099999999998368	10008546,1553823
10^6	9,20006556392400	1000,00992903452	0,100000000009585	10008546,1808763
10^7	9,20008899787535	1000,00992905726	0,099999999922464	10008546,1876819
	δv_T	δt_T	δm_N	δx_N
$\bar{x}$	$1,4507 \cdot 10^{2}$	$8,3954 \cdot 10^{-2}$		$2,5182 \cdot 10^{2}$
10^2	1,2088	$7,0826 \cdot 10^{-4}$	$-8,0491 \cdot 10^{-16}$	$2,1244 \cdot 10^{2}$
10^3	$1,4300 \cdot 10^{-1}$	$8,2564 \cdot 10^{-5}$	$-1,0700 \cdot 10^{-14}$	$2,4766 \cdot 10^{1}$
10^4	$1,4537 \cdot 10^{-2}$	$8,4046 \cdot 10^{-6}$	$-1,3300 \cdot 10^{-13}$	2,5210
10^5	$1,4562 \cdot 10^{-3}$	$8,4215 \cdot 10^{-7}$	$-1,4880 \cdot 10^{-12}$	$2,5260 \cdot 10^{-1}$
10^6	$1,4627 \cdot 10^{-4}$	$8,4990 \cdot 10^{-8}$	$1,1217 \cdot 10^{-11}$	$2,5494 \cdot 10^{-2}$
10^7	$2,3434 \cdot 10^{-5}$	$2,2740 \cdot 10^{-8}$	$-8,7121 \cdot 10^{-11}$	$6,8056 \cdot 10^{-3}$
10^8	$1,4507 \cdot 10^{-6}$	$8,3958 \cdot 10^{-10}$		$2,5182 \cdot 10^{-4}$
10^9	$1,4507 \cdot 10^{-7}$	$8,3901 \cdot 10^{-11}$		$2,5183 \cdot 10^{-5}$
10^{10}	$1,4507 \cdot 10^{-8}$	$8,4128 \cdot 10^{-12}$		$2,5183 \cdot 10^{-6}$
10^{11}	$1,4507 \cdot 10^{-9}$	0		$2,5146 \cdot 10^{-7}$
10^{12}	$1,4507 \cdot 10^{-10}$	0		$2,6077 \cdot 10^{-8}$
10^{13}	$1,4506 \cdot 10^{-11}$	0		0
10^{14}	$1,4513 \cdot 10^{-12}$	0		0
10^{15}	$1,4566 \cdot 10^{-13}$	0		0
10^{16}	$1,4211 \cdot 10^{-14}$	0		0
	v_T	t_T		x_N
10^7	9,20008007052064	1000,00992904292		10008546,1833945
10^8	9,20008152118030	1000,00992904376		10008546,1836464
10^9	9,20008166624627	1000,00992904384		10008546,1836716
10^{10}	9,20008168075286	1000,00992904385		10008546,1836741
10^{11}	9,20008168220352	1000,00992904385		10008546,1836743
10^{12}	9,20008168234859	1000,00992904385		10008546,1836744
10^{13}	9,20008168236309	1000,00992904385		10008546,1836744
10^{14}	9,20008168236455	1000,00992904385		10008546,1836744
10^{15}	9,20008168236469	1000,00992904385		10008546,1836744
10^{16}	9,20008168236471	1000,00992904385		10008546,1836744

d)

Tab. C.3: Berechnung der relativistischen Raketengeschwindigkeit gemäß Programm
Typ: A1, $v_0' = -4\ \mathrm{km/s}$, $\Delta m_0 = 0{,}09\%$, $t_0 = 1.000s$
a) $v_0 = 0$, b) $v_0 = 369\ \mathrm{km/s}$, c) $v_0 = 2.000\ \mathrm{km/s}$, d) $v_0 = 10.000\ \mathrm{km/s}$

a)

N	v_T	t_T	m_N	x_N
10	196,021417688228	10002,2826214110	0,100000000000000	684187,711109235
10^2	226,275235660056	10002,4597552575	0,099999999999999	737269,299206788
10^3	229,854130642931	10002,4804055720	0,099999999999989	743457,239721413
10^4	230,217968797944	10002,4825076705	0,099999999999856	744087,136710344
10^5	230,254412155672	10002,4827182607	0,099999999998368	744150,240353761
10^6	230,258057081830	10002,4827393235	0,100000000009585	744156,551855839
10^7	230,258421713536	10002,4827414384	0,099999999922464	744157,183283767
	δv_T	δt_T	δm_N	δx_N
$\bar{x}$	$3,6266 \cdot 10^{3}$	$2,0948 \cdot 10^{3}$		$6,2771 \cdot 10^{6}$
10^2	$3,0254 \cdot 10^{1}$	$1,7713 \cdot 10^{-1}$	$-8,0491 \cdot 10^{-16}$	$5,3082 \cdot 10^{4}$
10^3	$3,5789$	$2,0650 \cdot 10^{-2}$	$-1,0700 \cdot 10^{-14}$	$6,1879 \cdot 10^{3}$
10^4	$3,6384 \cdot 10^{-1}$	$2,1021 \cdot 10^{-3}$	$-1,3300 \cdot 10^{-13}$	$6,2990 \cdot 10^{2}$
10^5	$3,6443 \cdot 10^{-2}$	$2,1059 \cdot 10^{-4}$	$-1,4880 \cdot 10^{-12}$	$6,3104 \cdot 10^{1}$
10^6	$3,6449 \cdot 10^{-3}$	$2,1063 \cdot 10^{-5}$	$1,1217 \cdot 10^{-11}$	$6,3115$
10^7	$3,6463 \cdot 10^{-4}$	$2,1149 \cdot 10^{-6}$	$-8,7121 \cdot 10^{-11}$	$6,3143 \cdot 10^{-1}$
10^8	$3,6266 \cdot 10^{-5}$	$2,0948 \cdot 10^{-7}$		$6,2772 \cdot 10^{-2}$
10^9	$3,6266 \cdot 10^{-6}$	$2,0947 \cdot 10^{-8}$		$6,2772 \cdot 10^{-3}$
10^{10}	$3,6266 \cdot 10^{-7}$	$2,0955 \cdot 10^{-9}$		$6,2772 \cdot 10^{-4}$
10^{11}	$3,6266 \cdot 10^{-8}$	$2,0918 \cdot 10^{-10}$		$6,2772 \cdot 10^{-5}$
10^{12}	$3,6266 \cdot 10^{-9}$	$2,1828 \cdot 10^{-11}$		$6,2772 \cdot 10^{-6}$
10^{13}	$3,6266 \cdot 10^{-10}$	0		$6,2771 \cdot 10^{-7}$
10^{14}	$3,6266 \cdot 10^{-11}$	0		$6,2748 \cdot 10^{-8}$
10^{15}	$3,6380 \cdot 10^{-12}$	0		$6,2864 \cdot 10^{-9}$
10^{16}	$3,6948 \cdot 10^{-13}$	0		0
	v_T	t_T		x_N
10^7	230,258419745292	10002,4827414183		744157,179575260
10^8	230,258456011638	10002,4827416278		744157,242347202
10^9	230,258459638272	10002,4827416488		744157,248624396
10^{10}	230,258460000936	10002,4827416509		744157,249252115
10^{11}	230,258460037202	10002,4827416511		744157,249314887
10^{12}	230,258460040829	10002,4827416511		744157,249321164
10^{13}	230,258460041192	10002,4827416511		744157,249321792
10^{14}	230,258460041228	10002,4827416511		744157,249321855
10^{15}	230,258460041231	10002,4827416511		744157,249321861
10^{16}	230,258460041232	10002,4827416511		744157,249321862

b)

N	v_T	t_T	m_N	x_N
10	196,020933328363	10002,2826210019	0,100000000000000	4374191,05576218
10^2	226,274637774396	10002,4597547615	0,099999999999999	4427272,68489423
10^3	229,853518480855	10002,4804050636	0,099999999999989	4433460,62991467
10^4	230,217355174200	10002,4825071609	0,099999999999856	4434090,52736042
10^5	230,253798388818	10002,4827177511	0,099999999998368	4434153,63106899
10^6	230,257443325741	10002,4827388142	0,100000000009585	4434159,94267449
10^7	230,257808300206	10002,4827409268	0,099999999922464	4434160,57580526
	δv_T	δt_T	δm_N	δx_N
$\bar{x}$	$3,6266 \cdot 10^{3}$	$2,0948 \cdot 10^{3}$		$6,2772 \cdot 10^{6}$
10^2	$3,0254 \cdot 10^{1}$	$1,7713 \cdot 10^{-1}$	$-8,0491 \cdot 10^{-16}$	$5,3082 \cdot 10^{4}$
10^3	$3,5789$	$2,0650 \cdot 10^{-2}$	$-1,0700 \cdot 10^{-14}$	$6,1879 \cdot 10^{3}$
10^4	$3,6384 \cdot 10^{-1}$	$2,1021 \cdot 10^{-3}$	$-1,3300 \cdot 10^{-13}$	$6,2990 \cdot 10^{2}$
10^5	$3,6443 \cdot 10^{-2}$	$2,1059 \cdot 10^{-4}$	$-1,4880 \cdot 10^{-12}$	$6,3104 \cdot 10^{1}$
10^6	$3,6449 \cdot 10^{-3}$	$2,1063 \cdot 10^{-5}$	$1,1217 \cdot 10^{-11}$	$6,3116$
10^7	$3,6497 \cdot 10^{-4}$	$2,1126 \cdot 10^{-6}$	$-8,7121 \cdot 10^{-11}$	$6,3313 \cdot 10^{-1}$
10^8	$3,6266 \cdot 10^{-5}$	$2,0948 \cdot 10^{-7}$		$6,2772 \cdot 10^{-2}$
10^9	$3,6266 \cdot 10^{-6}$	$2,0947 \cdot 10^{-8}$		$6,2772 \cdot 10^{-3}$
10^{10}	$3,6266 \cdot 10^{-7}$	$2,0955 \cdot 10^{-9}$		$6,2772 \cdot 10^{-4}$
10^{11}	$3,6266 \cdot 10^{-8}$	$2,0918 \cdot 10^{-10}$		$6,2772 \cdot 10^{-5}$
10^{12}	$3,6266 \cdot 10^{-9}$	$2,1828 \cdot 10^{-11}$		$6,2771 \cdot 10^{-6}$
10^{13}	$3,6266 \cdot 10^{-10}$	0		$6,2771 \cdot 10^{-7}$
10^{14}	$3,6266 \cdot 10^{-11}$	0		$6,2399 \cdot 10^{-8}$
10^{15}	$3,6380 \cdot 10^{-12}$	0		0
10^{16}	$3,6948 \cdot 10^{-13}$	0		0
	v_T	t_T		x_N
10^7	230,257805988392	10002,4827409090		4434160,57039689
10^8	230,257842254657	10002,4827411185		4434160,63316912
10^9	230,257845881283	10002,4827411395		4434160,63944635
10^{10}	230,257846243946	10002,4827411416		4434160,64007407
10^{11}	230,257846280212	10002,4827411418		4434160,64013684
10^{12}	230,257846283839	10002,4827411418		4434160,64014312
10^{13}	230,257846284201	10002,4827411418		4434160,64014375
10^{14}	230,257846284238	10002,4827411418		4434160,64014381
10^{15}	230,257846284241	10002,4827411418		4434160,64014382
10^{16}	230,257846284242	10002,4827411418		4434160,64014382

c)

N	v_T	t_T	m_N	x_N
10	196,011677951838	10002,2826191942	0,100000000000000	20684648,1809011
10^2	226,263782574663	10002,4597525694	0,099999999999999	20737730,9547342
10^3	229,842470286295	10002,4804028168	0,099999999999989	20743919,0319696
10^4	230,206287313833	10002,4825049083	0,099999999999856	20744548,9428655
10^5	230,242728572615	10002,4827154982	0,099999999998368	20744612,0480015
10^6	230,246373417548	10002,4827365626	0,100000000009585	20744618,3601214
10^7	230,246739825310	10002,4827386978	0,099999999922464	20744619,0002277
	δv_T	δt_T	δm_N	δx_N
$\bar{x}$	$3,6264 \cdot 10^{3}$	$2,0949 \cdot 10^{3}$		$6,2775 \cdot 10^{6}$
10^2	$3,0252 \cdot 10^{1}$	$1,7713 \cdot 10^{-1}$	$-8,0491 \cdot 10^{-16}$	$5,3083 \cdot 10^{4}$
10^3	$3,5787$	$2,0650 \cdot 10^{-2}$	$-1,0700 \cdot 10^{-14}$	$6,1881 \cdot 10^{3}$
10^4	$3,6382 \cdot 10^{-1}$	$2,1021 \cdot 10^{-3}$	$-1,3300 \cdot 10^{-13}$	$6,2991 \cdot 10^{2}$
10^5	$3,6441 \cdot 10^{-2}$	$2,1059 \cdot 10^{-4}$	$-1,4880 \cdot 10^{-12}$	$6,3105 \cdot 10^{1}$
10^6	$3,6448 \cdot 10^{-3}$	$2,1064 \cdot 10^{-5}$	$1,1217 \cdot 10^{-11}$	$6,3121$
10^7	$3,6641 \cdot 10^{-4}$	$2,1352 \cdot 10^{-6}$	$-8,7121 \cdot 10^{-11}$	$6,4011 \cdot 10^{-1}$
10^8	$3,6265 \cdot 10^{-5}$	$2,0949 \cdot 10^{-7}$		$6,2775 \cdot 10^{-2}$
10^9	$3,6265 \cdot 10^{-6}$	$2,0949 \cdot 10^{-8}$		$6,2775 \cdot 10^{-3}$
10^{10}	$3,6265 \cdot 10^{-7}$	$2,0955 \cdot 10^{-9}$		$6,2774 \cdot 10^{-4}$
10^{11}	$3,6265 \cdot 10^{-8}$	$2,0918 \cdot 10^{-10}$		$6,2775 \cdot 10^{-5}$
10^{12}	$3,6265 \cdot 10^{-9}$	$2,1828 \cdot 10^{-11}$		$6,2771 \cdot 10^{-6}$
10^{13}	$3,6263 \cdot 10^{-10}$	0		$6,2957 \cdot 10^{-7}$
10^{14}	$3,6266 \cdot 10^{-11}$	0		$6,3330 \cdot 10^{-8}$
10^{15}	$3,6380 \cdot 10^{-12}$	0		0
10^{16}	$3,6948 \cdot 10^{-13}$	0		0
	v_T	t_T		x_N
10^7	230,246736063268	10002,4827386575		20744618,9878669
10^8	230,246772327840	10002,4827388670		20744619,0506414
10^9	230,246775954297	10002,4827388879		20744619,0569189
10^{10}	230,246776316943	10002,4827388900		20744619,0575466
10^{11}	230,246776353207	10002,4827388902		20744619,0576094
10^{12}	230,246776356834	10002,4827388902		20744619,0576157
10^{13}	230,246776357197	10002,4827388902		20744619,0576163
10^{14}	230,246776357233	10002,4827388902		20744619,0576164
10^{15}	230,246776357236	10002,4827388902		20744619,0576164
10^{16}	230,246776357237	10002,4827388902		20744619,0576164

d)

N	v_T	t_T	m_N	x_N
10	195,798241945411	10002,2826103399	0,100000000000000	100740248,476771
10^2	226,016565669348	10002,4597418176	0,099999999999999	100793359,642360
10^3	229,591238915968	10002,4803917961	0,099999999999989	100799551,023330
10^4	229,954647601144	10002,4824938598	0,099999999999856	100800181,270485
10^5	229,991048026237	10002,4827044481	0,099999999998368	100800244,409694
10^6	229,994689292966	10002,4827255184	0,100000000009585	100800250,727051
10^7	229,995062373247	10002,4827277682	0,099999999922464	100800251,401665
	δv_T	δt_T	δm_N	δx_N
$\bar{x}$	$3,6225 \cdot 10^{3}$	$2,0950 \cdot 10^{3}$		$6,2812 \cdot 10^{6}$
10^2	$3,0218 \cdot 10^{1}$	$1,7713 \cdot 10^{-1}$	$-8,0491 \cdot 10^{-16}$	$5,3111 \cdot 10^{4}$
10^3	$3,5747$	$2,0650 \cdot 10^{-2}$	$-1,0700 \cdot 10^{-14}$	$6,1914 \cdot 10^{3}$
10^4	$3,6341 \cdot 10^{-1}$	$2,1021 \cdot 10^{-3}$	$-1,3300 \cdot 10^{-13}$	$6,3025 \cdot 10^{2}$
10^5	$3,6400 \cdot 10^{-2}$	$2,1059 \cdot 10^{-4}$	$-1,4880 \cdot 10^{-12}$	$6,3139 \cdot 10^{1}$
10^6	$3,6413 \cdot 10^{-3}$	$2,1070 \cdot 10^{-5}$	$1,1217 \cdot 10^{-11}$	$6,3174$
10^7	$3,7308 \cdot 10^{-4}$	$2,2498 \cdot 10^{-6}$	$-8,7121 \cdot 10^{-11}$	$6,7461 \cdot 10^{-1}$
10^8	$3,6225 \cdot 10^{-5}$	$2,0950 \cdot 10^{-7}$		$6,2813 \cdot 10^{-2}$
10^9	$3,6225 \cdot 10^{-6}$	$2,0949 \cdot 10^{-8}$		$6,2813 \cdot 10^{-3}$
10^{10}	$3,6225 \cdot 10^{-7}$	$2,0955 \cdot 10^{-9}$		$6,2813 \cdot 10^{-4}$
10^{11}	$3,6225 \cdot 10^{-8}$	$2,0918 \cdot 10^{-10}$		$6,2808 \cdot 10^{-5}$
10^{12}	$3,6225 \cdot 10^{-9}$	$2,1828 \cdot 10^{-11}$		$6,2883 \cdot 10^{-6}$
10^{13}	$3,6226 \cdot 10^{-10}$	0		$6,2585 \cdot 10^{-7}$
10^{14}	$3,6238 \cdot 10^{-11}$	0		0
10^{15}	$3,6096 \cdot 10^{-12}$	0		0
10^{16}	$3,6948 \cdot 10^{-13}$	0		0
	v_T	t_T		x_N
10^7	229,994689292966	10002,4827276134		100800251,355179
10^8	229,994725518139	10002,4827278229		100800251,417992
10^9	229,994729140657	10002,4827278438		100800251,424273
10^{10}	229,994729502908	10002,4827278459		100800251,424902
10^{11}	229,994729539134	10002,4827278461		100800251,424964
10^{12}	229,994729542756	10002,4827278462		100800251,424971
10^{13}	229,994729543118	10002,4827278462		100800251,424971
10^{14}	229,994729543155	10002,4827278462		100800251,424971
10^{15}	229,994729543158	10002,4827278462		100800251,424971
10^{16}	229,994729543159	10002,4827278462		100800251,424971

Tab. C.4: Berechnung der relativistischen Raketengeschwindigkeit gemäß Programm
Typ: A1, $v_0' = -100\ \mathrm{km/s}$, $\Delta m_0 = 0{,}009\%$, $t_0 = 10.000 s$
a) $v_0 = 0$, b) $v_0 = 369\ \mathrm{km/s}$, c) $v_0 = 2.000\ \mathrm{km/s}$, d) $v_0 = 10.000\ \mathrm{km/s}$

C.4 Relativistische Raketengleichung nach J. Akeret

Von J. Akeret gibt es bereits seit dem Jahre 1946 eine analytische Lösung für die relativistische Raketengleichung [90]. Hierzu ist nicht nur der Impulssatz und die relativistische Geschwindigkeitsaddition erforderlich (wie bei der bisher dargestellten numerischen Ableitung) sondern es wird zusätzlich der Energieerhaltungssatz verwendet.

Für die Aufstellung der Gleichungen werden Formelzeichen verwendet, die vom Originaltext abweichen aber konsistent mit den bisher in diesem Text genutzten Darstellungen sind. Funktionen bezogen auf das austretende Gas sind mit f' gekennzeichnet; Beziehungen, die auf die bewegte Rakete verweisen, werden dagegen ohne diese Kennzeichnung dargestellt. Die aktuelle Masse der Rakete ist m, und dm' ist der Anteil des austretenden Gases. Daraus ergeben sich die im Folgenden dargestellten Gleichungen.

a) Der Energiesatz liefert:

$$d\left\{\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right\} = -\frac{dm'\cdot c^2}{\sqrt{1-v'^2/c^2}} \tag{C.21}$$

b) der Impulssatz:

$$d\left\{\frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right\} = \frac{dm'\cdot v'}{\sqrt{1-v'^2/c^2}} \tag{C.22}$$

c) das relativistische Additionstheorem:

$$v' = \frac{v_0' - v}{1-\frac{v\cdot v_0'}{c^2}} \tag{C.23}$$

wobei v_0' die Bedeutung der (konstanten) Austrittsgeschwindigkeit des Gases relativ zur Rakete hat. Die Gleichungen (C. 21) und (C. 22) lassen sich weiterentwickeln zu

$$dm\frac{c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + mc^2\cdot d\left\{\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right\} = -dm'\frac{c^2}{\sqrt{1-v'^2/c^2}} \tag{C.24}$$

$$dm\frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + m\frac{dv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + mv\cdot d\left\{\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right\} = dm'\frac{v'}{\sqrt{1-v'^2/c^2}} \tag{C.25}$$

Zur Lösung müssen die Werte von v' und dm' eliminiert werden. Dazu wird zuerst in Gleichung Gl. (C. 24) im Term auf der rechten Seite für v' der Wert aus Gl. (C. 23) eingesetzt

$$\frac{c^2}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{c^2}{\sqrt{1-\frac{\left(\frac{v_0'-v}{1-v\cdot v_0'/c^2}\right)^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{c^2 - v_0'v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}-\frac{v_0'^2}{c^2}+\frac{v^2v_0'^2}{c^4}}} = \frac{c^2-v_0'v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v_0'^2}{c^2}}} \tag{C.26}$$

In gleicher Weise folgt

$$\frac{v'}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}=\frac{v_0'-v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v_0'^2}{c^2}}} \tag{C. 27}$$

Die Gleichungen (C. 26) und (C. 27) werden in Gl. (C. 24) und Gl. (C. 25) eingesetzt, diese jeweils nach dm' aufgelöst und gleichgesetzt. Es entsteht:

$$m\left\{\frac{c^2-vv_0'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right\}dv+mv_0'(c^2-v^2)\cdot d\left\{\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right\}+dm\frac{v_0'(c^2-v^2)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=0 \tag{C. 28}$$

Die beiden Differentiale mit der Abhängigkeit von v werden vereinheitlicht und unter Verwendung der Kettenregel folgt

$$d\left\{\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right\}=\frac{v}{c^2\left\{1-\frac{v^2}{c^2}\right\}^{3/2}}\,dv \tag{C. 29}$$

Nach dem Einsetzen in Gl. (C. 28) und Separierung der Terme für Masse und Geschwindigkeit folgt das Endergebnis

$$\frac{dm}{m}=-\frac{dv}{v_0'(1-v^2/c^2)} \tag{C. 30}$$

Die Integration ergibt

$$ln\,\{m\}=-\frac{c}{2v_0'}\,ln\left\{\frac{c+v}{c-v}\right\}+C \tag{C. 31}$$

Mit dem Anfangswert m_0 und dem Endwert m entsteht die *Relativistische Raketengleichung* nach J. Akeret

$$\frac{m}{m_0}=\left\{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}\right\}^{c/2v_0'} \tag{C. 32}$$

oder

$$\frac{v}{c}=\frac{1-\left(\frac{m}{m_0}\right)^{2v_0'/c}}{1+\left(\frac{m}{m_0}\right)^{2v_0'/c}} \tag{C. 33}$$

In Kap. 6.4.2 werden Berechnungen aus dieser Gleichung mit der klassischen Raketenformel nach Ziolkowski und den in dieser Anlage abgeleiteten numerischen Beziehungen gegenübergestellt.

Anlage D: Impulsberechnung für relativistischen nicht elastischen Stoß

Beim vollkommen nicht elastischen d. h. rein plastischen Stoß treffen 2 Massen zentral aufeinander und sollen sich gemeinsam ohne Rotation weiterbewegen. Es wird hier ein Näherungsverfahren zur Ermittlung der Endgeschwindigkeit eines Körpers auf Basis des Impulserhaltungssatzes entwickelt, bei dem die Beziehung $m_3 = m_1 + m_2$ vorausgesetzt wird. Dieser Ansatz ist nur wichtig für eine theoretische Betrachtung, denn es zeigt sich, dass zusätzlich eine Massenerhöhung Δm_3 durch Energieumwandlung zu berücksichtigen ist. Zur genauen Darstellung der Zusammenhänge sei auf Kap. 7.1 verwiesen.

Außerdem erlaubt die vorliegende einfache Beziehung einen genauen Vergleich zwischen den Iterationsverfahren der Rekursion, nach Newton und der Bisektion. Letzteres stellt sich dabei als überlegen heraus, weil es als einziges für alle Ausgangswerte Ergebnisse liefert und wird daher auch bei den Berechnungen in den Anlagen A – C genutzt.

Unter den genannten Einschränkungen ergibt sich für den relativistischen Impuls bei Nutzung die Beziehung $m_3 = m_1 + m_2$ aus Gl. (7.01)

$$p_0 = m_1\gamma_1 v_1 + m_2\gamma_2 v_2 = (m_1 + m_2)\gamma_3 v_3 \tag{D.01}$$

aus der der Wert v_3 auf numerische Weise ermittelt werden kann. Hierzu werden im Folgenden unterschiedliche Verfahren genutzt und die Ergebnisse gegenübergestellt.

D.1 Rekursionsverfahren

Das Verfahren mit dem geringsten mathematischen Aufwand ist die einfache Rekursion. Die Entwicklungsgleichung kann direkt aus Gl. (D.01) bestimmt werden mit

$$\frac{(v_3)_{k+1}}{c} = \frac{p_0}{c(m_1 + m_2)\gamma_{3k}} = \frac{p_0}{c(m_1 + m_2)}\sqrt{1 - \left(\frac{(v_3)_k}{c}\right)^2} \tag{D.02}$$

D.2 Verfahren nach Newton

Bei einer Iteration nach dem Newton-Verfahren ergibt sich allgemein die Folge

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \tag{D.03}$$

Wird die Gleichung Gl. (D.01) umgeformt so folgt zunächst

$$\frac{m_1\gamma_1 v_1 + m_2\gamma_2 v_2}{m_1 + m_2} - \gamma_3 v_3 = 0 = f(v_3) \tag{D.04}$$

und daraus

$$f\left(\frac{v_3}{c}\right) = \frac{p_0}{c(m_1 + m_2)} - \frac{v_3}{c}\left(1 - \frac{{v_3}^2}{c^2}\right)^{-1/2} \tag{D.05}$$

Mit

$$x = \frac{v_3}{c} \tag{D.06}$$

Folgt

$$f(x) = \frac{p_0}{(m_1 + m_2)} - x(1 - x^2)^{-1/2} \tag{D.07}$$

und

$$f'(x) = -(1 - x^2)^{-3/2} \tag{D.08}$$

Nach Einsetzen in Gl. (D.03) erhält die Iterationsformel somit die Form

$$\frac{(v_3)_{k+1}}{c} = \frac{(v_3)_k}{c} + \frac{\dfrac{p_0}{(m_1 + m_2)} - (v_3)_k \left[1 - \left(\dfrac{(v_3)_k}{c}\right)^2\right]^{-1/2}}{c\left[1 - \left(\dfrac{(v_3)_k}{c}\right)^2\right]^{-3/2}} \tag{D.09}$$

D.3 Bisektion

Zunächst wird die Ausgangsfunktion aus Gl. (D.01) definiert, und zwar

$$f(v_3) = \gamma_3 v_3 = \frac{p_0}{(m_1 + m_2)} \tag{D.10}$$

wobei die Größe von p_0 durch die gegebenen Ausgangsbedingungen definiert ist. Zur Berechnung werden zunächst geeignete Startwerte $(v_{3+})_0$ und $(v_{3-})_0$ bestimmt, für die gilt

$$f(v_{3+})_0 > \frac{p_0}{(m_1 + m_2)} \tag{D.11}$$

und

$$f(v_{3-})_0 < \frac{p_0}{(m_1 + m_2)} \tag{D.12}$$

Die Funktion $f(v_3)$ muss im Intervall $[(v_{3-})_0; (v_{3+})_0]$ stetig und differenzierbar sein, außerdem ist $f'(v_3) \neq 0$ gefordert, d. h. es darf im Definitionsintervall keine Minima oder Maxima geben, da sonst keine eindeutige Lösung existiert. Daraufhin wird der Mittelwert gebildet

$$(v_3)_1 = \frac{(v_{3+})_0 + (v_{3-})_0}{2} \tag{D.13}$$

und $f(v_3)_1$ gemäß Gl. (D.10) berechnet. Es gelten dann die folgenden Festlegungen:

$$f(v_3)_1 > \frac{p_0}{(m_1 + m_2)} :\Rightarrow (v_{3+})_1 = (v_3)_1 \; und \; (v_{3-})_1 = (v_{3-})_0 \tag{D.14}$$

$$f(v_3)_1 < \frac{p_0}{(m_1 + m_2)} :\Rightarrow (v_{3+})_1 = (v_{3+})_0 \; und \; (v_{3-})_1 = (v_3)_1 \tag{D.15}$$

Diese Berechnung wird mit steigendem Index von 1 bis n so lange wiederholt, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht wird. Mit jedem Berechnungsschritt wird die Differenz zwischen v_{3+} und v_{3-} halbiert. Bei Nutzung eines Standardprogramms zur Tabellenkalkulation (z. B. Microsoft Excel©) mit einer Berechnungsgenauigkeit von 15 Stellen sind demgemäß wegen der Abschätzung

$$2^{10} = 1024 \approx 10^3 \tag{D.16}$$

und damit

$$10^{15} \approx 2^{50} \tag{D.17}$$

etwa 50 Schritte erforderlich, um die maximal mögliche Genauigkeit zu erreichen; als sicher in allen Fällen haben sich 60 erwiesen. Wegen der Randbedingung $v_1 = 0$ können die Startwerte einfach festgelegt werden und sind für $(v_{3-})_0 = 0$ und $(v_{3+})_0 = v_2$.

D.4 Auswertung

Im Folgenden sind die Ergebnisse der dargestellten Verfahren für unterschiedliche Geschwindigkeiten dargestellt. Gemäß den Überlegungen in Kap. 7.1 werden hier nur Fälle betrachtet, bei der die Massen gleich sind und eine der Geschwindigkeiten (hier: v_1) gleich 0 ist. Alle Iterationsbeziehungen führen zu den gleichen Ergebnissen; die Verfahren mit einfacher Rekursion und nach Newton haben den Vorteil, dass sie bei geringen Werten von v_2/c schneller konvergieren. Sie weisen aber den Nachteil auf, dass die Konvergenz bei hohen Geschwindigkeiten nachlässt und ab $p_0 = \gamma_2 v_2 \geq 2c$ (für $m_1 = m_2 = 1$) nicht mehr gegeben ist, während die Bisektion ein deutlich besseres Verhalten zeigt und ab etwa $v_2/c > 0{,}895$ als einziges Verfahren noch funktioniert.

In den nachfolgenden Tabellen sind Beispiele für Berechnungen mit verschiedenen Randbedingungen wiedergegeben. Es ist dabei gekennzeichnet, ab wann bei der Berechnung kein Unterschied mehr zwischen den aufeinander folgenden Iterationsschritten ermittelt werden kann und der Vorgang damit beendet ist (Statusabfrage „x“ im Feld „St“). Führt ein Verfahren nicht zur Konvergenz wird dies bei der Bewertung mit „nicht ok“ gekennzeichnet. Außerdem wurde der prozentuale Unterschied zu dem sich aus der relativistischen Geschwindigkeitsaddition ergebenden Wert $v_{3,Rel}$ berechnet.

In den Tabellen werden folgende Formeln verwendet:

$$\frac{v_{3,Rel}}{c} = \frac{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v_2}{c}\right)^2}}{\frac{v_2}{c}} \qquad \gamma_{3,Rel} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_{3,Rel}}{c}\right)^2}} \qquad \frac{p_0}{c} = m_2 \gamma_2 \frac{v_2}{c}$$

Rekursion: $$\frac{(v_3)_{k+1}}{c} = \frac{p_0}{c(m_1 + m_2)} \sqrt{1 - \left(\frac{(v_3)_k}{c}\right)^2}$$

Newton:

$$\frac{(v_3)_{k+1}}{c} = \frac{(v_3)_k}{c} + \left\{ \frac{p_0}{c(m_1 + m_2)} - \frac{(v_3)_k}{c} \left[1 - \left(\frac{(v_3)_k}{c}\right)^2\right]^{-1/2} \right\} \left[1 - \left(\frac{(v_3)_k}{c}\right)^2\right]^{3/2}$$

Bisektion: $\frac{(v_3)_{k+1}}{c} = \frac{(v_{3-})_k + (v_{3+})_k}{2c}$

Abfrage $f(v_3)_{k+1} > \frac{p_0}{(m_1 + m_2)} : \Rightarrow (v_{3+})_{k+1} = (v_3)_{k+1}\ und\ (v_{3-})_{k+1} = (v_{3-})_k$

Abfrage $f(v_3)_{k+1} < \frac{p_0}{(m_1 + m_2)} : \Rightarrow (v_{3+})_{k+1} = (v_{3+})_k\ und\ (v_{3-})_{k+1} = (v_3)_{k+1}$

Zweckmäßige Startwerte: Für $\frac{(v_{3-})_0}{c} = \frac{v_1}{c}$ und für $\frac{(v_{3+})_0}{c} = \frac{v_2}{c}$

Die Formeln in den Ergebnisfeldern (blau eingefärbt): Für Rekursion, Newton und Bisektion jeweils die letzten Werte der Iteration.

$\frac{v_3}{v_{3,Rel}} - 1$ Ergebnisvergleich. Gewählt wurde das Ergebnis der Bisektion (v_3) und die relativistische Geschwindigkeitsaddition ($v_{3,Rel}$) in %

Für die Berechnungen wurden folgende Fälle ausgewählt:

Tab. D.1	Tab. D.2	Tab. D.3
$m_1 = 1;\ m_2 = 1$ $v_1 = 0\ ;\ v_2 = 0{,}1c$	$m_1 = 1;\ m_2 = 1$ $v_1 = 0\ ;\ v_2 = 0{,}8c$	$m_1 = 1{:}\ m_2 = 1$ $v_1 = 0\ ;\ v_2 = 0{,}89c$

D5. Codes für Tabellenkalkulation:

Koordinate		Code
G1	=	(1-(1-B2^2)^(1/2))/B2
G2	=	(1-G1^2)^(1/2)
B3	=	B2*(1-B2^2)^-(1/2)
B5	=	WENN(B6="ok";B70;"")
D5	=	WENN(D6="ok";D70;"")
F5	=	WENN(F6="ok";F70;"")
H5	=	F5/G1-1
B6	=	WENN(C70="";"nicht ok";"ok")
D6	=	WENN(E70="";"nicht ok";"ok")
F6	=	WENN(G70="";"nicht ok";"ok")
B8	=	B70/D70-1
D8	=	D70/F70-1
F8	=	F70/B70-1
G10	=	B1
H10	=	B2
B11	=	B$3/(1+D$2)*(1-B10^2)^(1/2)
C11	=	WENN(B11=B10;"x";"")
D11	=	D10+(B$3/(1+D$2)-D10*(1-D10^2)^-(1/2))*((1-D10^2)^(3/2))
E11	=	WENN(D11=D10;"x";"")
F11	=	(G10+H10)/2
G11	=	WENN(F11*(1-F11^2)^-(1/2)<B$3/(1+D$2);F11;G10)
H11	=	WENN(F11*(1-F11^2)^-(1/2)<B$3/(1+D$2);H10;F11)
I11	=	WENN(F11=F10;"x";"")

Die Codes B11 bis I11 erlauben ein Kopieren, hier B70 bis I70

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	v_1/c =	0		m_2/m_1=		$v_{3,Rel}$/c =	0,05012563		
2	v_2/c =	0,1		1		$\gamma_{3,Rel}$ =	1,00125866		
3	p_0/c =	0,1005037815							
4		Rekursion		Newton		Bisektion			
5	v_3/c =	0,0501885613		0,0501885613		0,0501885613	$v_3/v_{3,Rel}$ =	0,1%	
6		ok		ok		ok			
7		Rekursion/Newton		Newton/Bisektion		Bisektion/Rekursion			
8		0,0E+00		7,1E-15		-7,2E-15			
9	k	v_3/c	St	v_3/c	St	$(v_{3-}+v_{3+})$/2c	v_{3-}/c	v_{3+}/c	St
10	0	0		0			0	0,1	
11	1	0,0502518908		0,0502518908		0,0500000000	0,0500000000	0,1000000000	
12	2	0,0501884013		0,0501885616		0,0750000000	0,0500000000	0,0750000000	
13	3	0,0501885617		0,0501885613		0,0625000000	0,0500000000	0,0625000000	
14	4	0,0501885613		0,0501885613	x	0,0562500000	0,0500000000	0,0562500000	
15	5	0,0501885613		0,0501885613	x	0,0531250000	0,0500000000	0,0531250000	
16	6	0,0501885613		0,0501885613	x	0,0515625000	0,0500000000	0,0515625000	
17	7	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0507812500	0,0500000000	0,0507812500	
18	8	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0503906250	0,0500000000	0,0503906250	
19	9	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501953125	0,0500000000	0,0501953125	
20	10	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0500976563	0,0500976563	0,0501953125	
21	11	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501464844	0,0501464844	0,0501953125	
22	12	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501708984	0,0501708984	0,0501953125	
23	13	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501831055	0,0501831055	0,0501953125	
24	14	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501892090	0,0501831055	0,0501892090	
25	15	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501861572	0,0501861572	0,0501892090	
26	16	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501876831	0,0501876831	0,0501892090	
27	17	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501884460	0,0501884460	0,0501892090	
28	18	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501888275	0,0501884460	0,0501888275	
29	19	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501886368	0,0501884460	0,0501886368	
30	20	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501885414	0,0501885414	0,0501886368	
31	21	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501885891	0,0501885414	0,0501885891	
32	22	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501885653	0,0501885414	0,0501885653	
33	23	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501885533	0,0501885533	0,0501885653	
34	24	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501885593	0,0501885593	0,0501885653	
35	25	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501885623	0,0501885593	0,0501885623	
36	26	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501885608	0,0501885608	0,0501885623	
37	27	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501885615	0,0501885608	0,0501885615	
38	28	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501885612	0,0501885612	0,0501885615	
39	29	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501885613	0,0501885612	0,0501885613	
40	30	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501885612	0,0501885612	0,0501885613	
41	31	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501885613	0,0501885613	0,0501885613	
42	32	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501885613	0,0501885613	0,0501885613	
60	50	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501885613	0,0501885613	0,0501885613	
61	51	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501885613	0,0501885613	0,0501885613	
62	52	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501885613	0,0501885613	0,0501885613	x
63	53	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501885613	0,0501885613	0,0501885613	x
64	54	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501885613	0,0501885613	0,0501885613	x
65	55	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501885613	0,0501885613	0,0501885613	x

Tab. D.1: Geschwindigkeit nach relativistischem nicht elastischem Stoß, $v_1 = 0$; $v_2 = 0{,}1c$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	v_1/c =	0		m_2/m_1=		$v_{3,Rel}$/c =	0,50000000		
2	v_2/c =	0,8		1		$\gamma_{3,Rel}$ =	1,15470054		
3	p_0/c =	1,3333333333							
4		Rekursion		Newton		Bisektion			
5	v_3/c =	0,5547001962		0,5547001962		0,5547001962	$v_3/v_{3,Rel}$ =	10,9%	
6		ok		ok		ok			
7		Rekursion/Newton		Newton/Bisektion		Bisektion/Rekursion			
8		0,0E+00		4,7E-15		-4,6E-15			
9	k	v_3/c	St	v_3/c	St	$(v_{3-}+v_{3+})/2c$	v_{3-}/c	v_{3+}/c	St
10	0	0		0			0	0,8	
11	1	0,6666666667		0,6666666667		0,4000000000	0,4000000000	0,8000000000	
12	2	0,4969039950		0,5723540713		0,6000000000	0,4000000000	0,6000000000	
13	3	0,5785370130		0,5550845393		0,5000000000	0,5000000000	0,6000000000	
14	4	0,5437707542		0,5547003739		0,5500000000	0,5500000000	0,6000000000	
15	5	0,5594891983		0,5547001962		0,5750000000	0,5500000000	0,5750000000	
16	6	0,5525584281		0,5547001962		0,5625000000	0,5500000000	0,5625000000	
17	7	0,5556494433		0,5547001962	x	0,5562500000	0,5500000000	0,5562500000	
18	8	0,5542777868		0,5547001962	x	0,5531250000	0,5531250000	0,5562500000	
19	9	0,5548878305		0,5547001962	x	0,5546875000	0,5546875000	0,5562500000	
20	10	0,5546167828		0,5547001962	x	0,5554687500	0,5546875000	0,5554687500	
21	11	0,5547372648		0,5547001962	x	0,5550781250	0,5546875000	0,5550781250	
22	12	0,5546837205		0,5547001962	x	0,5548828125	0,5546875000	0,5548828125	
23	13	0,5547075186		0,5547001962	x	0,5547851563	0,5546875000	0,5547851563	
24	14	0,5546969418		0,5547001962	x	0,5547363281	0,5546875000	0,5547363281	
25	15	0,5547016426		0,5547001962	x	0,5547119141	0,5546875000	0,5547119141	
26	16	0,5546995534		0,5547001962	x	0,5546997070	0,5546997070	0,5547119141	
27	17	0,5547004819		0,5547001962	x	0,5547058105	0,5546997070	0,5547058105	
28	18	0,5547000692		0,5547001962	x	0,5547027588	0,5546997070	0,5547027588	
29	19	0,5547002527		0,5547001962	x	0,5547012329	0,5546997070	0,5547012329	
30	20	0,5547001711		0,5547001962	x	0,5547004700	0,5546997070	0,5547004700	
31	21	0,5547002074		0,5547001962	x	0,5547000885	0,5547000885	0,5547004700	
32	22	0,5547001913		0,5547001962	x	0,5547002792	0,5547000885	0,5547002792	
33	23	0,5547001984		0,5547001962	x	0,5547001839	0,5547001839	0,5547002792	
34	24	0,5547001952		0,5547001962	x	0,5547002316	0,5547001839	0,5547002316	
35	25	0,5547001967		0,5547001962	x	0,5547002077	0,5547001839	0,5547002077	
36	26	0,5547001960		0,5547001962	x	0,5547001958	0,5547001958	0,5547002077	
37	27	0,5547001963		0,5547001962	x	0,5547002017	0,5547001958	0,5547002017	
38	28	0,5547001962		0,5547001962	x	0,5547001988	0,5547001958	0,5547001988	
39	29	0,5547001962		0,5547001962	x	0,5547001973	0,5547001958	0,5547001973	
40	30	0,5547001962		0,5547001962	x	0,5547001965	0,5547001958	0,5547001965	
41	31	0,5547001962		0,5547001962	x	0,5547001962	0,5547001962	0,5547001965	
42	32	0,5547001962		0,5547001962	x	0,5547001963	0,5547001962	0,5547001963	
60	50	0,5547001962	x	0,5547001962	x	0,5547001962	0,5547001962	0,5547001962	
61	51	0,5547001962	x	0,5547001962	x	0,5547001962	0,5547001962	0,5547001962	x
62	52	0,5547001962	x	0,5547001962	x	0,5547001962	0,5547001962	0,5547001962	x
63	53	0,5547001962	x	0,5547001962	x	0,5547001962	0,5547001962	0,5547001962	
64	54	0,5547001962	x	0,5547001962	x	0,5547001962	0,5547001962	0,5547001962	x
65	55	0,5547001962	x	0,5547001962	x	0,5547001962	0,5547001962	0,5547001962	x

Tab. D.2: Geschwindigkeit nach relativistischem nicht elastischem Stoß, $v_1 = 0$; $v_2 = 0{,}8c$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	v_1/c =	0		m_2/m_1 =		$v_{3,Rel}$/c =	0,61128031		
2	v_2/c =	0,89		1		$\gamma_{3,Rel}$ =	1,26356090		
3	p_0/c =	1,9519233617							
4		Rekursion		Newton		Bisektion			
5	v_3/c =			0,6984528781		0,6984528781	$v_3/v_{3,Rel}$ =	14,3%	
6		nicht ok		ok		ok			
7		Rekursion/Newton		Newton/Bisektion		Bisektion/Rekursion			
8		3,4E-02		0,0E+00		-3,3E-02			
9	k	v_3/c	St	v_3/c	St	$(v_{3-}+v_{3+})/2c$	v_{3-}/c	v_{3+}/c	St
10	0	0		0			0	0,89	
11	1	0,9759616809		0,9759616809		0,4450000000	0,4450000000	0,8900000000	
12	2	0,2127032246		0,9397078220		0,6675000000	0,6675000000	0,8900000000	
13	3	0,9536286032		0,8688424449		0,7787500000	0,6675000000	0,7787500000	
14	4	0,2937506647		0,7743135001		0,7231250000	0,6675000000	0,7231250000	
15	5	0,9329042795		0,7115556340		0,6953125000	0,6953125000	0,7231250000	
16	6	0,3514676442		0,6988106129		0,7092187500	0,6953125000	0,7092187500	
17	7	0,9136953543		0,6984531401		0,7022656250	0,6953125000	0,7022656250	
18	8	0,3966306344		0,6984528781		0,6987890625	0,6953125000	0,6987890625	
19	9	0,8959116343		0,6984528781		0,6970507813	0,6970507813	0,6987890625	
20	10	0,4335537100		0,6984528781	x	0,6979199219	0,6979199219	0,6987890625	
21	11	0,8794661312		0,6984528781	x	0,6983544922	0,6983544922	0,6987890625	
22	12	0,4645201595		0,6984528781	x	0,6985717773	0,6983544922	0,6985717773	
23	13	0,8642751101		0,6984528781	x	0,6984631348	0,6983544922	0,6984631348	
24	14	0,4909276759		0,6984528781	x	0,6984088135	0,6984088135	0,6984631348	
25	15	0,8502581396		0,6984528781	x	0,6984359741	0,6984359741	0,6984631348	
26	16	0,5137129813		0,6984528781	x	0,6984495544	0,6984495544	0,6984631348	
27	17	0,8373381377		0,6984528781	x	0,6984563446	0,6984495544	0,6984563446	
28	18	0,5335439275		0,6984528781	x	0,6984529495	0,6984495544	0,6984529495	
29	19	0,8254414098		0,6984528781	x	0,6984512520	0,6984512520	0,6984529495	
30	20	0,5509184645		0,6984528781	x	0,6984521008	0,6984521008	0,6984529495	
31	21	0,8144976752		0,6984528781	x	0,6984525251	0,6984525251	0,6984529495	
32	22	0,5662205832		0,6984528781	x	0,6984527373	0,6984527373	0,6984529495	
33	23	0,8044400793		0,6984528781	x	0,6984528434	0,6984528434	0,6984529495	
34	24	0,5797542286		0,6984528781	x	0,6984528965	0,6984528434	0,6984528965	
35	25	0,7952051896		0,6984528781	x	0,6984528700	0,6984528700	0,6984528965	
36	26	0,5917650167		0,6984528781	x	0,6984528832	0,6984528700	0,6984528832	
37	27	0,7867329748		0,6984528781	x	0,6984528766	0,6984528766	0,6984528832	
38	28	0,6024547712		0,6984528781	x	0,6984528799	0,6984528766	0,6984528799	
39	29	0,7789667662		0,6984528781	x	0,6984528782	0,6984528766	0,6984528782	
40	30	0,6119916160		0,6984528781	x	0,6984528774	0,6984528774	0,6984528782	
41	31	0,7718532028		0,6984528781	x	0,6984528778	0,6984528778	0,6984528782	
42	32	0,6205171991		0,6984528781	x	0,6984528780	0,6984528780	0,6984528782	
60	50	0,6671025921		0,6984528781	x	0,6984528781	0,6984528781	0,6984528781	
61	51	0,7270581323		0,6984528781	x	0,6984528781	0,6984528781	0,6984528781	x
62	52	0,6700717735		0,6984528781	x	0,6984528781	0,6984528781	0,6984528781	x
63	53	0,7244527587		0,6984528781	x	0,6984528781	0,6984528781	0,6984528781	x
64	54	0,6727542511		0,6984528781	x	0,6984528781	0,6984528781	0,6984528781	x
65	55	0,7220808780		0,6984528781	x	0,6984528781	0,6984528781	0,6984528781	x

Tab. D.3: Geschwindigkeit nach relativistischem nicht elastischem Stoß, $v_1 = 0$; $v_2 = 0{,}89c$

Anlage E: Kurze Einführung in die Vektorrechnung

Um die Darstellung der Maxwell-Gleichungen in Kapitel 10 zu verstehen sind Grundkenntnisse der Vektorrechnung erforderlich. Die hierfür notwendigen Beziehungen sowie grundlegende Elemente zum Verständnis von Feldzusammenhängen sind hier in kurzer Form zusammengefasst. Dargestellt sind nur die unbedingt erforderlichen Beziehungen und es gelten folgende Einschränkungen:

1. Die Darstellungen gelten für 3 Dimensionen; diese sind für die Verhältnisse in Feldern ausreichend.
2. Es werden ausschließlich kartesische (rechtwinklige) Koordinatensysteme betrachtet (also z. B. keine Kugel- oder Zylinderkoordinaten).

Zunächst werden die grundsätzlichen Eigenschaften von Vektoren dargestellt und dann die zum Verständnis der Maxwell-Gleichungen erforderlichen Differenzialfunktionen erläutert.

E.1 Skalar und Vektor

In einem Koordinatensystem können jedem Punkt physikalische Größen als Skalar oder Vektor zugeordnet werden. Vektoren sind richtungsabhängig, Skalare sind dies nicht. Beispiele für skalare Größen sind Temperatur, Arbeit und Druck. Für richtungsgebundene Größen wie z. B. Kräfte oder Felder werden dagegen Vektoren genutzt, die neben der Ortsangabe im Koordinatensystem auch Werte für den Betrag und die Richtung beinhalten. Die Darstellung eines Vektors $\vec{a}$ in kartesischen Koordinaten erfolgt in der Form

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \tag{E.01}$$

Der Betrag von $\vec{a}$, zum Beispiel für die Größe einer Kraft, wird bestimmt durch

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{E.02}$$

Sind Richtung und Betrag zweier Vektoren gleich groß so sind diese identisch, können sich aber an unterschiedlichen Punkten im Koordinatensystem befinden.

E.2 Vektoraddition

Für die Addition zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt die Regel:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix} \tag{E.03}$$

Diese Addition lässt sich auch grafisch ausführen. Dazu wird eine Darstellung mit Pfeilen verwendet; die Lage im Diagramm ist hierbei die Richtung, die Länge des Pfeils gibt die Größe des Betrags an.

Für die Addition werden die Pfeile $\vec{a}$ und $\vec{b}$ miteinander verbunden; die entstehende Linie zwischen Anfangs- und Endpunkten ist nach Betrag und Richtung das Ergebnis der Addition.

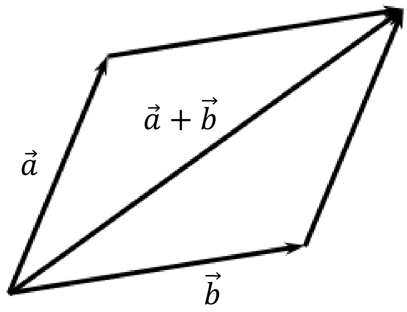


Abb. E.1: Grafische Vektoraddition

E.3 Skalarprodukt

Das Skalarprodukt (oder innere Produkt) zweier Vektoren wird so genannt, weil das Ergebnis der Multiplikation ein Skalar ist. Dies ist in kartesischen Koordinaten

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + \ a_y b_y + \ a_z b_z \tag{E.04}$$

oder

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi \tag{E.05}$$

mit φ als Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Diese Operation wird in der Physik oft gebraucht, wenn die Arbeit berechnet werden soll und der Winkel zwischen Kraft und Bewegungsrichtung nicht übereinstimmt. Kraft und Richtung sind Vektoren, das Ergebnis Arbeit ist eine skalare Größe. Anschaulich wird die Bedeutung klar, wenn man eine Masse im Schwerefeld der Erde und eine angreifende Kraft betrachtet. Wird die Masse von der Kraft nach oben bewegt ($\varphi = 0; \cos\varphi = 1$) so wird Arbeit verrichtet und die potenzielle Energie erhöht, greift die Kraft mit $\varphi = 90°$ an, bleibt die Masse auf gleicher Höhe und die Energie ändert sich nicht.

E.4 Kreuzprodukt

Das Kreuzprodukt (auch vektorielles Produkt oder äußeres Produkt) der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ im dreidimensionalen Raum ist ein bestimmter Vektor, der senkrecht auf der von diesen aufgespannten Ebene steht. Die Länge ist gleich der Fläche des Parallelogramms, also

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\sin\varphi| \tag{E.06}$$

Im dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem ist das Kreuzprodukt folgendermaßen zu berechnen

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \tag{E.07}$$

Beispiele für die Anwendung des Kreuzprodukts sind die Lorentzkraft oder das Drehmoment. So gilt z. B die Beziehung für den magnetischen Teil der Lorentzkraft

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B} \tag{E.08}$$

mit q als Ladung und $\vec{v}$ als deren Geschwindigkeit sowie $\vec{B}$ als magnetische Feldstärke. Die Ausrichtung der entstehenden Lorentzkraft ist senkrecht sowohl zur Geschwindigkeit als auch zum Magnetfeld (3-Finger Regel).

E.5 Feldbegriff und Nabla-Operator

In der Physik ist ein Feld definiert als die räumliche Verteilung einer physikalischen Größe. Im einfachsten Fall liegt ein Skalarfeld vor, wie für Temperaturverteilungen oder Potentiale möglich. Ist ein physikalischer Vektor abhängig von der Lage des Ortes, spricht man von einem Vektorfeld. Es kann durch Feldlinien veranschaulicht werden, wobei die Tangente an die Feldlinie die Richtung des Vektors angibt. Der Betrag des Vektors wird durch die Dichte der Feldlinien dargestellt. Als Beispiele sind hier vor allem die elektrischen und magnetischen Felder zu nennen. Kennzeichnend für diese Felder ist der Umstand, dass insbesondere zeitliche Veränderungen eine Rolle spielen, die durch Differenziation dargestellt werden müssen. Hilfreich ist hierbei die Verwendung des Nabla-Operators.

Der Nabla-Operator $\vec{\nabla}$ ist ein vektorieller Differentialoperator. Das bedeutet, dass er in Vektorform geschrieben werden kann und bei Anwendung auf eine Funktion eine Differenzial-Operation durchführt, die eine 3-dimensionale Ableitung darstellt. Mit seiner Hilfe lassen sich die noch zu beschreibenden Größen Gradient, Divergenz und Rotation einfach darstellen. Er ist definiert für 3-dimensionale kartesische Koordinaten x, y, z als

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{E.09}$$

E.6 Gradient

Ein Feld, dem eine skalare Funktion f zugrunde liegt, ordnet jedem Punkt im Definitionsraum eine Zahl zu. Beispiele für skalare Felder im dreidimensionalen Raum sind die Verteilung von Temperaturen, Dichte oder Potentialen. Die Anwendung des Nabla-Operators auf f ergibt ein Vektorfeld, das Gradient (grad) genannt wird. Der Gradient zeigt an jedem Punkt des Raumes in die Richtung des stärksten Anstiegs und sein Betrag gibt die Steigung in diese Richtung an. Die Darstellung ist folgende

$$\operatorname{grad} f = \vec{\nabla} \cdot f \;\; = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_x}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f_y}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_z}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{E.10}$$

Ist das skalare Feld ein Potential, so gibt der negative Gradient des Feldes das zugehörige Kraftfeld an. Anschaulich klar ist das im Fall des Gravitationsfeldes: Zwei der Koordinaten sind gleich Null und ein Körper fällt in die Richtung, in der die Änderung seines Potentials maximal ist.

E.7 Divergenz

Bei Anwendung des Nabla-Operators auf ein Vektorfeld f ergibt das Skalarprodukt $\vec{\nabla} \cdot f$ ein skalares Feld, das in jedem Punkt des Raumes angibt, ob dort Feldlinien entstehen oder verschwinden. So ist am Ort einer positiven Punktladung die Divergenz des elektrischen Feldes größer als Null, da an diesem Punkt Feldlinien entstehen. Punkte mit positiver Divergenz werden Quellen genannt, Punkte mit negativer Divergenz dagegen Senken. Die Berechnung ergibt

$$\operatorname{div} \vec{f} = \vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \; = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \tag{E.11}$$

E.8 Rotation

Bildet man $\vec{\nabla} \times f$, so erhält man eine Vektorfunktion, die Rotation (rot) genannt wird und die die Wirbel des Vektorfelds f charakterisiert. Betrachtet man z. B. das Magnetfeld eines stromdurchflossenen Drahtes, so verlaufen die Feldlinien kreisförmig um diesen Draht und sind geschlossen. Die Berechnung erfolgt auf folgende Weise:

$$\operatorname{rot} \vec{f} = \vec{\nabla} \times \vec{f} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y} f_z - \dfrac{\partial}{\partial z} f_y \\ \dfrac{\partial}{\partial z} f_x - \dfrac{\partial}{\partial x} f_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} f_y - \dfrac{\partial}{\partial y} f_x \end{pmatrix} \tag{E.12}$$

Literaturverzeichnis

1. B. Roeck*, Der Morgen der Welt, Geschichte der Renaissance,* C. H. Beck, München, 2. Auflage 2018, ISBN 978 3 406 69876 7

2. R. K. Merton*, Science, Technology and Society in Seventeenth Century England*, Osiris, The University of Chicago Press, Vol. 4 (1938), S. 360-632

3. L. Darmstaedter, Handbuch zur Geschichte der Naturwissenschaften und Technik, 2. Auflage (1908), Julius Springer, Berlin

4. E. Strauss*, Dialog über die beiden hauptsächlichsten Weltsysteme, das ptolemäische und das kopernikanische von Galileo Galilei, aus dem italienischen übersetzt und erläutert von Emil Strauss*, Teubner Verlag Leipzig (1891)
   a) S. XLVII
   b) S. XLIX-L
   c) S. 197-198
   d) S. 9 und S. 497 (Anmerkungen)

5. T. Salusbury, *The Systeme of the World: In Four Dialogues*, Printed by William Leybourne, London, 1661

6. A. A. Michelson, *American Journal of Science*, 1881, 22, 120-129

7. A. A. Michelson, E. W. Morley*, American Journal of Science,* 1887, 34 (203), 333–345

8. G. F. FitzGerald*, Science,* 13 (1889), 390

9. H. A. Lorentz*, Zittingsversl. Akad. v. Wet., Amsterdam.,* 1 (1892), 74 (wikisource)

10. H. Poincaré, *Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles.* 5 (1900), 252–278

11. H. Poincaré, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l´Académie des Sciences,* 140 (1905), 1504–1508

12. A. Einstein, *Ann. Physik*, 322 (1905), 891-921
    a) 898-899
    b) 901
    c) *Wikibook*: Kommentare und Erläuterungen zum Artikel, § 1, (Rev. April 2019)

13. H. A. Lorentz*, Alte und neue Fragen der Physik, Vorträge gehalten in Göttingen vom 24.-29. Okt. 1910*, Physikalische Zeitschrift, 11 (1910)

14. H. A. Lorentz, *Das Relativitätsprinzip. Drei Vorlesungen gehalten in Teylers Stiftung zu Haarlem (1913).* B.G. Teubner, Leipzig and Berlin 1914

15. H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski, *Das Relativitätsprinzip,* 5. Auflage Springer Fachmedien Wiesbaden (1923), ISBN 978-3-663-19372-2
a) H. A. Lorentz, 1-25
b) A. Einstein, 26-53, 72-146
c) H. Minkowski, 54-66
d) A. Sommerfeld, 67-71
e) H. Weyl, 147-159

16. R. J. Kennedy, E. M. Thorndike*, Physical Review,* Vol. 42 (1932), 400-418

17. H. E. Ives, G. R. Stilwell*, Journal of the Optical Society of America*, Vol 28 (1938), 215-226

18. H. E. Ives, G. R. Stilwell*, Journal of the Optical Society of America,* Vol 31 (1941), 369-374

19. D. Giulini*, Special Relativity: A First Encounter,* Oxford University Press 2005 ISBN 978-0-19-856746-2

20. C. Lämmerzahl, *Ann. Phys. (Leipzig)* 14, No. 1 – 3 (2005), 71-102

21. C. Lämmerzahl*, Test Theories for Lorentz Invariance, Lect. Notes Phys.* 702 (2006), 349–384, Springer-Verlag Berlin Heidelberg

22. A. Einstein, *Ann. Physik,* 323 (1905), 639-641

23. G. Hinshaw et al., *The Astrophysical Journal Supplement Series,* 180 (2009) 225–245

24. R. Mansouri, R. U. Sexl*, General Relativity and Gravitation,* Vol 8, No. 7 (1977), 497-513

25. T. Müller*, Gravitation und Quantentheorie, Diplomarbeit Tübingen University,* March 2001

26. M. Born, *Die Relativitätstheorie Einsteins,* Springer Verlag Berlin Heidelberg New York,
7. Auflage (2013), ISBN 3-642-32357-7
a) S. 200 – 203
b) S. 192

27. R. K. Pathria*, The Theory of Relativity,* 2nd ed. Dover Publications (2003)
ISBN-10: 0-486-42819-2

28. W. Rindler, *Relativity, 2nd ed.,* Oxford University Press Inc. New York (2006)
ISBN 0–19–856731–6

29. A. Einstein*, Über die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie,* 24. Auflage 2009, Springer Spektrum, ISBN 978-3-642-31278-6

30. A. Macdonald, *Am. J. Phys.* 49 (1981) 493

31. R. d´Inverno*, Einführung in die Relativitätstheorie* WILEY-VCH Verlag Weinheim (2009), ISBN 978-3-527-40912-9

32. R. Sexl, H. K. Schmidt, *Raum-Zeit-Relativität,* Friedr. Vieweg & Sohn Braunschweig, (1990), ISBN 3-528-27236-8

33. R. U. Sexl, H. K. Urbantke, *Gravitation und Kosmologie, BI-Wissenschaftsverlag* (1987), ISBN 3-411-03177-8

34. H. J. Lüdde, T. Rühl, *Spezielle Relativitätstheorie,* Vorlesungsscript, JW Goethe-University Frankfurt

35. D. Giulini, *The British Journal for the Philosophy of Science,* 52, 651-670

36. M. v. Laue*, Ann. Physik.* 23 (1907), 989-900

37. R. V. Jones, *Proc. R. Soc. Lond.* A. 328 (1972), 337-352

38. R. V. Jones*, Proc. R. Soc. Lond.* A. 345 (1975), 351-364

39. M. Born*, Ann. Physik,* 335 Nr. 11 (1909), 1–56

40. W. C. Salmon, *Philosophy of Science,* Vol. 36, No. 1 (1969), 44-63

41. T. A. Debs*, M. L. Redhead, American Journal of Physics,* 64 (1996), 384-392

42. *Ruhemasse und relativistische Masse eines Körpers,* Wikibooks, Status 19.8.2014

43. P. S. Epstein, *Ann. Phys.,* 36 (1911), 779-795

44. A. Sommerfeld*, Ann. Phys*., 32 (1910), 749-776

45. D. C. Chang, *Eur. Phys. J. Plus* (2017) 132:140

46. F. K. Kneubühl*, Repetitorium der Physik,* Teubner Studienbücher (1988), ISBN 3-519-23012-7
    a) S. 266-268
    b) S. 319-320
    c) S. 70

47. R. Göhring, *Spezielle Relativitätstheorie*, Skript zum Seminar des Physikalischen Vereins, Frankfurt am Main, 2012

48. A. Einstein, *Ann. Physik,* 322 (1905), 132-148,

49. *Conference on the Michelson-Morley Experiment* (Pasadena 4. und 5. Feb. 1927), in: *The Astrophysical Journal*, No.5, 68 (1928), 341-402
    a) A. A. Michelson, 342-345
    b) H. A. Lorentz, 345-351
    c) D. C. Miller, 352-367
    d) R. J. Kennedy, 367-373
    e) E. R. Hedrick, 374-382

f) P. S. Epstein, 383-389
g) W. S. Adams et al., Discussion, 389-402
h) D. C. Miller, 352

50. J. Stein, *Michelson's Experiment and its Interpretation according to Righi,* John G. Wolbach Library, Harvard-Smithonian Center for Astrophysics, Provided by the NASA Astrophysics Data System

51. V. Varićak, *Physikalische Zeitschrift,* 11 (1910), 586-587

52. M. v. Laue, *Physikalische Zeitschrift,* 13 (1912), 501-506

53. T. Udem, *Die Messung der Frequenz von Licht mit modengekoppelten Lasern,* Habilitationsschrift, München, Dez. 2002

54. C. Lämmerzahl, C. Baxmaier, H. Dittus, H. Müller, A. Peters, S. Schiller, *Int. J. Mod. Physics,* Vol. 11, No.7 (2002), 1109-1136

55. W. de Sitter, *Physikalische Zeitschrift,* 14 (1913), 429

56. F. T. Trouton, H. R. Noble, *Proc. Royal Soc. 74,* 479 (1903), 132–133.

57. R. Mansouri, R. U. Sexl, *General Relativity and Gravitation,* Vol 8, No. 7 (1977), 515-524

58. R. Mansouri, R. U. Sexl, *General Relativity and Gravitation,* Vol 8, No. 10 (1977), 809-814

59. H. Robertson, *Rev. Mod. Phys.,* 21 (1949) 378-382

60. F. Goos, H. Hänchen, *Ann. Physik,* 435 (1943), 383-392

61. F. Goos, H. Hänchen, *Ann. Physik,* 436 (1947), 333-346

62. T. E. Hartman, *J. Appl. Phys.,* 31 (1962), 3427-3433

63. H. G. Winful, *Phys. Rep.,* 436 (2006), 1-69

64. G. Nimtz, *Prog. Quant. Electr.,* 27 (2003), 417-450

65. H. Aichmann, G. Nimtz, *Found.* Phys., 44 (2014), 678-688

66. J. J. Carey ,J. Zawadzka, D. A. Jaroszynski, K. Wynnc, *Phys. Rev. Letters,* 84 (2000), 1431-1434

67. S. Longhi, M. Marano, P. Laporta, M. Belmonte, *Phys. Rev. E,* Vol. 64, 055602(R)

68. A. Bergstrom, *International Journal of Physics*, Vol 3, No.1 (2015), 40-44

69. Ph. Balcou, L. Dutriaux, *Phys. Rev. Letters,* 78 (1997)

70. E. M. Dewan, M. J. Beran, *American Journal of Physics,* 27 (1959), 517-518

71. J. S. Bell, *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics*, Cambridge University Press (1987), ISBN 0-521-52338-9, 67-80

72. D. J. Miller*, American Journal of Physics,* 78 (2010), 633-638

73. F. Fernflores, *International Studies in the Philosophy of Science*, 25 (2011), 351-370

74. J. S. Prokhovnik*, J. Austr. Math. Soc.,* Vol.5, Is. 02, May 1965, S. 273–284

75. H. E. Ives, *J. Opt. Soc. Am.,* Vol. 42,1 (1952), 540-543

76. D. Mattingly, *"Modern Tests of Lorentz Invariance", Living Rev. Relativity*, 8, (2005), 5. [Online Article]: (cited on 10 October 2017], http://www.livingreviews.org/lrr-2005-5

77. S. Reinhardt et al.*, Nat. Phys.,* 3 (2007), 861-864

78. M. E. Tobar, P. Wolf, S. Bite, G. Santarelli, V. Flambaum*, Phys. Rev. D* 81 02203 (2010)

79. S. Herrmann, A. Senger, K. Möhle, M. Nagel, E. V. Kovalchuk, A. Peters*, Phys. Rev.* D80 105011 (2009)

80. C. M. Will*, "The Confrontation between General Relativity and Experiment", Living Reviews in Relativity,* Vol. 9, Article number:3 (2006)

81. J. C. Hafele, R. E. Keating, *Science 177,* Issue 4044 (1972), 166-168

82. J. C. Hafele, R. E. Keating*, Science 177,* Issue 4044 (1972), 168-170

83. F. Freistetter*, "Newton, wie ein Arschloch das Universum neu erfand",* Carl Hanser Verlag (2017), ISBN 978-3-446-25460-2

84. K. v. Salis, *Mitteilungen der ETH Zürich: ETH life,* publ. 19.4.2005

85. A. A. Martinez, *School Science Review*, 86 316 (2005), 49-56

86. A. Einstein, *Äther und Relativitäts-Theorie*, Rede gehalten am 5. März 1920 an der Reichs-Universität in Leiden, Verlag Julius Springer, Berlin, 1920

87. *Resolutions of the CGPM*: 11th meeting (11. - 20. October 1960)

88. A. Bauch, T. Heindorff, *PTB-Mitteilungen* 112 (2002), Heft 4, 291-298

89. C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Friedman & Co., San Francisco, 1973, ISBN 0-7167-0334-3
    a) S. 68

90. J. Ackeret, *Helvetica Physica Acta*,19 (1946), 103-112

91. U. Walter, *Astronautics: The Physics of Space Flight, Second Edition.* Published 2012 by Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA

92. S. Westmoreland, *Acta Astronautica*, 67 (2010), 1248-1251

93. J. Rafelski, "*Relativity Matters"*, Springer International Publishing 2017, ISBN 978-3-319-51230-3, DOI 10.1007/978-3-319-51231-0

94. F. Herrmann, M. Pohlig: *Heaviside's Gravitoelectromagnetism: What is it good for and what not?* (2021), Karlsruher Institut für Technologie, DOI: 10.5445/IR/100157855

95. Observation of the effect of gravity on the motion of antimatter, Nature, Vol. 621, 2023, DOI.10.1038/s41586-023-06527-1

96. D. Giulini, Phys. Unserer Zeit, 35 (2004), 160-167, DOI:10.1002/piuz.200401042

97. Gravity Probe B: Final Results of a Space Experiment to Test General Relativity, DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.221101

98. M. Tajmar, F. Plesescu, AIP Conference Proceedings 1208, 220 (2010) DOI: 10.1063/1.3326250

99. J. Mehra, Albert Einsteins erste wissenschaftliche Arbeit, „Über die Untersuchung des Ätherzustandes im magnetischen Felde", WILEY online Library First published: September 1971. https://doi.org/10.1002/phbl.19710270901

100. G. Sagnac, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l´Académie des Sciences,* 157 (1913), 1410–1413

101. M. v. Laue: Über einen Versuch zur Optik der bewegten Körper. In: Münchener Sitzungsberichte. 1911, S. 405–412 (archive.org).

102. A. A. Michelson: The Effect of the Earth's Rotation on the Velocity of Light I. In: The Astrophysical Journal. 61 (1925), 137–139, DOI:10.1086/142878

103. A. A. Michelson, H. G. Gale: The Effect of the Earth's Rotation on the Velocity of Light II. In: The Astrophysical Journal. 61 (1925), 140–145, DOI:10.1086/142879